МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ БЕТА-ФУНКЦИЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ТРЁХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОЛЕЙ В РАЗНЫХ СХЕМАХ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Студент	__________ А. В. Поляков
Научный руководитель	
к.ф.-м.н., доц., PhD.	__________ М. Н. Алфимов

Москва 2024

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

БЕТА-ФУНКЦИЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ С ТРЁХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ПОЛЕЙ В РАЗНЫХ СХЕМАХ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Студент	__________ А. В. Поляков
Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD.	__________ М. Н. Алфимов
Рецензент, к.ф.-м.н.	__________ А. Г. Семенов
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	__________ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	__________ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучение того, как изменяется β-функция в трехмерном пространстве полей при ковариантном возмущении метрики. Данные вычисления проделаны в пакетах xTensor и xPert в Wolfram Mathematica, а так же рассматривается частный случай $O(4)$ сигма модель.

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пионов и каонов, а так же массы пионов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [1]. Нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния [2]. Показано, что в пределе большие спиновые цепочки с целым спином отображаются на $(1+1)$-мерные нелинейные сигма модели. Этот факт предсказывает, что существует пробел в спектре возбуждения цепочек с целым спином, что подтвержденно как численно, так и экспериментально. В частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [3]. Сигма модели здесь хорошо подходит для описания неупорядоченных систем.

Так же сигма модели могут найти применения в теории струн, например действие Полякова выглядит как [4]

$$S = \frac{1}{2}T_0 \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu}(x) \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu, \tag{1}$$

где g^{ab} — метрика на поверхности, заметаемой струной, $G_{\mu\nu}$ — метрика в пространстве, x^μ — координаты бозонных струн. Если вместо g^{ab} рассматривать метрику Минковского, то получится действие сигма модели (2).

В квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. В сигма моделях например наблюдается явление ассимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД [5].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной работе рассматривается σ модель, в которой скалярное поле отображается в риманово многообразие, действие в котором записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(x) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n x, \tag{2}$$

где x – координата на многообразии, а G_{ij} – метрический тензор, для которой выполняется уравнение ренорм-группы (РГ) [6].

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G), \tag{3}$$

где $\dot{G}_{ij} = \frac{d}{dt}G_{ij}$ – производная метрики по масштабу энергии или так называемый поток Риччи.

Бета функцию можно разложить по степеням $\hbar$

$$\beta_{ij}(G) = \beta^{(1)}_{ij}(G) + \beta^{(2)}_{ij}(G) + \beta^{(3)}_{ij}(G) + \dots \tag{4}$$

где $\hbar$ – параметр, аналогичный постоянной Планка.

В схеме минимального вычитания (MS) известны следующие выражения [7] для первых порядков β-функции.

$$\begin{aligned}
\beta^{(1)}_{ij}(G) &= R_{ij},\\
\beta^{(2)}_{ij}(G) &= \frac{1}{2}R_{iklm}R_j{}^{klm},\\
\beta^{(3)}_{ij}(G) &= \frac{1}{8}\nabla_k R_{ilmn}\nabla^k R_j{}^{lmn} - \frac{1}{16}\nabla_i R_{klmn}\nabla_j R^{klmn} -\\
&\quad - \frac{1}{2}R_{imnk}R_{jpq}{}^k R^{mqnp} - \frac{3}{8}R_{iklj}R^{kmnp}R^l{}_{mnp}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В случаи, когда многообразие трехмерное тензор Римана можно выразить через тензор Риччи, метрический тензор и скалярную кривизну следующим образом.

$$R_{ijkl} = G_{jl}R_{ik} - G_{jk}R_{il} - G_{il}R_{jk} + G_{ik}R_{jl} + \frac{1}{2}R(G_{il}G_{jk} - G_{ik}G_{jl}). \tag{6}$$

