

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

На правах рукописи

НИКОЛАЕНКО РОМАН ВЛАДИМИРОВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА АДРОНИЗАЦИИ ПРИ  
ПОМОЩИ МОДЕЛИ СТРУН НАМБУ-ГОТО С  
ОБОБЩЕННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»  
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ А. А. Петрухин

Москва 2024

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА АДРОНИЗАЦИИ ПРИ  
ПОМОЩИ МОДЕЛИ СТРУН НАМБУ-ГОТО С  
ОБОБЩЕННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Студент \_\_\_\_\_ Р. В. Николаенко

Научный руководитель,  
д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ А. А. Петрухин

Рецензент,  
д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Р. А. Мухамедшин

Секретарь ГЭК,  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,  
д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

Рук. учеб. прог.,  
д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	<b>5</b>
Процесс адронизации . . . . .	5
Цель работы . . . . .	9
<b>1 Теория релятивистской струны Намбу-Гото</b>	<b>10</b>
1.1 Свободная релятивистская струна . . . . .	10
1.2 Релятивистская струна с массами на концах . . . . .	14
<b>2 Обобщенные начальные условия для кварк-глюонных релятивистских струн</b>	<b>18</b>
2.1 Выбор калибровки для свободной струны . . . . .	18
2.2 Начальные условия для струны с массами на концах . . . . .	27
<b>3 Генератор адронизации ATROPOS</b>	<b>33</b>
3.1 Структура программы . . . . .	33
3.2 Рождение частиц . . . . .	35
3.2.1 Генерация точек разрыва струны . . . . .	35
3.2.2 Переход струна-адрон . . . . .	38
3.2.3 Сохранение полного углового момента . . . . .	40
<b>4 Результаты моделирования адронизации в ATROPOS</b>	<b>44</b>
<b>Заключение</b>	<b>51</b>
<b>Приложение А Вывод решения задачи Коши о движении свободной релятивистской струны</b>	<b>53</b>
<b>Приложение В Вывод решения задачи о движении струны с массами на концах</b>	<b>56</b>

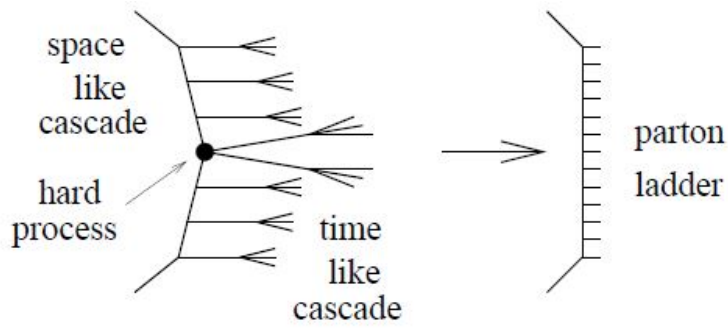
Приложение С Постановка и решение задачи о движении дочерних струн	60
Список использованных источников	62

# ВВЕДЕНИЕ

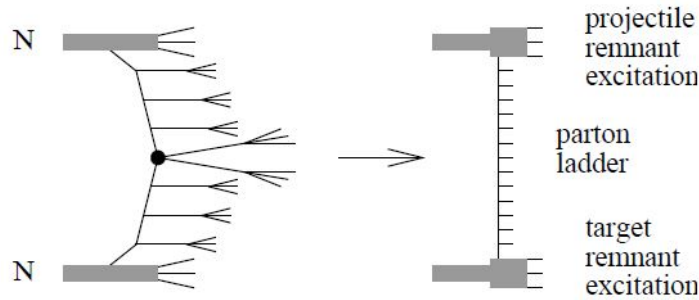
## Процесс адронизации

Рассмотрим событие адронного взаимодействия при высокой энергии, например, нуклон-нуклонное столкновение. Каждый нуклон имеет сложную внутреннюю структуру: он состоит из трех валентных кварков, «одетых в шубу» из глюонов и морских кварков и антикварков. Коллективно частицы, из которых состоят адроны, называются партонами. Если переданный при взаимодействии импульс достаточно велик, то взаимодействие двух нуклонов необходимо рассматривать как сложный процесс, в котором происходят множественные элементарные взаимодействия партонов (рисунок 1а). Партоны, рожденные в этих взаимодействиях обычно являются виртуальными (не на массовой поверхности), что приводит к дополнительному излучению новых партонов (так называемые «партонные лестницы»). Осколки взаимодействующих адронов (remnants), рисунок 1б, тоже представляют собой возбужденные состояния, которые дают вклад в общее множество партонов, хотя они при этом кинематически разделены от «внутренних» вкладов от жестких процессов. Картина при взаимодействии ядер может быть еще более сложной.

Однако в эксперименте регистрируются не партоны, а цветные синглеты, адроны. Это суть закона конфайнмента: кварки и глюоны не существуют в свободном состоянии. Поэтому любая модель взаимодействий, претендующая на описание наблюдаемых зависимостей, должна обладать механизмом соединения партонных состояний в адроны. Переход от образованных кварков и глюонов к регистрируемым детектором стабильным адронам и называется адронизацией. Явление адронизации, по своей природе, является мягким процессом, в связи с чем возникают существенные трудности в теоретическом описании. Ни одна существующая модель ад-



(a)



(б)

Рисунок 1 — (а) Элементарное партон-партонное рассеяние: жесткому рассеянию в центре предшествуют излучения партонов (пространственноподобный каскад начального состояния), эти партоны сами излучают новые партоны (времениподобный каскад конечного состояния). Для всего этого используют партонную лестницу; (б) Полная картина, включающая осколки. Они являются важными источниками частиц при высоких энергиях

ронизации не описывает все наблюдаемые эффекты.

В последние годы данные ряда экспериментов в физике высоких и сверхвысоких энергий указывают на наличие отклонений экспериментально измеренных величин от предсказаний расчетов. Измеренные инвариантные сечения рождения  $\pi^0$ -мезонов в протон-протонных столкновениях при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ коллаборацией ALICE [1] свидетельствуют о наличии дефицита  $\pi^0$  в эксперименте в сравнении с предсказаниями моделей в области поперечных импульсов 1-10 ГэВ, рисунок 2.

Как видно из рисунка, в области средних значений поперечного импульса ожидание согласно моделям завышено на 10%-40%.

Данные эксперимента NA61 [2] по столкновениям пионных пучков с углеродной мишенью демонстрируют неспособность моделей адронных взаимодействий, используемых в программах моделирования широких атмосферных ливней (ШАЛ) [3], описывать рождение векторных  $\rho^0$ -мезонов во всем интервале значений переменной  $x_F$ , рисунок 3.

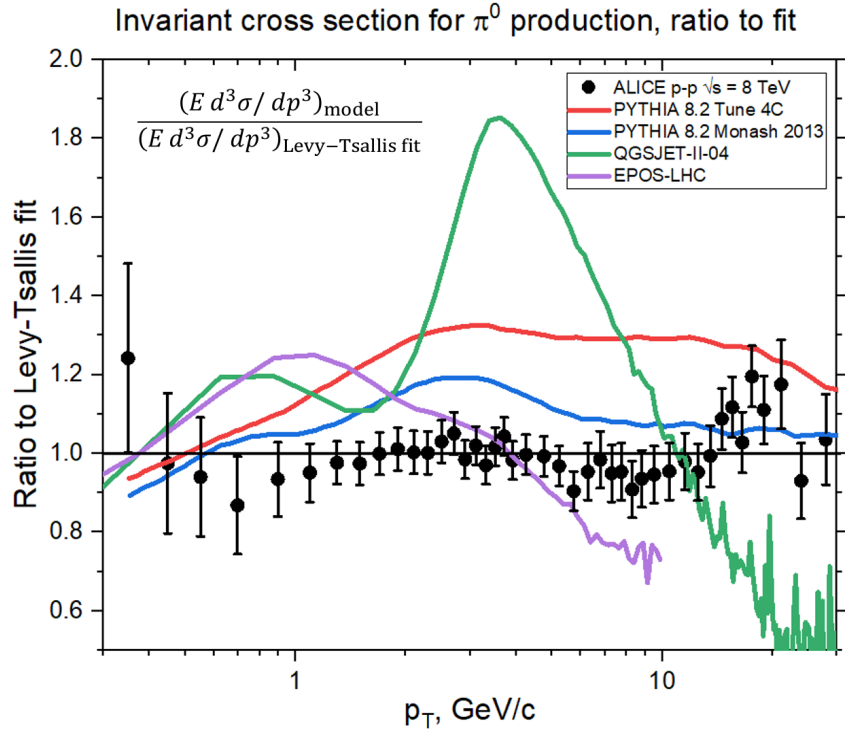


Рисунок 2 — Сравнение дифференциального сечения рождения  $\pi^0$ -мезонов в столкновениях протонов с  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ с результатами моделирования

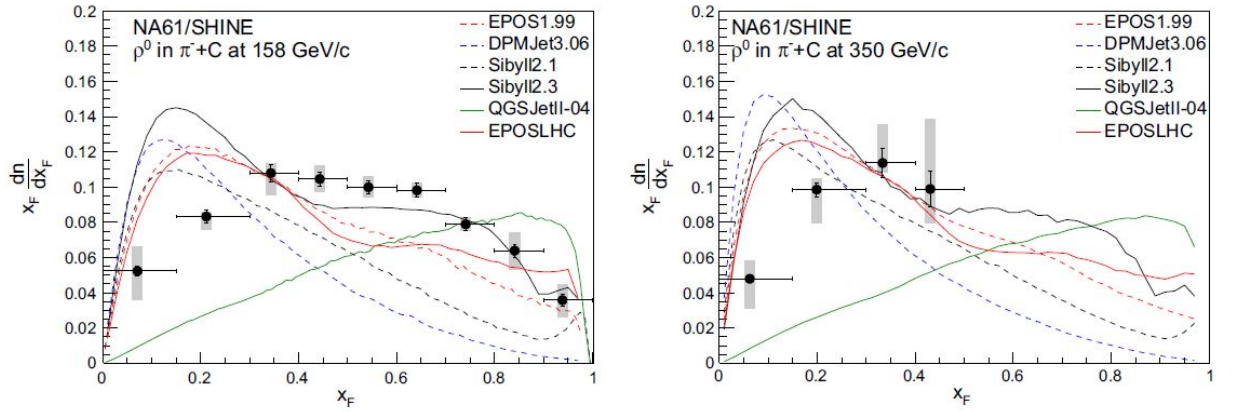


Рисунок 3 — Масштабированные спектры  $\rho^0$ -мезонов в столкновениях  $\pi^- + C$  при 158 ГэВ (слева) и 350 ГэВ (справа)

Видно, что ни одна из моделей даже качественно не повторяет форму экспериментальных спектров. Модели сильно завышают множественность при малых  $x_F$  и занижают при больших.

