Бета-функция сигма-моделей с трёхмерным пространством полей в разных схемах перенормировки

Поляков Андрей Вадимович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе
Москва, 27 июня 2024 г.

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений в физике, такие как

1. Описания спиновых цепочек [S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, 1989]
2. Описании квантового эффекта Холла [P. Fendley, 2000]
3. Так же как и в Квантовой Хромо Динамике (КХД) сигма модели обладают такими свойствами как явление ассимптотической свободы и массовой щели. Поэтому их можно использовать как игрушечная модель КХД. [M.C. Abbott, Z. Bajnok and Balog, 2021]
4. Нас интересуют интегрируемые сигма модели, так как в них с помощью уравнения термодинамического Бете анзатца можно вычислить энергетический спектр возбуждений, однако для этого нам нужно знать как выглядит S матрица.
5. Из симметрий можно предъявить вид S матрицы, но это необходимо проверить из первых принципов.

Сигма-модель

1. В данной работе рассматривается $O(n)$ сигма модель, как самая простая интегрируемая сигма модель, в которой пространством полей является $n-1$ мерная сфера. В $O(n)$ сигма модели так же наблюдается асимптотическая свобода и массовая щель.
2. Действие в σ моделях записывается как

$$S = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(X) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d\sigma d\tau,$$

   где X — координата на многообразии, а G_{ij} — метрика, которая представляет из себя ряд по по постоянной Планка $\hbar$.
3. Для того чтобы доказать, как выглядит S матрица нам нужно разбить действие на свободное и взаимодействие. Чтобы это сделать нам нужно вычислить квантовые поправки к классическому действию.

Ренормгрупповой поток

1. Чтобы учесть зависимость от масштаба энергии вводится уравнение ренормгруппы (РГ).

$$\frac{d}{dt}G_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G),$$

где V — векторное поля, связанное с заменой координат, $t = -\ln \varepsilon$, где ε — масштаб энергии.

2. Все составляющие уравнения РГ можно разложить в ряд по постоянной Планка $\hbar$ и рассматривать уравнение в каждом порядке.
3. В данной работе рассматривается именно деформированная $O(4)$ сигма модель. Так как в недеформированной модели изменяется только радиус сферы и не появляются добавки к действию.

Однопетлевой порядок

1. В однопетлевом случае уравнению ренормгруппы удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\,d\varphi_1^2 + r^2\,d\varphi_2^2\right),$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии (t — логарифм масштаба энергии), а так же получили, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hbar &= 0;\\ \frac{d}{dt}\kappa &= \hbar(\kappa^2 - 1),\\ V_i &= \partial_i \ln|1 - r^2\kappa^2|.\end{aligned}$$

2. Можно показать, что действие в ультрафиолетовом пределе $(\kappa \to 1)$ переходит в свободную теорию.

Двухпетлевой порядок

1. Нам известно разложение β функции по $\hbar$, а так же мы вычислили как она выглядит при произвольной схеме перенормировки. Заметим, что в произвольной схеме β-функция зависит от константы перенормировки c_2.

$$\beta_{ij}^{(1)}(G) = R_{ij},$$
$$\beta_{ij}^{(2)}(G) = -R_i^k R_{jk} + (1+c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1-c_2)R_{ij}R - \frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \\ - \frac{1}{2}c_2\nabla_j\nabla_i R + \frac{1}{2}c_2 G_{ij}\nabla^2 R - c_2 G_{ij}\nabla_k\nabla_l R^{kl}.$$

2. По аналогии с $O(3)$ моделью мы предполагаем, что добавка к метрике выглядит как

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2r^2)}\left(1+\hbar f(r)\right) + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2r^2}\,d\varphi_1^2 + r^2\,d\varphi_2^2\right),$$

3. А векторное поле $V^{(1)}$ зависит только от r.

Результаты вычислений

1. Из уравнения
$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G),$$
Можно получить 6 различных уравнений.

2. Недиагональные компоненты этого уравнения задают условия на векторные поля $V^{(1)}$.
$$\begin{cases} 2V^{(1)}_{\varphi_1}\Gamma^{\varphi_1}_{r\varphi_1}{}^{(0)} = \partial_r V^{(1)}_{\varphi_1} - \partial_{\varphi_1} V^{(1)}_r, \\ 2V^{(1)}_{\varphi_2}\Gamma^{\varphi_1}_{r\varphi_2}{}^{(0)} = \partial_r V^{(1)}_{\varphi_2} - \partial_{\varphi_2} V^{(1)}_r. \end{cases}$$

3. Если подробно рассмотреть диагональные компоненты РГ уравнения, то мы увидим, что $V^{(1)}_{\varphi_1}$ и $V^{(1)}_{\varphi_2}$ не вносят вклад при условии, что векторное поле $V^{(1)}$ зависит только от r.

Результаты вычислений

1. Диагональные компоненты РГ уравнения выглядят как

$$\begin{cases} \dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)} \Gamma^r_{rr}{}^{(0)} + 2V_r^{(0)} \Gamma^r_{rr}{}^{(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)} \\ -2V_r^{(1)} \Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)} - 2V_r^{(0)} \Gamma^r_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)}, \\ -2V_r^{(1)} \Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)} - 2V_r^{(0)} \Gamma^r_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}. \end{cases}$$

2. Из условия совместности 2-го и 3-го уравнения нам удалось найти функцию $f(r)$ в произвольной схеме перенормировки в виде

$$f(r) = \frac{1}{2\hbar(\kappa^2 r^4 - 1)} \left(\beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1} \beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}) \right),$$

где $\beta^{(1)}$ — бета функция порядка $\hbar$ в произвольной схеме.

3. Из первого уравнения нам необходимо получить уравнения на κ и $\hbar$.

Заключение

1. Были проверено выражение β-функции в двухпетлевом порядке в произвольной схеме перенормировки.
2. Было проверено, что метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\,d\varphi_1^2 + r^2\,d\varphi_2^2\right),$$

   удовлетворяет РГ уравнению в первом приближении $(\hbar^0)$.
3. Было сделано предположение относительно вида метрики и векторного поля в двухпетлевом приближении.
4. Было установлено явный вид добавки $f(r)$ в произвольной схеме, а так же доказано, что выбор $V_{\varphi_1}^{(1)}$ и $V_{\varphi_2}^{(1)}$ не влияют на результат при условии, что векторное поле зависят только от r.
5. Дальнейшая задача получить дифференциальные уравнения на κ и $\hbar$. Также было бы интересно рассмотреть следующий порядок по $\hbar$.

Благодарю за внимание!