Тогда бета функции (5) можно представит как

$$\begin{aligned}
\beta^{(1)}_{ij}(G) &= R_{ij},\\
\beta^{(2)}_{ij}(G) &= \left(R_{kl}R^{kl} + \frac{1}{2}R^2\right)G_{ij} + R_{ij}R - R_i{}^k R_{jk},\\
\beta^{(3)}_{ij}(G) &= \left(\frac{3}{4}R_k{}^m R^{kl}R_{lm} - \frac{7}{8}R_{kl}R^{kl}R + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}(\nabla_k R)(\nabla^k R) +\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{4}(\nabla_m R_{kl})(\nabla^m R^{kl})\right)G_{ij} + \frac{5}{2}R_{ij}R_{kl}R^{kl} - \frac{11}{8}R_{ij}R^2 +\\
&\quad + \frac{1}{4}(\nabla_k R_{ij})(\nabla^k R) - 3R_i{}^k R_j{}^l R_{kl} + \frac{19}{8}R^k_i R_{jk}R - \frac{1}{4}(\nabla_l R_{jk})(\nabla^l R_i{}^k) -\\
&\quad - \frac{1}{4}(\nabla_i R^{kl})(\nabla_j R_{kl}) + \frac{1}{16}(\nabla_i R)(\nabla^j R).
\end{aligned} \tag{7}$$

Примечательно, что возмущая метрику мы можем избавиться от расхождений в следующих приближения по $\hbar$.

2. ВОЗМУЩЕНИЕ МЕТРИКИ

Наша задача выяснить как изменяется бета функция при переопределении метрики. Пусть метрика преобразуется следующим образом

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G^{(0)}_{ij} + G^{(1)}_{ij} + G^{(2)}_{ij} + G^{(3)}_{ij} + \dots \tag{8}$$

где $G_{ij}^{(L)}$ – слагаемое с размерной характеристикой $\hbar^L$. Это делается для того, чтобы устранить расходимости в следующих приближениях по $\hbar$.

Заметим, что бета функция выражается только через тензор Риччи R_{ij}, скалярную кривизну R, метрический тензор G_{ij} и ковариантные производные ∇_i. Метрике G_{ij} приписывается размерная характеристика $\hbar^{-1}$, отсюда G^{ij} имеет размерную характеристику $\hbar$. Ковариантная производная и тензор Риччи имеют нулевую размерную характристику $\hbar^0 = 1$, а скалярная кривизна, будучи сверткой тензора Риччи и метрического тензора имеет размерность $\hbar$.

Можно заметить, что если тензор состоит из N_R символов R и N_∇ символов ∇, то его размерная характеристика равна $N_R + \frac{1}{2}N_\nabla - 1$.

Во-первых из этого наблюдения можно сделать вывод, что $\beta_{ij}^{(L)}(G)$ имеет размерную характеристику $\hbar^{L-1}$, во-вторых можно перечислить все возможные тензоры порядка $\hbar^0$, $\hbar^1$ и $\hbar^2$

$$\begin{aligned}
&l_0 = \{G_{ij}R, R_{ij}\} \\
&l_1 = \{G_{ij}R^2, G_{ij}R_{kl}R^{kl}, G_{ij}\nabla^2 R, G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl}, R_{ij}R, \\
&\qquad \nabla^2 R_{ij}, R_{il}R_j{}^l, \nabla_i\nabla_j R, \nabla_i\nabla^k R_{jk}, \nabla^k\nabla_i R_{jk}\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Количество тензоров порядка $\hbar^2$ слишком велико, поэтому их список вынесен в **Приложение**. Возможно в данном списке какие-то тензоры не учтены или наоборот выписаны линейно зависимые.

Тогда поправки к метрике $G_{ij}^{(L)}$ можно представить как линейные комбинации тензоров l_L, для краткости выпишем только $G_{ij}^{(0)}$ и $G_{ij}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{(0)} &= c_1 G_{ij}R + c_2 R_{ij}, \\
G_{ij}^{(1)} &= c_3 G_{ij}R^2 + c_4 G_{ij}R_{kl}R^{kl} + c_5 G_{ij}\nabla^2 R + c_6 G_{ij}\nabla^k\nabla^l R_{kl} + c_7 R_{ij}R + \\
&\quad + c_8\nabla^2 R_{ij} + c_9 R_{il}R_j{}^l + c_{10}\nabla_i\nabla_j R + c_{11}\nabla_i\nabla^k R_{jk} + c_{12}\nabla^k\nabla_i R_{jk}.
\end{aligned} \tag{10}$$

С помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica из уравнения ренормгруппы (3) была вычислена бета функция при новой метрике (8)

$$\begin{aligned}
\beta_{ij}^{(1)}(G) &= R_{ij}, \\
\beta_{ij}^{(2)}(G) &= -R_i^k R_{jk} + (1+c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1-c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2 G_{ij}\nabla^2 R - c_2 G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Формула для $\beta_{ij}^{(3)}(G)$ оказалась слишком громоздкой, поэтому она помещена в **Приложение**.

3. ОДНОПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВЕНИЕ

Рассмотрим частный случай $O(4)$ сигма модель. Если рассматривать первое приближение ($\hbar^0$), то уравнению ренорм-группы 3 удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\,d\varphi_1^2 + r^2\,d\varphi_2^2\right), \tag{12}$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2}\ln|1-\kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры $\hbar$ и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\hbar} &= 0; \\ \dot{\kappa} &= \hbar(\kappa^2 - 1), \end{aligned} \tag{13}$$

то есть $\hbar = 0$ и $\kappa = \operatorname{arctg}\hbar t$.

Примечательно то, что при $\kappa = 0$ метрика 12 является метрикой трехмерной сферы, а при $\kappa = 1$ переходит в плоскость. то есть κ является параметром деформации модели.

4. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика 12 во втором приближении ($\hbar^1$) не удовлетворяет РГ уравнению 3. Будем искать поправку к метрике в следующем виде:

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar\begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $f(r)$ – произвольная функция, которая зависят только от r, так как мы предполагаем, что изометрии относительно φ_1 и φ_2 сохранятся.

Символы Кристоффеля порядка $\hbar^0$ и $\hbar^1$, у которых второй и третий индекс равны:

$$\begin{aligned} \Gamma^{r\ (0)}_{rr} &= r\frac{\kappa^2+1-2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}, \\ \Gamma^{r\ (1)}_{rr} &= -r\frac{\kappa^2+1-2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}f(r), \\ \Gamma^{r\ (0)}_{\varphi_1\varphi_1} &= -r\frac{(\kappa^2-1)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}, \\ \Gamma^{r\ (1)}_{\varphi_1\varphi_1} &= r\frac{(\kappa^2-1)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}f(r), \\ \Gamma^{r\ (0)}_{\varphi_2\varphi_2} &= -r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2), \\ \Gamma^{r\ (1)}_{\varphi_2\varphi_2} &= r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)f(r). \end{aligned} \tag{15}$$

Так же ненулевыми символами Кристоффеля являеются

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\varphi_1}_{r\varphi_1}{}^{(0)} = \Gamma^{\varphi_1}_{\varphi_1 r}{}^{(0)} = r\frac{\kappa^2-1}{(1-r^2)(1-r^2\kappa^2)},\\
\Gamma^{\varphi_2}_{r\varphi_2}{}^{(0)} = \Gamma^{\varphi_2}_{\varphi_2 r}{}^{(0)} = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

В этом приближении мы имеем следующие уравнения:

$$
\dot{G}_{ij}+\partial_i V_j^{(1)}+\partial_J V_i^{(1)}-2V_k^{(0)}\Gamma^{k}_{ij}{}^{(1)}-2V_k^{(1)}\Gamma^{k}_{ij}{}^{(0)} = -\left(\beta^{(1)}_{ij}(G^{(0)})+\beta^{0}_{ij}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta^{0}_{ij}(G^{(0)})\right). \tag{17}
$$