Эксперименты по регистрации мюонной компоненты ШАЛ также демонстрируют наличие расхождений между предсказаниями моделей адронных взаимодействий и экспериментальными данными, что приводит к проблеме избытка мюонов в космических лучах сверхвысоких энергий, т.н.

«мюонная загадка» [4-6].

Ввиду отсутствия полноценной теории адронизации, существует множество моделей, которые используют разные предположения, механизмы и параметризации для ее описания. Модели адронизации, не направленные на учет коллективных эффектов, характерных, в основном, для столкновений тяжелых ионов, можно разделить на три основных типа. Это модели независимой фрагментации (модель Филда-Фейнмана) [7], кластерные модели, например, модель Веббера [8] и струнные модели [9, 10]. Струнные модели являются наиболее согласованными с точки зрения сохранения квантовых чисел, учета глюонов и описания адронизации коллинеарных партонов. Естественное отсутствие коллинеарных и инфракрасных расходимостей в струнных моделях является серьезным аргументом в пользу выбора такого подхода к описанию адронизации. Отметим еще тот факт, что, поскольку во всех упомянутых моделях процесс адронизации представляет собой последовательную фрагментацию сложных систем партонов, вместо адронизации часто используется термин фрагментация. В этой работе эти два термина будут пониматься эквивалентными друг другу.

Струнная LUND-модель [9], используемая в широко известном Монте-Карло генераторе PYTHIA [11], является полностью скейлинг-инвариантным подходом и не чувствительна к конфигурации струны. Это является следствием постулатов, используемых при выводе функций фрагментации струны [9]. В связи с этим в рамках данной модели довольно трудно исследовать новые эффекты, связанные с динамикой струн.

Другим серьезным подходом стала модель адронизации по закону площади, впервые реализованная в Caltech-II [10, 12]. В ней для описания динамики релятивистских струн использовался математический аппарат, построенный на действии Намбу-Гото, который позволяет вычислять инвариантную площадь мирового листа произвольно движущейся релятивистской струны, благодаря чему удается рассчитывать процесс фрагментации для любой начальной конфигурации. Данный подход обладает гораздо большим потенциалом, чем LUND-модель, и используется в современных моделях адронных взаимодействий NeXus 2.0 [13] и EPOS LHC [14].

Однако во всех существующих реализациях используется приближение начально-точечных струн, что ограничивает универсальность моделей



и возможности для введения новых эффектов. Кроме того, все существующие модели фрагментации обладают одним принципиальным недостатком: ни в одной из них при фрагментации струн или кластеров не учитывается сохранение полного углового момента системы.

Кроме того, проблемным местом любой существующей модели является описание рождения тяжелых адронов, то есть фрагментации систем с  $c$ - и  $b$ -кварками. Масса кварков вводится в теорию через феноменологию и с серьезными упрощениями. Проблемой остается и выбор самих значений масс кварков. Модель, в которой масса кварков вводится из первых принципов теории позволит исследовать различные новые механизмы, связанные с рождением тяжелых частиц.

## Цель работы

Целью работы является разработка модели адронизации, в которой введение новых эффектов при рождении адронов может быть осуществлено с точки зрения динамики кварк-глюонных струн, учета спиновых характеристик и начальной протяженности струн. Принято решение создать Монте-Карло генератор для моделирования фрагментации релятивистских кварк-глюонных струн Намбу-Гото с обобщенными начальными условиями. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) Вывод начальных условий для задачи Коши о движении релятивистских струн, сформированных из произвольного количества партонов и с массивными кварками на концах струны;
- 2) Выбор калибровки, фиксирующей параметры теории;
- 3) Разработка программного решения для расчета всех необходимых характеристик струн;
- 4) Разработка алгоритма фрагментации релятивистских струн и алгоритма перехода струна-адрон;
- 5) Отладка и оптимизация программы;
- 6) Подгонка свободных параметров модели в соответствии с экспериментальными данными.

# ГЛАВА 1.

## ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ НАМБУ-ГОТО

### 1.1 Свободная релятивистская струна

Разумно считать, что уже на ранних стадиях после формирования новых партонов в результате множественных элементарных взаимодействий, происходящих в адронных столкновениях, эти партоны объединяются в цветные синглеты [15]. Цветовое поле между кварками, глюонами и антикварками вытягивается в трубку. Причиной этому является наличие вакуумных полей в КХД, оказывающих внешнее давление на поле между кварками.

Стоит отметить, что в теории релятивистской струны в физике адронов обычно пренебрегают поперечным размером трубки цветового поля. Благодаря этому возможно использование математического аппарата, развитого в теории струн, однако есть указания на необходимость учета поперечного расширения поля для описания взаимодействия струн в плотной среде [16].

Действие Намбу-Гото для свободной релятивистской струны имеет вид [17]

$$S_{\text{string}} = -\kappa \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \int_{\tau_1(\sigma)}^{\tau_2(\sigma)} d\tau \sqrt{(x' \dot{x})^2 - x'^2 \dot{x}^2}, \quad (1.1)$$

где

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}, \quad x'_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}. \quad (1.2)$$

Здесь  $x_\mu(\tau, \sigma)$  – четырехмерный вектор координат струны,  $\tau$  – эволюционный параметр теории,  $\sigma$  – параметр, нумерующий точки струны,  $\kappa$  –

размерный параметр теории, отождествляемый с натяжением струны (используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ).

Артру и Меннессье [18] предложили простой закон для фрагментации струн: он приписывает постоянную вероятность  $P_0$  разрыва струны на единицу площади мирового листа

$$dP_{\text{break}} = P_0 dA \quad (1.3)$$

за счет образования пары кварк-антикварк (дикварк-антидикварк) из вакуума. Этот закон, который обычно называют законом площади, является обобщением закона радиоактивного распада, где вероятность распада точечной частицы пропорциональна интервалу ее собственного времени, только здесь роль собственного времени играет инвариантная площадь  $A$ .

Для реализации закона площади необходимо вычислить координаты струны и их производные. Сначала получим уравнения движения релятивистской струны, следующие из действия (1.1). Определим Лагранжиан струны

$$\mathcal{L} = -\kappa \sqrt{(x'\dot{x})^2 - x'^2 \dot{x}^2}. \quad (1.4)$$

Приравнивая к нулю вариацию действия (1.1), получаем уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right) = 0, \quad \tau, \sigma \in \Omega, \quad (1.5)$$

где  $\Omega$  - область изменения параметров  $\tau, \sigma$ , и граничные условия

$$\int_{C_1+C_2} \delta x^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $C_1(\tau), C_2(\tau)$  - границы области  $\Omega$ , определяющие пределы изменения параметра  $\sigma$ . Подстановка Лагранжиана (1.4) в (1.5) дает выражение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{(\dot{x}x') x'_\mu - x'^2 \dot{x}_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{(\dot{x}x') \dot{x}_\mu - \dot{x}^2 x'_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Пытаться разрешить уравнения (1.7) в лоб, разумеется, неразумно.

Вместо этого используют тот факт, что действие релятивистской струны (1.1) инвариантно относительно произвольных преобразований параметров  $\tau, \sigma$ . Такой произвол позволяет наложить на решения системы уравнений (1.7) два дополнительных условия. Обычно они выбираются в следующем виде:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0. \quad (1.8)$$

С геометрической точки зрения условия (1.8) означают, что на мировой поверхности струны выбрана изометрическая или конформная система криволинейных координат  $\tau, \sigma$ . В теории релятивистской струны эти условия называют ортонормальной калибровкой (ОНК).

Использование ОНК сильно упрощает уравнения движения (1.7)

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0 \quad (1.9)$$

и граничные условия (1.6)

$$x'_\mu + \dot{x}_\mu \dot{\sigma}(\tau) = 0, \quad \tau, \sigma \in C_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.10)$$

Обычно в теории релятивистской струны выбирают, что  $\sigma \in [0, \pi]$ . Тогда граничные условия (1.10) приобретают привычный вид граничных условий для струны со свободными концами

$$x'_\mu(\tau, 0) = x'_\mu(\tau, \pi) = 0. \quad (1.11)$$

Предположим теперь, что известны функции  $x_\mu(0, \sigma) = \rho_\mu(\sigma)$ ,  $\dot{x}_\mu(0, \sigma) = v_\mu(\sigma)$ ,  $\sigma \in [0, \pi]$  (здесь и далее будут использоваться такие же обозначения и вид формул, как в трудах Б. М. Барбашова и В. В. Нестеренко [19]). Тогда получаем следующую постановку задачи на координаты конечной открытой релятивистской струны со свободными концами:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\mu - x''_\mu &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad \tau > 0; \\ x'_\mu(\tau, 0) &= x'_\mu(\tau, \pi) = 0; \\ x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma), \quad \dot{x}_\mu(0, \sigma) = v_\mu(\sigma). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решение задачи Коши методом Фурье дает следующее выражение

[19] (см. Приложение А):

$$x_\mu(\tau, \sigma) = Q_\mu + P_\mu \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{-in\tau} \frac{\alpha_{n\mu}}{n} \cos(n\sigma), \quad (1.13)$$

где  $P_\mu$  и  $Q_\mu$  - нулевые члены в разложении.  $P_\mu$  в ОНК (1.8) определяется формулой

$$P_\mu = \kappa \int_0^\pi \dot{x}_\mu(0, \sigma) d\sigma = \kappa \int_0^\pi v_\mu(\sigma) d\sigma \quad (1.14)$$

и, в случае, если область  $\Omega$  ограничена кривыми  $\tau_i(\sigma) = \tau_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ , он равен сохраняющемуся полному импульсу струны.  $Q_\mu$  есть координаты центра масс струны в момент  $\tau = 0$ ,

$$Q_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x_\mu(0, \sigma) d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho_\mu(\sigma) d\sigma. \quad (1.15)$$

Фурье-амплитуды  $\alpha_{n\mu}$  вычисляются следующим образом

$$\alpha_{n\mu} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma) (v_\mu(\sigma) - in\rho_\mu(\sigma)), \quad n > 0, \quad \alpha_{-n\mu} = (\alpha_{n\mu})^*. \quad (1.16)$$

Отметим, что величина  $x_\mu(\tau, \sigma)$  является действительной. Поэтому формулу для вычисления координат струны (1.13) можно переписать как

$$x_\mu(\tau, \sigma) = Q_\mu + P_\mu \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{2}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(n\tau) \text{Re}\alpha_{n\mu} - \cos(n\tau) \text{Im}\alpha_{n\mu}) \cos(n\sigma). \quad (1.17)$$

Мы избавились от мнимых величин в этой формуле и, кроме того, от необходимости суммировать по отрицательным значениям  $n$ .

Отметим некоторые формулы для основных характеристик струны. Масса релятивистской струны определяется как

$$M^2 = P_\mu P^\mu. \quad (1.18)$$

Классическое выражение для спина струны имеет вид

$$J^2 = \frac{1}{2} \left( S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - \frac{2}{M^2} P_\nu S^{\nu\rho} P^\sigma S_{\sigma\rho} \right), \quad (1.19)$$

где

$$S_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\alpha_{-n\mu}\alpha_{n\nu} - \alpha_{-n\nu}\alpha_{n\mu}}{n} \quad (1.20)$$

есть часть углового момента струны, обусловленная внутренним движением. Эти величины определяются, исходя лишь из начальных условий и, разумеется, сохраняются. Стоит обратить отдельное внимание на то, что, если струна не обладает начальным растяжением, величина  $J$  по определению обязана быть нулевой.

Из (1.17) легко получить выражение для  $\dot{x}_\mu$ :

$$\dot{x}_\mu(\tau, \sigma) = \frac{P_\mu}{\pi\kappa} + \frac{2}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{n=1}^{\infty} n [\cos(n\tau)\text{Re}\alpha_{n\mu} + \sin(n\tau)\text{Im}\alpha_{n\mu}] \cos(n\sigma). \quad (1.21)$$

Инвариантная площадь мировой поверхности, заметаемой струной, выражается в ОНК (1.8) следующим образом:

$$A(\tau) = \kappa \int_0^\tau d\tau' \int_0^\pi d\sigma (\dot{x}_\mu(\tau', \sigma))^2, \quad (1.22)$$

где  $\dot{x}_\mu(\tau, \sigma)$  вычисляется согласно (1.21).

## 1.2 Релятивистская струна с массами на концах

Моделируя бесцветную систему кварк-антикварк (кварк-дикварк) при помощи свободной релятивистской струны Намбу-Гото, мы пренебрегли массами кварков. Это приближение допустимо для легких ароматов, для  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков, скорость движения которых мало отличается от скорости света. Это приближение, однако, не применимо для тяжелых  $c$ - и  $b$ -кварков, для которых  $m^2/\kappa \gg 1$ , если взять  $\kappa \approx 0.2 \text{ ГэВ}^2$ , что соответствует современному измеренному значению наклона траектории Редже.

Введение масс кварков в теорию струны проблематично по многим причинам. Для начала, не ясно даже, какие массы кварков брать: массу «голого» кварка или с учетом «шубы». Фактически массы кварков являются параметрами модели, однако, как будет показано далее, в теории с массивными кварками на удивление оказывается легче работать с больши-

ми массами, чем с малыми.

Во-вторых, введение массы в модель нарушает многие изначальные допущения, на которых строились известные модели адронизации. К примеру, процесс фрагментации уже нельзя рассматривать как симметричный относительно концов струны. В RUTHIA для описания струн с тяжелыми кварками используется модификация Боулера [20]. Примечательно, что непосредственно в руководстве к программе оговаривается, что введение масс нарушает изначальные постулаты LUND-модели. К тому же, подход Боулера развит лишь для одного пространственного измерения. В Caltech-II для учета массы кварков к струне добавляются нефизические сегменты, чтобы удовлетворить граничным условиям. Такой формализм выглядит излишне искусственным, к тому же этот подход не в состоянии описывать начально-протяженные струны.

Тем не менее, массу кварков можно ввести исходя из первых принципов теории струны Намбу-Гото, а именно начиная с действия. Перед тем, как начать, отметим, что ни заряд, ни масса кварков не вводятся как распределенные по струне величины из-за требования репараметризационной инвариантности действия. Поэтому их приходится помещать точечно в концы струны.

Действие релятивистской струны с массами на концах записывают следующим образом [19]:

$$S_{\text{string}} = -\kappa \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} - \sum_{i=1}^2 m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left( \frac{dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} \right)^2}, \quad (1.23)$$

где  $m_1, m_2$  - массы на концах струны,  $\frac{dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} = \dot{x}_\nu(\tau, \sigma_i(\tau)) + x_\nu(\tau, \sigma_i(\tau))\dot{\sigma}_i(\tau)$ , функции  $\sigma_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , описывают движение концов струны в плоскости параметров  $\tau, \sigma$ .

Варьирование  $x_\mu(\tau, \sigma)$  в (1.23) дает уравнения движения и граничные условия. Снова вводя ОНК (1.8), получаем, что уравнения движения

совпадают со случаем свободной струны:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0. \quad (1.24)$$

Варьирование функций  $\sigma_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , не дает новых уравнений. Поэтому, без потери общности, их можно положить равными константам:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \pi$ . С учетом этого, граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= x'_\nu, \quad \sigma = 0, \\ \mu_2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= -x'_\nu, \quad \sigma = \pi. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь  $\mu_1 = m_1/\kappa$ ,  $\mu_2 = m_2/\kappa$ . Нелинейность граничных условий является основной трудностью теории струны с массами на концах, не позволяющей найти точное решение в произвольном случае. Можно, однако, ограничиться такими движениями струны, для которых параметр  $\tau$  является собственными временем на концах струны, то есть потребовать выполнения условия

$$\dot{x}^2(\tau, 0) = m_1^{-2}, \quad \dot{x}^2(\tau, \pi) = m_2^{-2}. \quad (1.26)$$

Тогда граничные условия (1.25) линеаризуются:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\nu(\tau, 0) &= q_1 x'_\nu(\tau, 0), \\ \ddot{x}_\nu(\tau, \pi) &= -q_2 x'_\nu(\tau, \pi), \\ q_1 &= \frac{\kappa}{m_1^2}, \quad q_2 = \frac{\kappa}{m_2^2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Решением задачи о движении релятивистской струны с массами на концах, описываемого волновым уравнением (1.24) и удовлетворяющего граничным условиям (1.27) является ряд Фурье (см. Приложение В)

$$x^\mu(\tau, \sigma) = C_0^\mu \tau + D_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^\mu \sin(\omega_n \tau) + D_n^\mu \cos(\omega_n \tau)] u_n(\sigma), \quad (1.28)$$

в котором коэффициенты  $D_n^\mu$ ,  $C_n^\mu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , рассчитываются при



помощи формул

$$\begin{aligned}
D_0^\mu &= \frac{\int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)\xi(\sigma)d\sigma}{\|u_0\|^2}, \\
C_0^\mu &= \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma)\xi(\sigma)d\sigma}{\|u_0\|^2}, \\
D_n^\mu &= \frac{\int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)u_n(\sigma)\xi(\sigma)d\sigma}{\|u_n\|^2}, \\
C_n^\mu &= \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma)u_n(\sigma)\xi(\sigma)d\sigma}{\omega_n \|u_n\|^2}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь  $\|u_n\|^2$  - квадрат нормы собственной функции задачи Штурма-Лиувилля. Существенным отличием случая струны с массами на концах является тот факт, что собственные значения  $\omega_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , теперь необходимо находить численными методами, поскольку они являются корнями трансцендентного уравнения (см. Приложение В).

Не стоит забывать и про то, что теперь инвариантная площадь мировой поверхности струны, используемая в законе площади (1.3), вычисляется с учетом движения массивных концов струны. Поскольку мы выбрали для линеаризации граничных условий требование (1.26), то для инвариантной площади получается выражение

$$A(\tau) = \kappa \int_0^\tau d\tau' \int_0^\pi d\sigma (\dot{x}_\mu(\tau', \sigma))^2 + \tau N_{\text{massive}}, \tag{1.30}$$

где  $N_{\text{massive}}$  - число массивных кварков на струне, соответственно 0 (тогда имеем случай свободной струны), 1 или 2.