Поправку к бета функции по $\hbar^1$ диагональны и равны:

$$
\begin{aligned}
\beta^{(1)}_{11}(G^{(0)}) &= \frac{\hbar\left(2r^4k^6-2r^2\left(r^2+2\right)k^4+4r^2k^2+2k^2-2\right)}{\left(r^2-1\right)k\left(r^2k^2-1\right)^3}+\\
&+c_2\frac{\hbar\left(r^4\left(4r^4-1\right)k^8-12r^6k^6+4r^4k^6+2r^2k^6+3\left(3r^4-4r^2+1\right)k^4+6r^2k^2-3\right)}{\left(r^2-1\right)k\left(r^2k^2-1\right)^3},\\
\beta^{(1)}_{22}(G^{(0)}) &= \frac{\left(r^2-1\right)\hbar\left(-2r^6k^6+2r^4k^6+4r^4k^4-2r^2k^4-4r^2k^2+2\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2}+\\
&+c_2\frac{\left(r^2-1\right)\hbar\left(2r^6k^6+r^2k^6-6r^4k^4+2r^2k^4+3\left(r^2-2\right)k^2+k^4+3\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2},\\
\beta^{(1)}_{33}(G^{(0)}) &= -\frac{r^2\hbar\left(k^2-1\right)\left(-2r^4k^4+2r^2k^4+2r^2k^2-2\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2}-\\
&-c_2\frac{r^2\hbar\left(k^2-1\right)\left(r^4\left(2r^2-1\right)k^6+r^2\left(2-9r^2\right)k^4+3\left(4r^2-1\right)k^2-3\right)}{k\left(r^2k^2-1\right)^2},\\
\beta^{0}_{11}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta^{0}_{11}(G^{(0)}) &= \frac{f'(r)\left(r^2k^2-1\right)^2\left(r^4k^2-2r^2+1\right)}{2r\left(r^2-1\right)\left(r^2k^2-1\right)^3},\\
\beta^{0}_{22}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta^{0}_{22}(G^{(0)}) &= \frac{\hbar\left(r^2-1\right)\left(k^2-1\right)\left(rf'(r)\left(r^2k^2-1\right)-4f(r)\right)}{2\left(r^2k^2-1\right)^2},\\
\beta^{0}_{33}(G^{(0)}+G^{(1)})-\beta^{0}_{33}(G^{(0)}) &= \frac{1}{2}\hbar r\left(\left(r^2-1\right)f'(r)+4f(r)\right)\left(r^2k^2-1\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Из недиагональных уравнений получаем условие на $V^{(1)}$

$$
\begin{cases}
2V^{(1)}_{\varphi_1}\Gamma^{\varphi_1}_{r\varphi_1}{}^{(0)} = \partial_r V^{(1)}_{\varphi_1}-\partial_{\varphi_1}V^{(1)}_r,\\
2V^{(1)}_{\varphi_1}\Gamma^{\varphi_1}_{r\varphi_2}{}^{(0)} = \partial_r V^{(1)}_{\varphi_2}-\partial_{\varphi_2}V^{(1)}_r,
\end{cases} \tag{19}
$$

которое имеет решение $V^{(1)}_r = V(r)$ и $V_\varphi = 0$. Запишем второе и третье диагональное уравнение:

$$
\begin{cases}
-2V^{(1)}_r\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}-2V^{(0)}_r\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)},\\
-2V^{(1)}_r\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}-2V^{(0)}_r\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}.
\end{cases} \tag{20}
$$

Заметим, что это два разных уравнения на $V^{(1)}_r$, значит они должны быть совместными, то есть

$$
\frac{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)}} = \frac{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)}}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)}} = \frac{(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)}}{(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}}. \tag{21}
$$

Несложно проверить, что

$$\frac{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)}} = \frac{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)}}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)}} = \frac{\kappa^2 - 1}{(1-\kappa^2 r^2)^2}, \tag{22}$$

а значит

$$(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} = (\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} \frac{\kappa^2 - 1}{(1-\kappa^2 r^2)^2}. \tag{23}$$

Отсюда получим, что

$$2f(r)\hbar(\kappa^2 r^4 - 1) = \beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1}\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}), \tag{24}$$

то есть мы нашли $f(r)$ для любого параметра c_2. Теперь можно найти $V_r^{(1)}$ из 20 и получить ограничения на $\hbar$ и κ из уравнения

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)}\Gamma^{r}_{rr}{}^{(0)} + 2V_r^{(0)}\Gamma^{r}_{rr}{}^{(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)}, \tag{25}$$

однако полученные уравнения оказались слишком громоздкими.