# ГЛАВА 2.

## ОБОБЩЕННЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ КВАРК-ГЛЮОННЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТРУН

### 2.1 Выбор калибровки для свободной струны

Теория релятивистской струны, приводящая к уравнениям движения (1.9) и граничным условиям (1.11) или (1.27), не дает, однако, представления о виде начальных условий задачи Коши для релятивистской струны, формируемой из партонов в процессе адронизации. Известны лишь ограничения, накладываемые на функции начальных данных. В остальном, функции, задающие начальные условия, являются модельным произволом и тесно связаны с вопросом калибровки в теории струны.

Дело в том, что наложение условий ОНК (1.8) не фиксирует окончательно параметры  $\tau$ ,  $\sigma$ . Действительно, какие значения параметра  $\tau$  нужно подставлять в формулу (1.17)?

Определение связи между параметром  $\tau$  для каждой точки струны  $\sigma$  и временем  $t = x_0(\tau, \sigma)$  называют выбором калибровки. С точки зрения задания функций начальных условий это означает выбор конкретного вида функций  $\rho_\mu(\sigma) = x_\mu(0, \sigma)$ ,  $v_\mu(\sigma) = \dot{x}_\mu(0, \sigma)$ . Но прежде всего стоит обсудить интерпретацию параметра  $\tau$  и времени  $t = x_0(\tau, \sigma)$ .

Представляется естественным считать, что  $\tau$  есть безразмерное собственное время точки струны с координатой  $\sigma$ , а  $t = x_0(\tau, \sigma)$  - время в системе отсчета, в которой заданы импульсы партонов (будем называть ее лабораторной системой отсчета, ЛСО). Необходимо, однако, учитывать особенности, возникающие при таком подходе. Дело в том, что в общем случае время в ЛСО зависит от параметра  $\sigma$ :  $t = x_0(\tau, \sigma)$ . Это значит,

что фиксированному времени в ЛСО соответствует не единственное значение параметра  $\tau$ , а определенная функция  $\tau(t, \sigma)$ , которая есть обратная функция координаты  $x_0(\tau, \sigma)$  (1.17).

Как следствие, величина  $P_\mu$ , определенная в (1.14), больше не является сохраняющимся во времени полным импульсом струны. Чтобы заново определить сохраняющиеся величины, вновь обратимся к действию (1.1). Инвариантность действия (1.1) по отношению к преобразованиям Пуанкаре приводит к наличию сохраняющихся величин [19]: полного импульса струны

$$\mathcal{P}_\mu = - \int_T \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) \quad (2.1)$$

и тензора полного углового момента движения струны

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = - \int_T \left[ x_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\nu} d\tau \right) - x_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) \right]. \quad (2.2)$$

В ортонормальной калибровке (1.8)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\kappa \dot{x}_\mu, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} = \kappa x'_\mu.$$

Поэтому получаем следующие выражения

$$\mathcal{P}_\mu = \kappa \int_T (\dot{x}_\mu d\sigma + x'_\mu d\tau), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \kappa \int_T [(x_\mu \dot{x}_\nu - \dot{x}_\mu x_\nu) d\sigma + (x_\mu x'_\nu - x'_\mu x_\nu) d\tau]. \quad (2.5)$$

Пусть граница  $T$  задана функцией  $\tau = \tau(t, \sigma)$ , которая определяется условием  $\tau(t, \sigma) = x_0^{-1}(t, \sigma)$  при фиксированном времени в ЛСО. Тогда, окончательно

$$\mathcal{P}_\mu = \kappa \int_0^\pi (\dot{x}_\mu + x'_\mu \tau'(\sigma)) d\sigma, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \kappa \int_0^\pi [(x_\mu \dot{x}_\nu - \dot{x}_\mu x_\nu) + (x_\mu x'_\nu - x'_\mu x_\nu) \tau'(\sigma)] d\sigma. \quad (2.7)$$

Вычисление величин согласно (2.6), (2.7) более трудоемкая, но по-прежнему поддающаяся автоматизации задача.

В такой трактовке, однако, не ясно, как задавать начальные условия и постановку задачи для дочерних струн. Поскольку их полный импульс тоже должен вычисляться с учетом (2.6), не получится избавиться от функции  $\tau(t, \sigma) = x_0^{-1}(t, \sigma)$  в начальный момент времени, что, в случае свободной струны, приводит к следующей постановке задачи:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\mu - x''_\mu &= 0, \quad \tau > \tau_0(t_{\text{break}}, \sigma) = x_0^{-1}(t_{\text{break}}, \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]; \\ x'_\mu(\tau, 0) &= x'_\mu(\tau, \pi) = 0; \\ x_\mu(\tau_0(t_{\text{break}}, \sigma), \sigma) &= \rho_\mu(\sigma) = x_\mu^{\text{mother}}(\tau_0(t_{\text{break}}, \sigma), \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}], \\ \dot{x}_\mu(\tau_0(t_{\text{break}}, \sigma), \sigma) &= v_\mu(\sigma) = \dot{x}_\mu^{\text{mother}}(\tau_0(t_{\text{break}}, \sigma), \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Значительно проще оказывается использовать другую интерпретацию  $\tau$  и  $t = x_0(\tau, \sigma)$ , согласно которой  $\tau$ , наоборот, пропорционально времени в ЛСО, а  $t$  есть собственное время точек струны. Тогда момент разрыва струны определяется значением  $\tau_{\text{break}}$ . Начальные условия для дочерней струны есть просто

$$\begin{aligned} x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma) = x_\mu^{\text{mother}}(\tau_{\text{break}}, \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}], \\ \dot{x}_\mu(0, \sigma) &= v_\mu(\sigma) = \dot{x}_\mu^{\text{mother}}(\tau_{\text{break}}, \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Постановка и решение задачи о движении релятивистской струны, заданной на произвольном интервале  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$  описаны в Приложении С.

Теперь определим калибровку (или, что эквивалентно, функциональный вид начальных условий). Наиболее наглядно движение релятивистской струны представляется, если параметр  $\tau$  пропорционален времени  $t$ . Такую калибровку называют статической и записывают обычно в следующем виде:

$$(nx) = \lambda\tau, \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{2.10}$$

где  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности, а  $n_\mu$  – единичный времениподобный вектор.

В случае статической калибровки собственное время  $t$  и параметр  $\tau$  связаны линейным образом. Очевидно, что это накладывает серьезные

ограничения на вид начальных данных задачи Коши: функция  $v_0(\lambda)$  обязана быть постоянной величиной. Поскольку распределенный импульс струны  $p_\mu(\tau, \sigma)$  есть

$$p_\mu(\tau, \sigma) = \kappa \dot{x}_\mu(\tau, \sigma), \quad (2.11)$$

начальные данные в импульсном виде представляют собой

$$\tilde{p}_\mu(\sigma) = p_\mu(0, \sigma) = \kappa \dot{x}_\mu(0, \sigma) = \kappa v_\mu(\sigma). \quad (2.12)$$

Распределенная энергия струны  $p_0(0, \sigma)$  является постоянной величиной и есть полная энергия струны, деленная на  $\pi$ .

Статическая калибровка используется во всех моделях, в которых фрагментация струн описывается законом площади (1.3). Обычно считают, что в статической калибровке распределенный импульс струны является кусочно-постоянной функцией. Вдобавок к этому, модели оперируют начально-точечными струнами, постулируя  $\rho_\mu(\sigma) = 0$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ . Это позволяет трактовать партоны на струне как «кинки» (точечно приложенные импульсы), приписывая постоянное значение скорости  $v_i$ , приходящееся на условный отрезок  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

Возникает вопрос о применимости такого предположения. Во-первых, неясно, что представляет собой точечная релятивистская струна. Потенциал цветового поля между партонами, приводящий к конфайнменту, преобладает начиная лишь с определенных пространственных масштабов. Поэтому открытым вопросом остается применимость действия Намбу-Гото (1.1) и уравнений движений (1.9) для описания бесцветной системы партонов на малых расстояниях.

Во-вторых, представление о струне, как о разлетающихся из одной точки в противоположных направлениях кварке и антикварке, хорошо моделирует электрон-позитронные столкновения, которые удалось успешно описать ранними струнными моделями [9]. Однако пространственная картина адронных взаимодействий высоких энергий предполагает более сложное размещение партонов на струне и их относительное движение, как показано на рисунке 2.1.

Для пространственно-протяженных струн задание начального распределенного импульса в виде кусочно-постоянной функции приводит к

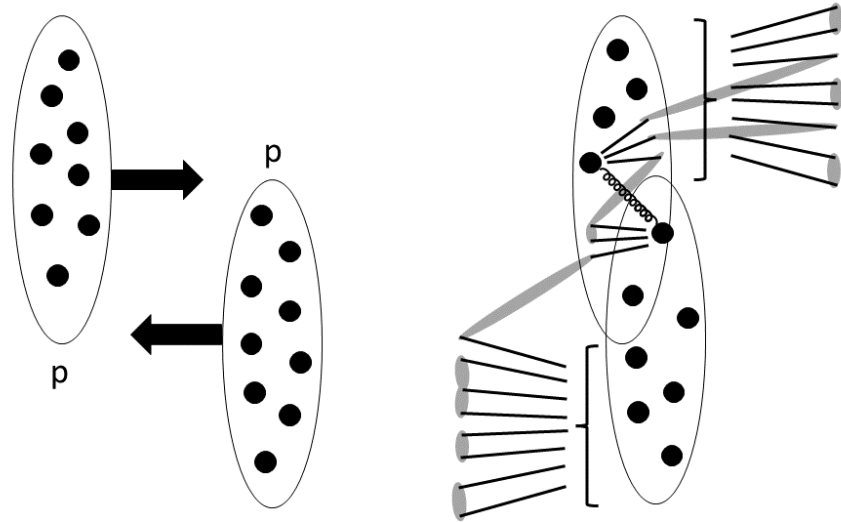


Рисунок 2.1 — Схематичная картина высокоэнергетического протон-протонного взаимодействия. Закрашенными кружочками показаны партоны – валентные кварки, кварки, антикварки и глюоны моря. Линии обозначают партоны, образовавшиеся в результате развития партонного ливня, серыми областями изображены трубки цветового поля, соединяющие партоны в струны

тому, что бесконечно близкие точки трубки цветового поля изначально движутся с разными скоростями, как будто между ними нет взаимодействия. Реалистичным является задание струны с переменной плотностью импульса  $\tilde{p}_\mu(\sigma)$ . Кроме того, поскольку дочерние струны образуются в случайный момент времени и начальными данными для них служит конфигурация струны в момент разрыва, удовлетворять приближению точечных струн с кинками они не могут.

Обобщим способ задания начальных условий в статической калибровке для начально-протяженных релятивистских струн. Прежде всего необходимо понять, каким требованиям должны отвечать функции, описывающие начальную форму струны и скорость ее точек. Учитывая (2.12), можно работать не с функцией скорости, а с функцией распределенного импульса

струны. Тогда ясно, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi p_\mu(0, \sigma) d\sigma &= P_\mu = \sum_{i=1}^N p_\mu^i, \\ p_0(0, \sigma) &\geq 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \\ p_\mu(0, \sigma) p^\mu(0, \sigma) &\geq 0, \quad \sigma \in [0, \pi]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Первое уравнение является условием сохранения энергии-импульса: полная энергия и импульс струны должны быть равны суммарной энергии и импульсу системы из  $N$  партонов, которые объединились в струну. Требование положительности функции, задающей нулевую компоненту  $p_0(0, \sigma)$  обеспечивает положительную энергию произвольного фрагмента струны, а последнее неравенство есть требование времениподобности струны: квадрат массы струны или ее частей должен быть положительной величиной. Необязательным, но желательным требованием на начальные условия является их непрерывность. Как будет показано далее, добиться непрерывности возможно в случае свободной струны, но не получается в общем случае струны с массами на концах. Что касается функций  $\rho_\mu(\sigma)$ , то должно выполняться  $\rho_0(\sigma) \geq 0$ ,  $\sigma \in [0, \pi]$ .

Попробуем сначала получить начальные условия для статической калибровки, то есть в случае, когда нулевая компонента  $\tilde{p}_0(\sigma)$  является постоянной величиной. Для возможности нанесения произвольного количества глюонов на струну разумно использовать кусочно-линейные функции: тогда функция  $\tilde{p}^j(\sigma)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , задающая начальный распределенный импульс струны, будет непрерывна на всем интервале  $[0, \pi]$ . Появляется необходимость учитывать потенциальную энергию цветового поля между разнесенными партонами; это приходится учитывать в начальном условии на нулевую компоненту  $\tilde{p}^0(\sigma)$ . В итоге, получаем следующий вид начальных данных:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^j(\sigma) &= \cup \tilde{p}_i^j(\sigma); \\
\tilde{p}_i^j(\sigma) &= \frac{2(N-1)}{\pi} \left( \frac{p_{i+1}^j \xi_{i+1} - p_i^j \xi_i}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} (\sigma - \sigma_i) + p_i^j \xi_i \right), \quad \sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]; \\
\tilde{p}^0(\sigma) &= \frac{1}{\pi} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (p_i^0 + \kappa |\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}|) + p_N^0 \right); \\
\tilde{\rho}^j(\sigma) &= \cup \tilde{\rho}_i^j(\sigma); \\
\tilde{\rho}_i^j(\sigma) &= \frac{\tilde{x}_{i+1}^j - \tilde{x}_i^j}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} (\sigma - \sigma_i) + \tilde{x}_i^j, \quad \sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]; \\
\rho^0(\sigma) &= 0; \\
\sigma_i &= \frac{\pi}{N-1} (i-1), \quad i = 1, \dots, N; \\
\xi_i &= 1, \quad i = 1, N, \quad \xi_i = \frac{1}{2}, \quad i = 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь  $N$  – число партонов на струне,  $N \geq 2$ ,  $p_i^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ , – импульсы партонов,  $\tilde{x}_i^j$ ,  $j = 1, 2, 3$  – их координаты, индекс  $i$  нумерует партоны на струне,  $i = 1, \dots, N$ . Функции  $\tilde{p}^j(\sigma)$ ,  $\tilde{\rho}^j(\sigma)$ , заданные на всем интервале значений  $\sigma \in [0, \pi]$  получаются объединением функций  $\tilde{p}_i^j(\sigma)$ ,  $\tilde{\rho}_i^j(\sigma)$ , заданных на интервале  $\sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ . Необходимость введения коэффициентов  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , объясняется тем, что энергия и импульс глюонов распределяется между двумя участками струны, а у кварков – только на один.

При задании начального импульса согласно (2.14) скорость точек струны линейно меняется от партона к партону и выполняется условие

$$\int_0^\pi \tilde{p}_j(\sigma) d\sigma = P^j = \sum_{i=1}^N p_i^j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2.15}$$

Несмотря на свою наглядность, статическая калибровка с кусочно-линейными начальными данными (2.14) имеет один существенный недостаток. Дело в том, что хотя для струны, заданной таким образом, выполняется условие

$$M_{\text{string}}^2 = E_{\text{string}}^2 - P_{\text{string}}^2 = \left( \int_0^\pi p_\mu(\tau, \sigma) \right)^2 \geq 0, \tag{2.16}$$



оно вовсе не обязано выполняться для фрагментов струны, т.е. выражение

$$M_{\text{fragm}}^2 = \left( \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} p_\mu(\tau, \sigma) \right)^2 \quad (2.17)$$

может принимать любой знак. Это легко продемонстрировать на простейшей струне, состоящей из трех безмассовых партонов: кварка, глюона и антикварка, разлетающихся из одной точки. Пусть кварк летит вдоль оси  $z$  с импульсом 1 ГэВ, а антикварк - с импульсом -1 ГэВ. Глюон вылетает с импульсом 1 ГэВ вдоль оси  $x$ . Тогда характеристики струны следующие: полный импульс струны  $\vec{P} = (1, 0, 0)$  ГэВ,  $E_{\text{string}} = 3$  ГэВ,  $M_{\text{string}} = \sqrt{8}$  ГэВ. Функциональный вид распределенного начального импульса  $\tilde{p}^j(\sigma)$  и энергии  $\tilde{p}^0(\sigma)$  показаны на рисунке 2.2.

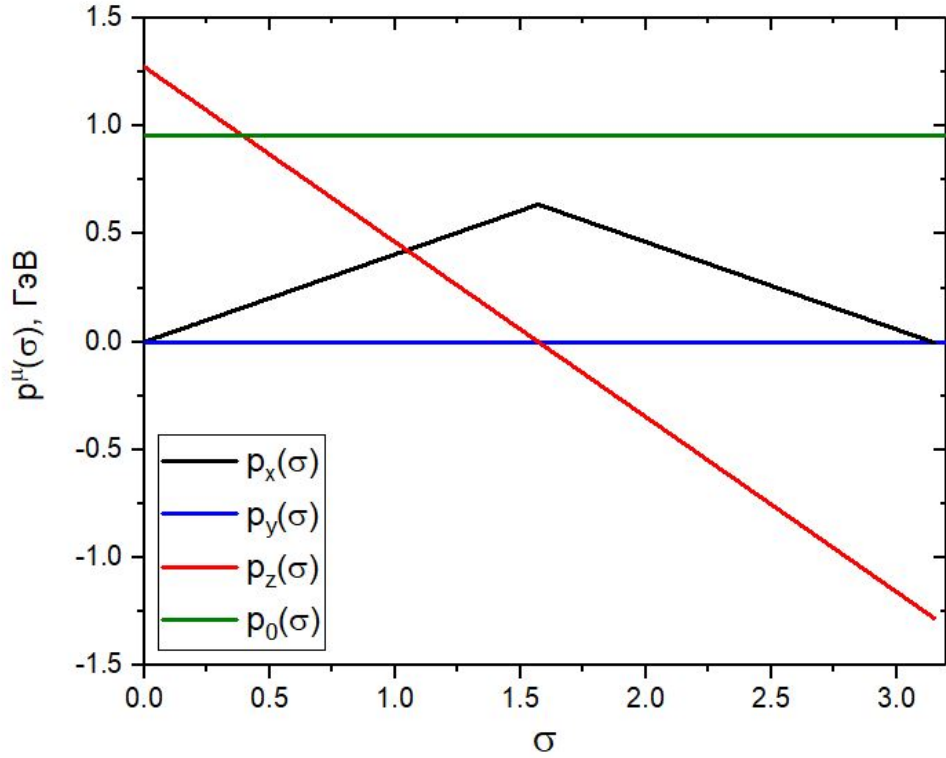


Рисунок 2.2 — Графики распределенного начального импульса и энергии струны

Видно, что при малых  $\sigma$  величина распределенного импульса по модулю больше, чем распределенной энергии из-за коэффициента  $\frac{2(N-1)}{\pi}$  в (2.14), который нужен для нормировки на полный импульс струны. Значит, величина (2.17), вычисленная в этих пределах, будет пространственноподобной, то есть  $M_{\text{fragm}}^2 < 0$ . Такой фрагмент не может быть отождествлен

с новой струной, образовавшейся после разрыва исходной.