5. АНАЛОГИЯ С O(3)

Так как прямыми вычислениями не удалось подобрать $f(r)$, то можно попробовать посмотреть на добавку к метрике в $O(3)$. В данной модели метрика в двухпетлевом случае выглядит как [8]

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{1 - \frac{\hbar\kappa(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}dr^2 + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}d\varphi_1^2\right). \tag{26}$$

Как можно заметить в однопетлевом случае она совпадает с первыми двумя компонентами (12). Поэтому можно сделать предположение, что

$$f(r) = A\kappa\frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}, \tag{27}$$

где A — произвольная константа. Теперь нам требуется проверить, что уравнения (20) должны быть совместны для такой $f(r)$. Отсюда следует условие

$$\frac{1}{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}}\left((\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} - 2V_r^{(0)}\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)}\right) = \frac{1}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)}}\left((\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} - 2V_r^{(0)}\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)}\right), \tag{28}$$

то есть теперь требуется подобрать константы c_2 и A таким образом, чтобы это уравнение выполнялось.

6. НЕДИОГАНАЛЬНЫЕ РГ КОМПОНЕНТЫ

Вернемся к недиагональным компонентам РГ уравнения 19 и предположим, что $V_r^{(1)} = V_r^{(1)}(r)$, $V_{\varphi_1}^{(1)} = V_{\varphi_1}^{(1)}(r)$ и $V_{\varphi_2}^{(1)} = V_{\varphi_2}^{(1)}(r)$. Тогда решив два дифференциальных уравнения, получим, что

$$\begin{aligned} V_{\varphi_1}^{(1)}(r) =& A_1 \frac{1-r^2}{1-r^2\kappa^2}, \\ V_{\varphi_2}^{(1)}(r) =& A_2 r^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Полученные значение векторных полей напоминают значение метрики в лидирующем порядке 12:

$$\begin{aligned} G_{\varphi_1\varphi_1} &= \frac{2\kappa}{\hbar} V_{\varphi_1}^{(1)}(r), \\ G_{\varphi_2\varphi_2} &= \frac{2\kappa}{\hbar} V_{\varphi_2}^{(1)}(r). \end{aligned} \tag{30}$$

Однако если попробовать использовать полученный результат, то выяснится, что слагаемые с $V_{\varphi_1}^{(1)}$ и V_{φ_2} не встречаются в уравнения 20 и 25. То есть мы выяснили, что при условии того, что векторные поля зависят только от координат, угловые компоненты векторных полей никак не вляют на РГ уравнение.

7. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ В O(3) СИГМА МОДЕЛИ

На данный момент все наши предположения приводили к достаточно громоздким выражениям. Из которых не получается получить простые уравнение на κ и $\hbar$ не зависящие от координат.

Однако нам известно как выглядит метрика в $O(3)$ сигма модели в двухпетлевом случае. Мы можем применить наш подход к более простой модели с уже известным результатом, чтобы понять чем эти модели кардинально отличаются или обнаружить ошибку.

Основное наше предположение остается аналогичным, считаем что метрика в двухпетлевом случае выглядит как:

$$ds^2 = \frac{2\varkappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2(1+f(r)\hbar)}{(1-r^2)(1-\varkappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\varkappa^2 r^2} d\varphi^2\right). \tag{31}$$

Бета функция в однопетлевом и двухпетлевом случае не зависит от выбора схема, и выглядит как

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(1)}(G) &= \frac{1}{2} G_{ij} R, \\ \beta_{ij}^{(2)}(G) &= \frac{1}{4} G_{ij} R^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Так же считаем, что векторные поля не зависят от углов, $V_\varphi^{(1)} = 0$, а так же $V^{(0)} = 0$.