Поскольку нет физических соображений, из которых следовало бы такое ограничение на возможную точку разрыва струны, не остается ничего, кроме как признать такую калибровку иррелевантной. Конечно, можно попытаться обойти эту проблему, перераспределяя импульс вдоль струны, так, чтобы значение квадрата распределенного 3-импульса струны не превышало квадрат распределенной энергии на всем интервале значений параметра  $\sigma$ . Однако, физические основания для такого трюка, опять-таки, отсутствуют, поэтому необходимо перейти к другому способу задания начальных условий.

Описанная проблема исчезает, если начальная распределенная энергия струны тоже задается кусочно-линейной функцией:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^\mu(\sigma) &= \cup \tilde{p}_i^\mu(\sigma); \\
\tilde{p}_i^\mu(\sigma) &= \frac{2(N-1)}{\pi} \left( \frac{p_{i+1}^\mu \xi_{i+1} - p_i^\mu \xi_i}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} (\sigma - \sigma_i) + p_i^\mu \xi_i \right), \quad \sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]; \\
\tilde{\rho}^j(\sigma) &= \cup \tilde{\rho}_i^j(\sigma); \\
\tilde{\rho}_i^j(\sigma) &= \frac{\tilde{x}_{i+1}^j - \tilde{x}_i^j}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} (\sigma - \sigma_i) + \tilde{x}_i^j, \quad \sigma \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]; \\
\rho^0(\sigma) &= 0; \\
\sigma_i &= \frac{\pi}{N-1} (i-1), \quad i = 1, \dots, N; \\
\xi_i &= 1, \quad i = 1, N, \quad \xi_i = \frac{1}{2}, \quad i = 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь используются те же обозначения, что и для (2.14),  $p_i^0 = p_{\text{parton},i}^0 + p_{\text{QCD},i}^0$ . Поскольку такой вид начальных условий приводит к тому, что собственное время  $t$  зависит от  $\tau$  как  $t \propto \tau^2$ , такую калибровку можно назвать квадратичной.

## 2.2 Начальные условия для струны с массами на концах

Вывод функций, задающих начальные условия задачи Коши для струны с массивными кварками на концах оказывается довольно непростой задачей. Все дело в двух нелинейных условиях (1.26), которые необходимы для линеаризации граничных условий задачи (1.25).

Рассмотрим сначала струну без глюонов, то есть число партонов на ней  $N = 2$ . Для определенности будем считать, что в конец струны  $\sigma = 0$  помещается кварк с массой  $m_1$ , а в точку  $\sigma = \pi$  - с массой  $m_2$ . Здесь снова есть два возможных случая: оба кварка на концах могут быть тяжелыми, либо массивным является лишь один кварк. Случай, когда оба кварка - массивные, оказывается самым трудным, и его мы рассмотрим в первую очередь.

Для функций начального распределенного импульса  $p_\mu(\sigma)$  струны с массами на концах должно выполняться:

$$\int_0^\pi p^\mu(\sigma) d\sigma = P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu, \quad (2.19)$$

$$p_0(\sigma) \geq 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (2.20)$$

$$p_\mu(\sigma)p^\mu(\sigma) \geq 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (2.21)$$

$$p_\mu^2(0) = \frac{\kappa^2}{m_1^2}, \quad p_\mu^2(\pi) = \frac{\kappa^2}{m_2^2}. \quad (2.22)$$

Будем искать начальные условия в виде

$$p_\mu(\sigma) = \frac{A_\mu - B_\mu}{\pi} \sigma + B_\mu. \quad (2.23)$$

Запись линейной функции в таком виде позволяет получить  $p_\mu(0) = B_\mu$ ,  $p_\mu(\pi) = A_\mu$ , что несколько упростит дальнейшие выкладки.

Подстановка (2.23) в (2.19) приводит к линейной связи между коэффициентами  $A_\mu$  и  $B_\mu$ :

$$aA_\mu + bB_\mu = P_\mu, \quad a = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{q_2}, \quad b = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{q_1}. \quad (2.24)$$

Из условия (2.20) следует, что  $A_0 \geq 0$  и  $B_0 \geq 0$ . Далее, учитывая (2.24), из условия  $B_0 = b^{-1}(P_0 - aA_0) \geq 0$  получаем, что  $A_0 \leq P_0/a$ .

Подставляя (2.23) в (2.22), получаем

$$A^2 = \frac{\kappa^2}{m_2^2}, \quad B^2 = \frac{\kappa^2}{m_1^2}. \quad (2.25)$$

Подставляя выражение для коэффициентов  $B_\mu$  из (2.24) в (2.25), получим выражение для скалярного произведения  $A_\mu P^\mu \equiv (AP)$ :

$$(AP) = \frac{P^2 + \kappa^2 \left( \frac{a^2}{m_2^2} - \frac{b^2}{m_1^2} \right)}{2a} \equiv \mu. \quad (2.26)$$

Распишем по компонентно выражения для  $A^2$  и  $(AP)$ :

$$A^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = \frac{\kappa^2}{m_2^2}, \quad (2.27)$$

$$(AP) = A_0 P_0 - A_1 P_1 - A_2 P_2 - A_3 P_3 = \mu.$$

Имеющихся уравнений недостаточно для того, чтобы однозначно разрешить систему. Попробуем выразить две компоненты вектора  $A_\mu$  через  $P_\mu$  и установить ограничения на значения коэффициентов пропорциональности. Пусть  $A_0 = \zeta P_0/a$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $A_3 = \chi P_3$ . Здесь мы подразумеваем, что компонента полного импульса струны  $P_3 \neq 0$ , чтобы выражение для  $A_3$  имело смысл. Тогда (2.27) перепишем в виде

$$A_1^2 + A_2^2 = \left( \frac{\zeta}{a} P_0 \right)^2 - (\chi P_3)^2 - \frac{\kappa^2}{m_2^2} \equiv C_1, \quad (2.28)$$

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = \frac{\zeta}{a} P_0^2 - \chi P_3^2 - \mu \equiv C_2.$$

Величина  $C_1$  обязана быть неотрицательным числом. Считая компоненты  $P_1 \neq 0$ ,  $P_2 \neq 0$ , из второго уравнения в (2.28) выразим  $A_2$  через  $A_1$ :

$$A_2 = \frac{C_2 - A_1 P_1}{P_2}. \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в первое уравнение в (2.28), получим квадратное урав-

нение на коэффициент  $A_1$

$$(P_1 + P_2)^2 A_1^2 - 2C_2 P_1 A_1 + C_2^2 - C_1 P_2^2 = 0, \quad (2.30)$$

которое обязано иметь хотя бы одно решение, поэтому получаем условие

$$C_1 \geq \frac{C_2^2}{P_1^2 + P_2^2}. \quad (2.31)$$

Отметим, что условие (2.31) автоматически удовлетворяет требованию  $C_1 \geq 0$ .

Учтем ограничения на допустимые значения коэффициентов  $\zeta$ ,  $\chi$ . Из (2.28) для параметра  $\zeta$  следует, что

$$\zeta \geq \frac{\kappa a}{m_2 P_3}, \quad (2.32)$$

а для  $\chi$

$$\chi \leq \frac{1}{P_3} \sqrt{\frac{\zeta^2 P_0^2}{a^2} - \frac{\kappa^2}{m_2^2}}. \quad (2.33)$$

Объединяя условие (2.31) с условиями (2.32), (2.33) и требованием  $0 \leq \zeta \leq 1$ , получим систему неравенств на допустимые значения параметров  $\zeta$ ,  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa a}{m_2 P_3} &\leq \zeta \leq 1, \\ \chi &\leq \frac{1}{P_3} \sqrt{\frac{\zeta^2 P_0^2}{a^2} - \frac{\kappa^2}{m_2^2}}, \\ C_1 &\geq \frac{C_2^2}{P_1^2 + P_2^2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  определяются выражениями из (2.28).

К сожалению, разрешить систему (2.34) аналитически не удастся. Однако, поскольку достаточно найти любое значение параметров  $\zeta$ ,  $\chi$ , удовлетворяющее (2.34), возможно использование вычислительных мощностей для поиска методом перебора. Проблема заключается в том, что не ясно, при каких конфигурациях струны всегда возможно найти какое-либо решение. Как минимум, из (2.34) видно, что разрешить систему не удастся,

если

$$P_0 \leq \frac{\kappa a}{m_2}. \quad (2.35)$$

Тем не менее, для масс  $m_1$  и  $m_2$ , превышающих 0.6 ГэВ, подобрать параметры получается во всех пробованных конфигурациях. Возможно, решить описанные трудности удастся при использовании другого условия линеаризации граничных условий вместо (1.26), что, однако, может привести к неоднозначной интерпретации параметра  $\tau$  для массивных кварков. После определения коэффициентов  $\zeta$ ,  $\chi$ ,  $A_1$  находится из (2.30), а  $A_2$  из (2.29).

Теперь нужно оговорить случаи, когда компоненты полного импульса струны равны нулю. Если нулю равен только  $P_3$ , достаточно взять  $A_3 = 0$ . Если  $P_2 = 0$ ,  $A_2$  также берется равным нулю. Если одновременно  $P_1 = P_2 = 0$ , параметр  $\chi$  может принимать только одно значение:

$$\chi = \frac{\frac{\zeta}{a} P_0^2 - \mu}{P_3^2}, \quad (2.36)$$

условие (2.31) теряет смысл, а коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$  можно определить следующим образом:

$$A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{C_1}{2}}. \quad (2.37)$$

И наконец, если  $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ , произвола для параметра  $\zeta$  тоже не остается:

$$\zeta = \frac{\mu}{a P_0^2}, \quad (2.38)$$

а  $\chi$  снова определяется (2.36),  $A_1$ ,  $A_2$  из (2.37). Таким образом, мы определили способ вычислить коэффициенты  $A_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ . Коэффициенты  $B_\mu$  находятся из (2.24).

Рассмотрим теперь случай, когда один из кварков тяжелый, а другой - легкий, так что его массой можно пренебречь. Функции начальных условий задачи снова будем искать в виде (2.23). Вместо (2.22) остается только

$$P_\mu^2(0) = \frac{\kappa^2}{m_1^2}. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.23) в условия (2.19) - (2.21) и (2.39), получим

$$B^2 = \frac{\kappa^2}{m_1^2}, \quad (2.40)$$

$$aA_\mu + bB_\mu = P_\mu, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad b = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{q_1}, \quad (2.41)$$

$$A_0 \geq 0, \quad \frac{\kappa}{m_1} \leq B_0 \leq \frac{P_0}{b}. \quad (2.42)$$

Предположим, что  $A_\mu = \alpha P_\mu$ . Выражая  $B_\mu$  через  $A_\mu$  из (2.41) и подставляя это в (2.40) получим

$$B^2 = \frac{P^2}{b^2} (1 - a\alpha)^2 = \frac{\kappa^2}{m_1^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\kappa b}{m_1 M} \right), \quad (2.43)$$

где  $M = \sqrt{P^2}$  - масса струны. Из (2.42) следует

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\kappa b}{m_1 P_0} \right). \quad (2.44)$$

Легко видеть, что выражение (2.43) удовлетворяет (2.44) всегда, если  $M \geq \kappa b / m_1$ , то есть когда  $M > \frac{\kappa \pi}{2m_1} + m_1$ . Этому условию тоже легче удовлетворить, если масса  $m_1$  большая. Критерий «массивности» партона  $m_1 > 0.6$  ГэВ снова оказывается достаточным. Итак, формулы для коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \alpha P_\mu, \\ B_\mu &= \frac{P_\mu}{b} (1 - a\alpha), \\ \alpha &= \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\kappa b}{m_1 M} \right), \\ a &= \frac{\pi}{2}, \quad b = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{q_1}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для случая, когда  $m_1 = 0$ , а  $m_2 \neq 0$ , процедура аналогичная, поэтому

коэффициенты находятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_\mu &= \beta P_\mu, \\
 A_\mu &= \frac{P_\mu}{a} (1 - b\beta), \\
 \beta &= \frac{1}{b} \left( 1 - \frac{\kappa a}{m_2 M} \right), \\
 a &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{q_2}, \quad b = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

На этом вывод начальных условий для струны, не содержащей глюонов, завершен. Основной проблемой для случая, когда на струне между кварками на концах помещено произвольное количество глюонов, является то, что не удастся задать распределенный 4-импульс струны как непрерывную функцию. В остальном дело стоит за малым. Действительно, чтобы задать функции начальных условий на отрезке струны от кварка до первого глюона можно использовать выражения (2.45), а для участка от последнего глюона до кварка на другом конце - выражения (2.46). Для всех участков струны между глюонами, сколько бы их не было, можно использовать вид функций (2.18). В случае, если один из кварков на конце струны является легким, для этого участка струны также применим вид (2.18). Остается только учесть, что теперь в выражениях (2.45) или (2.46) величина  $P^\mu = p_1^\mu + \frac{1}{2}p_2^\mu$ , где  $p_1^\mu$  - 4-импульс кварка на конце, а  $p_2^\mu$  - импульс связанного с ним глюона, так как глюоны распределяют свою энергию и импульс между двумя участками струны.



# ГЛАВА 3.

## ГЕНЕРАТОР АДРОНИЗАЦИИ ATROPOS

### 3.1 Структура программы

Программа для фрагментации релятивистских кварк-глюонных струн была названа ATROPOS в честь старшей из трех сестер мойр в древнегреческой мифологии. Программа реализована на языке C++ на базе программного пакета ROOT [21].

В качестве входных данных генератор ATROPOS принимает партонные состояния, то есть набор кварков, антикварков, глюонов и осколков взаимодействия. На данный момент разработан интерфейс для сшивки с программой PYTHIA, которая применяется не только для генерирования партонных конфигураций, но и для описания распадов резонансов.

В пространстве имен ATROPOS определен класс Parton, олицетворяющий любой объект, который может восприниматься как партонное состояние. Для удобства и единообразия дикварк также существует в программе как объект класса Parton. Конструктор класса в общем случае выглядит следующим образом:

```
namespace ATROPOS
{
    class Parton
    {
        public:
        Parton(Double_t e, Double_t q, Int_t color,
              Int_t anticolor, Int_t flavour1, Int_t flavour2,
              Double_t px, Double_t py, Double_t pz,
              Double_t x, Double_t y, Double_t z);
    };
}
```

}

Любой объект класса `Parton` обладает цветом, антицветом, ароматом, зарядом, а также определенным 4-импульсом и вектором координат точки рождения. В программе используется условие количества цветов в КХД  $N_c = 3$ , обозначенных  $\{r, g, b\} = \{1, 2, 3\}$ . Антицвета отличаются знаком, значение 0 используется для обозначения бесцветного объекта либо как указание на отсутствие данного квантового числа. Например, для красного кварка параметр `color = 1`, а `anticolor = 0`. Ароматы в программе обозначены в соответствии с общепринятой нотацией  $\{g, d, u, s, c, b, t\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Для возможности определения дикварка как партона, существует характеристика `flavour2`, которая содержит аромат второго кварка. Для остальных партонов эта величина равна 0.

Релятивистская струна в `ATROPOS` представлена классом `RString`. При создании объекта класса `RString` необходимо передать в функцию-конструктор список партонов, которые соединяются КХД полем в струну. Для струн первого поколения (то есть тех, которые образовались из начальных партонных конфигураций, а не в результате фрагментации) начальные условия определяются согласно (2.18) на основании параметров партонов. Начальные условия для дочерних струн определяются согласно (2.9) после генерации точки разрыва. Все параметры струны, включая фурье-амплитуды, коэффициенты в функциях  $x_\mu(\tau, \sigma)$ ,  $\dot{x}_\mu(\tau, \sigma)$ ,  $x'_\mu(\tau, \sigma)$ , полный 4-импульс  $P_\mu$  и угловой момент  $J$ , вычисляются с помощью метода `RString::Initialize()`.

Функция инвариантной площади мировой поверхности струны требует значительных вычислительных затрат, поскольку ее значение в каждый момент  $\tau$  получается в результате двумерного интегрирования функции  $(\dot{x}_\mu(\tau', \sigma))^2$ , которая сама представляет собой числовой ряд. Поскольку для генерации случайной точки разрыва струны требуется многократно вычислять  $A(\tau)$ , вместо функции (1.22) на практике используется интерполяция, вычисленная в подходящем интервале значений  $\tau$ .

Для осуществления процедур подготовки, инициализации, фрагментации струн и расчета переходов струна-адрон используется класс `FragmentationManager`. Он обладает двумя основными методами: `FragmentationManager::RunFragmentation()` и

FragmentationManager::Hadronize(). Первый отвечает за описание последовательной фрагментации струн, второй - за расчет перехода от струны к адрону для дочерних струн. Класс FragmentationManager также руководит вводом-выводом в программе и хранит список адронов, образованных в событии.

Адроны в программе представлены классом Hadron, который содержит информацию об идентификационном коде частицы в соответствии со стандартом PDG [22], 4-импульсе адрона, его массе и кварковом составе. При инициализации программы создается таблица известных адронов, которые могут образоваться в результате адронизации. Полный список адронов и их параметры взяты из таблиц генератора PYTHIA и включает 271 частицу без учета античастиц.

Поскольку генератор ATROPOS не обладает встроенной процедурой для описания распадов резонансов, он использует интерфейс с PYTHIA для получения спектров стабильных частиц.

## 3.2 Рождение частиц

### 3.2.1 Генерация точек разрыва струны

Как уже говорилось выше, в основу модели фрагментации релятивистских кварк-глюонных струн Намбу-Гото ставится закон площади

$$\frac{dP_{\text{break}}}{dA} = P_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

Действуя по аналогии с законом радиоактивного распада, легко получить, что вероятность струны не распасться к моменту  $\tau$  есть

$$1 - P_{\text{break}}(\tau) = e^{-P_0 A(\tau)} = P_{\text{alive}}(\tau), \quad (3.2)$$

где  $A(\tau)$  вычисляется по формуле (1.22). Если разыграть случайное число по закону, определенным функцией  $P_{\text{alive}}(\tau)$ , получим случайное значение параметра  $\tau_r$ , соответствующее моменту разрыва,  $\tau_r \equiv \tau_{\text{break}}$ .

Для функций класса TF1, определенных в ROOT, существует встро-

енный метод розыгрыша случайной величины  $\text{TF1::Random}()$ . Благодаря этому в программе достаточно задать функцию  $P_{\text{alive}}(\tau)$  согласно (3.2), а затем применить метод  $\text{Random}()$  для получения значения  $\tau_{\text{break}}$ .

На следующем этапе разыгрывается случайная точка, в которой порвалась струна, определяемая координатой  $\sigma_{\text{break}}$ . Поскольку в закон площади координата  $\sigma$  не входит явно, каждая точка струны равнозначна. Поэтому можно воспользоваться равномерным распределением в пределах  $[0, \pi]$ .