Из РГ уравнения мы имеем два уравнения

$$\begin{cases} \dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} - 2V_r^{(1)} \Gamma^r_{rr}{}^{(0)} & = -(\beta_{rr})^{(1)}, \\ -2V_r^{(1)} \Gamma^r_{\varphi\varphi}{}^{(0)} & = -(\beta_{\varphi\varphi})^{(1)}. \end{cases} \tag{33}$$

Заметим, что теперь у нас два уравнения из которых мы хотим определить $f(r)$, $V_r^{(1)}$, а так же получить условия на κ и $\hbar$, то есть в отличие от $O(4)$ сигма модели у нас есть некая свобода выбора. Однако можно попробовать выразить $V_r^{(1)}$ из второго уравнения, подставить в первое уравнение, а так же использовать уже известный факт об $O(3)$ сигма модели:

$$\begin{cases} f(r) = \kappa \dfrac{1 - r^2}{1 - \kappa^2 r^2}, \\ \dot{\kappa} = \hbar(\kappa^2 - 1), \\ \dot{\hbar} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Проделав вышеуказанные действия тождество не выполнилось. Это говорит о том, что где-то находится ошибка. Поиск ошибки может ответить на вопрос, почему до этого мы получали громоздкие выражения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной исследовательской работы было рассмотрено понятие нелинейной интегрируемой $O(4)$ сигма модели. Основным объектом исследования стало изучение первых трех порядков бета-функции из РГ уравнения (3), а так же их вид при возмущении метрики (8, 11), которые были получены с помощью пакетов xTensor и xPert в Wolfram Mathematica. Было проверено, что в однопетлевом случае метрика 12 удовлетворяет РГ уравнению 3, а так же была предпринята попытка поиска поправок в двухпетлевом случае.

В рамках поиска поправки в двухпетлевом случае было проверено ряд гипотез, которые описаны в данной работе. Так же можно рассматривать, что поправки к метрики есть не только к G_{rr}, но и к $G_{\varphi 1 \varphi 1}$, $G_{\varphi 1 \varphi 1}$. Однако подобные предположения скорей всего приведут к более сложным выражениям. Кроме того можно отказаться от изотропности в двухпетлевом случае.

В последнем разделе мы хотели проверить общий подход к уже изученной $O(3)$ сигма модели, однако не смогли убедиться в уже существующем тождестве. Это говорит о том, что где-то есть ошибка, которую необходимо найти.

Как писалось выше. Сигма модели выступают хорошей альтернативой квантовой хромодинамике. Поэтому чтобы понимать насколько получен верный результат следует получить уже известные результататые КХД с помощью сигма модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [`arXiv:hep-ph/0601196`].

[2] S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, *GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1110.

[3] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.

[4] R. Kallosh and A.A. Tseytlin, *Simplifying superstring action on ads5 $\times$ s5*, *Journal of High Energy Physics* **1998** (1998) 016–016.

[5] M.C. Abbott, Z. Bajnok and Balog, *Resurgence in the o(4) sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) .

[6] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [`arXiv:1804.03399`].

[7] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, *Annals Phys.* **163** (1985) 318.

[8] M. Alfimov and A. Litvinov, *On loop corrections to integrable 2d sigma model backgrounds*, *Journal of High Energy Physics* **2022** (2022) .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список тензоров порядка $\hbar^2$

$$\begin{aligned}
l_2 = \{ & G_{ij}R^3, G_{ij}RR_{kl}R^{kl}, G_{ij}R_{kl}R^k_pR^{pl}, G_{ij}R\nabla^2R, G_{ij}\nabla_lR\nabla^lR, \\
& G_{ij}R_{lm}\nabla^l\nabla^mR, G_{ij}(\nabla^lR_{l,m})(\nabla^mR), G_{ij}R\nabla^l\nabla^mR_{lm}, G_{ij}R^{lm}\nabla^2R_{lm}, \\
& G_{ij}(\nabla^pR^{lm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}R^{pm}\nabla^l\nabla_pR_{lm}, G_{ij}(\nabla_pR^{pm})(\nabla^lR_{lm}), \\
& G_{ij}(\nabla^lR^{pm})(\nabla_pR_{lm}), G_{ij}\nabla^l\nabla^m\nabla_l\nabla_m, G_{ij}\nabla_p\nabla^m\nabla^p\nabla_lR_{lm}, \\
& R_{ij}R^2, R_{ij}R_{lm}R^{lm}, R_{ij}\nabla^2R, (\nabla^pR_{ik})(\nabla_pR^k_j), R^k_j\nabla^2R_{ik}, R_{ik}R_{jl}R^{kl}, \\
& R_{ik}\nabla^k\nabla^lR_{jl}, (\nabla^lR_{ik})(\nabla^kR_{jl}), (\nabla^kR_{ik})(\nabla^lR_{jl}), (\nabla^l\nabla^kR_{ik})R_{jl}, \\
& (\nabla_iR)(\nabla_jR), R\nabla_i\nabla_jR, (\nabla_iR_{kl})(\nabla_jR^{kl}), R_{kl}\nabla_i\nabla_jR^{kl}, \nabla_i\nabla_j\nabla^2R \\
& \nabla_i\nabla_j\nabla^l\nabla^kR_{kl}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla^kR), (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), \\
& (\nabla_i\nabla^kR_{jk})R, (\nabla_iR)(\nabla^kR_{jk}), (\nabla_i\nabla^kR)R_{jk}, (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), \\
& (\nabla_iR_{jk})(\nabla_pR^{kp}), (\nabla_i\nabla_pR_{jk})R^{kp}, (\nabla_iR^{kp})(\nabla_pR_{jk}), (\nabla_i\nabla_pR^{kp})R_{jk}, \\
& \nabla_i\nabla_k\nabla^2R^k_j, R_{ik}\nabla_j\nabla^kR, (\nabla^kR_{ik})(\nabla_jR), R_{ik}\nabla_j\nabla_lR^{kl}, \\
& (\nabla_lR_{ik})(\nabla_jR^{kl}), R_{ik}R^k_jR\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{(3)}_{ij}(G) = & (c_1+c_9)R_i{}^kR_j{}^lR_{kl} + (c_7-c_4)R_{ij}R_{kl}R^{kl} + (-2c_1-c_2+2c_4)G_{ij}R_k{}^mR^{kl}R_{lm} + \\
& + 2c_2R_i{}^kR_{jk}R + (c_1+2c_3)G_{ij}R_{kl}R^{kl}R - \left(\frac{c_1}{2}+2c_2+c_3\right)R_{ij}R^2 + \frac{1}{2}c_2G_{ij}R^3 + \\
& + \frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_12+c_9+2c_{11})R^{kl}\nabla_i\nabla_jR_{kl} + (c_1-c_6-c_7)R_{ij}\nabla_k\nabla_lR^{kl} - \\
& - (c_1+c_2+2c_3)G_{ij}R\nabla_k\nabla_lR^{kl} - (c_5+c_6)G_{ij}\nabla_k\nabla_l\nabla^2R^{kl} + \\
& + \frac{1}{2}(2c_1(c_2-1)-3c_2+3c_2^2-6c_3-c_7)R\nabla_i\nabla_jR + \\
& + \frac{1}{2}(2c_{10}+c_{11}+c_{12}-c_5)\nabla_i\nabla_j\nabla^2R - \frac{1}{2}(2c_{10}+c_{11}+c_{12}+c_6)\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_lR^{kl} + \\
& + \frac{1}{2}(c_2+c_7+c_9-c_1c_2)R_{jk}\nabla_i\nabla^kR + + \frac{1}{2}(c_2+c_7+c_9-c_1c_2)R_{ik}\nabla_j\nabla^kR \\
& + \left(c_{11}+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_12+c_9)\right)R^{kl}\nabla_i\nabla_lR_{jk} + \\
& + \left(c_{11}+\frac{c_{12}+8}{2}\right)R_j{}^k\nabla_i\nabla_lR_k{}^l + \frac{1}{2}c_8R_i{}^k\nabla_l\nabla_jR^l_k + \\
& + \frac{1}{4}(c_1^2-1+2(4c_{10}+c_{11}+c_{12}-2c_4-2c_9))\nabla_iR^{kl}\nabla_jR_{kl} + \\
& + \left(\frac{1}{16}+\frac{3c_2^2}{4}+\frac{c_1}{2}(1+2c_2)-c_3-c_7\right)\nabla_iR\nabla_jR + \\
& + \frac{1}{2}(c_7-c_1(1+c_2))\nabla_jR\nabla_kR_i{}^k + \frac{1}{2}(c_7-c_1(1+c_2))\nabla_iR\nabla_kR_j{}^k - \\
& - \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_iR_j{}^k - \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla_k\nabla_jR_i{}^k + \frac{1}{2}c_1c_2R\nabla^2R_{ij} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}(c_7-c_1-2c_2-2c_5)R_{ij}\nabla^2 R+\frac{1}{2}(c_1+c_2+2c_2^2+2c_3)G_{ij}R\nabla^2 R+\\
&+\frac{1}{4}(c_1^2+2(2c_{10}-c_{11}-c_{12}+c_7)-c_1(2+c_2))\nabla_i R_{jk}\nabla^k R+\\
&+\frac{1}{4}(c_1^2+2(2c_{10}+c_7)-c_1(2+c_2))\nabla_j R_{ik}\nabla^k R-\left(2c_8+\frac{c_1^2}{2}\right)\nabla_k R_{jl}\nabla^l R_i{}^k+\\
&+\frac{1}{4}(1+c_1(4+c_2)-c_1^2-2(c_{10}+2c_7+c_8))\nabla_k R_{ij}\nabla^k R+\\
&+\frac{1}{4}\left(c_2^2-\frac{1}{2}-c_1(2+c_2)-4c_3-2c_5\right)G_{ij}\nabla_k R\nabla^k R+\\
&+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+3c_{11}+3c_{12}+c_9)\nabla_i R_j{}^k\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1+c_9+c_{12}-c_1^2)R^{kl}\nabla_l\nabla_j R_{ik}+\\
&+\frac{1}{2}(c_1-c_1^2+c_{11}+c_{12}+c_9)\nabla_j R_i{}^k\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1^2-c_{11}-c_{12}-2c_8)\nabla^k R_{ij}\nabla_l R_k{}^l+\\
&+\left(\frac{1}{2}(c_1-4)c-2+c_5-c_6\right)G_{ij}\nabla^k R\nabla_l R_k{}^l+\frac{1}{2}(c_1^2-c_{12}+2c_8)R^{kl}\nabla_k\nabla_l R_{ij}-\\
&-\frac{1}{2}(c_1+c_8+c_9+c_{12})R_j{}^k\nabla_l\nabla_k R_i{}^l-\frac{1}{2}(c_1+c_8+c_9)R_i{}^k\nabla_l\nabla_k R_j{}^l\\
&+\frac{1}{2}(c_8+c_12)R_j{}^k\nabla^2 R_{ik}+\frac{1}{2}c_8 R_i{}^k\nabla^2 R_{jk}+\frac{1}{2}(c_5+c_6)G_{ij}\nabla^2\nabla^2 R+\\
&+\frac{1}{2}(c_1+2c_8+c_9+2c_{11}+2c_{12})\nabla_i R_{kl}\nabla^l R_j{}^k+\frac{1}{2}(c_1+2c_8+c_9)\nabla_j R_{kl}\nabla^l R_i{}^k+\\
&+(2c_1+2c_2-2c_4+3c_6)G_{ij}R^{kl}\nabla_m\nabla_l R_k{}^m+\frac{1}{2}(4c_2+4c_5+c_6)G_{ij}R^{kl}\nabla^2 R_{kl}+\\
&+\left(\frac{1}{4}+c_1+2c_2-c_4+2c_5+\frac{c_6}{2}\right)G_{ij}\nabla_m R_{kl}\nabla^m R^{kl}+(c_2+c_6)G_{ij}\nabla_l R_{km}\nabla^m R^{kl}+\\
&+\frac{1}{4}(2c_1^2+8c_8-4c_1-4c_9-1)\nabla_l R_{jk}\nabla^l R_i{}^k+(c_2+c_6)G_{ij}\nabla_k R^{kl}\nabla_m R_l{}^m+\\
&+\left(\frac{1}{2}c_1(c_2-2)+c_4+c_5-2c_2-\frac{c_6}{2}\right)G_{ij}R_{kl}\nabla^k\nabla^l R.
\end{aligned}
$$