Итак, процедура генерации четырехмерной координаты точки разрыва определена. Однако, поскольку в данном случае рассматриваются кварк-глюонные струны, обладающие партонами на концах и образующие в конечном итоге адроны с дискретным массовым спектром, в реальности процедура разрыва струны несколько сложнее.

Во-первых, струны-фрагменты не должны быть слишком легкими, чтобы стать адронами. Поэтому программа проверяет, не является ли масса потенциальной струны-фрагмента меньше, чем масса самого легкого адрона, содержащего кварк, который находится на конце струны. Дочерние струны должны унаследовать кварки на концах материнской струны, каждая по одному со своего конца. Если масса фрагмента оказывается слишком малой для того, чтобы стать хоть каким-то адроном, процедура генерации координаты разрыва  $\sigma_{\text{break}}$  запускается снова до тех пор, пока масса фрагментов не будет удовлетворять требуемому условию.

Однако кварк-глюонная струна рвется за счет рождения пары кварк-антикварк либо дикварк-антидикварк из КХД вакуума. А значит, необходимо сгенерировать случайную пару партон-антипартон, а затем разместить на концы дочерних струн, не занятые кварками от материнской струны, по одному партону из пары.

В модели задаются соответствующие вероятности для рождения той или иной пары:  $P_{u\bar{u}}$ ,  $P_{d\bar{d}}$ ,  $P_{s\bar{s}}$ ,  $P_{uu\bar{u}\bar{u}}$ ,  $P_{ddd\bar{d}}$ ,  $P_{ud\bar{u}\bar{d}}$ ,  $P_{su\bar{s}\bar{u}}$ ,  $P_{sd\bar{s}\bar{d}}$  и  $P_{ss\bar{s}\bar{s}}$ . Эти вероятности являются свободными параметрами модели и настраиваются под экспериментально измеренные выходы частиц.

В соответствии с вероятностями разыгрывается пара партон-антипартон. Однако, масса струны может оказаться недостаточной для того, чтобы образовать даже самый легкий адрон с данным кварковым составом. В этом

случае приходится генерировать пару заново, пока не будут подобраны подходящие ароматы кварков.

Лишь после этого создаются и инициализируются дочерние струны. Они передаются в процедуру `Hadronize()`, в которой алгоритм попытается отождествить образованные струны с адронами. Если у него это не получится, вся процедура генерации разрыва струны повторяется вновь. Алгоритм пытается осуществить фрагментацию до тех пор, пока количество попыток не превысит максимальное допустимое, после чего программа прервет попытки фрагментировать струну должным образом и принудительно сделает двухчастичный распад струны на два самых легких допустимых адрона.

Общая схема алгоритма генерации точки разрыва струны представлена на рисунке 3.1. Через  $m_h^{\min}$  и  $m_H^{\min}$  обозначены масса самого легкого адрона, содержащего кварк от материнской струны, и масса самого легкого адрона с тем же кварковым составом, что и у дочерней струны после розыгрыша пары кварк-антикварк.  $n_{\text{tries}}^{\max}$  - параметр, ограничивающий количество попыток на фрагментацию. В программе он взят  $n_{\text{tries}}^{\max} = 100$ .

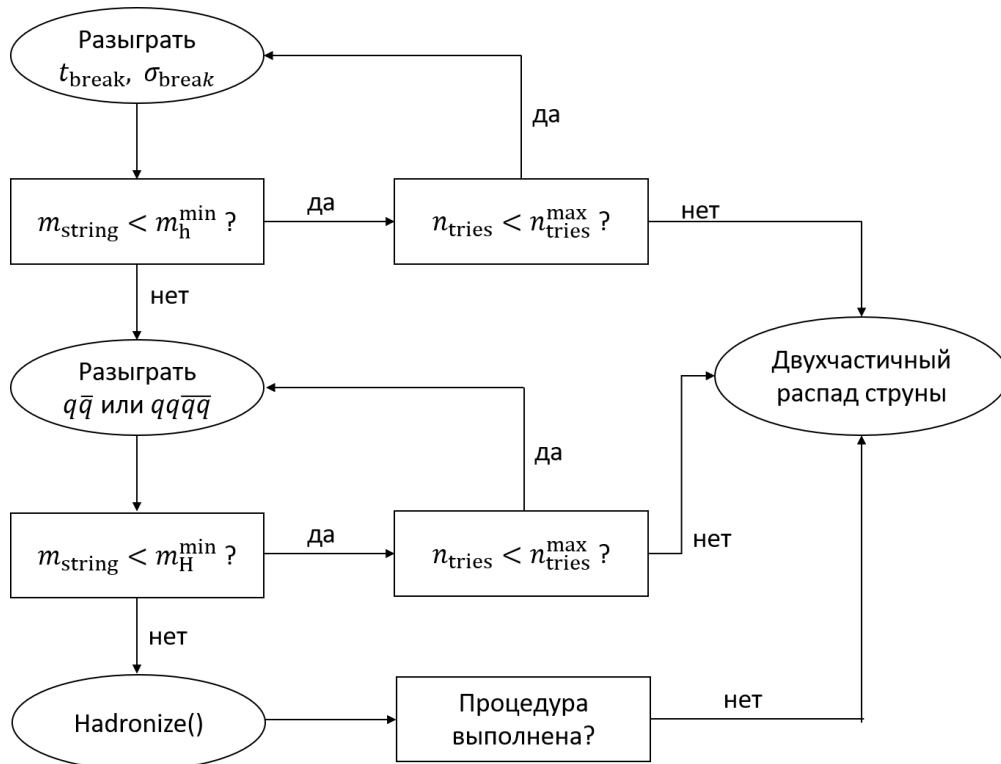


Рисунок 3.1 — Схема алгоритма фрагментации струны в генераторе ATROPOS

### 3.2.2 Переход струна-адрон

Полноценная реализация перехода струна-адрон требует квантования теории релятивистской струны. Завершенной и согласованной процедуры для квантования масс струны не существует. Поэтому модель будет неизбежно содержать некоторую параметризацию, описывающую рождение наблюдаемых адронов. Цель – ввести наиболее фундаментальный механизм рождения частиц с наименьшим количеством параметров и с как можно более слабой функциональной зависимостью от параметров, чтобы как можно меньше физики оказалось «спрятанной» внутри параметризации.

В генераторе ATROPOS в роли параметра, отвечающего за переход из состояния струны в адрон, выступает «допуск» на массу при переходе струна-адрон  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , (String-to-Hadron Mass Tolerance, SHMT). Параметризация работает просто: если масса струны лежит в диапазоне  $(1 - \varepsilon)m_h \leq m_{\text{string}} \leq (1 + \varepsilon)m_h$ , где  $m_h$  - наиболее близкая масса адрона с тем же кварковым составом, то она может стать этим адроном.

Возникает определенная трудность. Поскольку адроны в генераторе ATROPOS рождаются на массовой оболочке, переход от струны к адрону не будет удовлетворять сохранению энергии. Чтобы это исправить, в программе используется механизм «hadron-string shoving», то есть перераспределение энергии между образовавшимся адроном и второй струной-фрагментом через взаимодействие.

Коррекция энергии и импульсов адрона и струны осуществляется в три этапа. Первый - переход в систему центра масс (СЦМ) двух струн-фрагментов до отождествления одной из них с адроном, что эквивалентно переходу в систему частицы, двигающейся с импульсом  $\vec{p}_0 = \vec{P}_{\text{string},1} + \vec{P}_{\text{string},2}$ , энергией  $\omega_0 = \omega_{\text{string},1} + \omega_{\text{string},2}$  и массой  $m_0 = \sqrt{\omega_0^2 - p_0^2}$ . Преобразования Лоренца для перехода в СЦМ для частицы можно записать так:

$$\begin{aligned}\omega_h^* &= \frac{\omega_0 \omega_h - \vec{p}_0 \vec{p}_h}{m_0}, \\ \vec{p}_h^* &= \vec{p}_h - \vec{p}_0 \frac{\omega_h + \omega_h^*}{\omega_0 + m_0}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Для релятивистской струны можно записать преобразования схожим

образом:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{string}}^*(\sigma) &= \frac{\omega_0 \omega_{\text{string}}(\sigma) - \vec{p}_0 \vec{p}_{\text{string}}(\sigma)}{m_0}, \\ \vec{p}_{\text{string}}^*(\sigma) &= \vec{p}_{\text{string}}(\sigma) - \vec{p}_0 \frac{\omega_{\text{string}}(\sigma) + \omega_{\text{string}}^*(\sigma)}{\omega_0 + m_0}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Здесь  $\omega_{\text{string}}(\sigma)$  - распределенная энергия струны,  $\vec{p}_{\text{string}}(\sigma)$  - распределенный импульс,  $\sigma \in [0, \pi]$ .

На втором этапе, рассматривая систему двух струн как компаунд-частицу, находящуюся в покое, осуществим «двухчастичный» распад на струну и адрон. Полная энергия струны и адрона есть ни что иное, как

$$\begin{aligned}\omega_{\text{string}}^{\text{new}} &= \frac{m_0^2 + m_{\text{string}}^2 - m_{\text{h}}^2}{2m_0}, \\ \omega_{\text{h}}^{\text{new}} &= \frac{m_0^2 - m_{\text{string}}^2 + m_{\text{h}}^2}{2m_0},\end{aligned}\tag{3.5}$$

а модуль импульса

$$p^{\text{new}} = \frac{1}{2m_0} \sqrt{(m_0^2 - (m_{\text{string}} + m_{\text{h}})^2)(m_0^2 - (m_{\text{string}} - m_{\text{h}})^2)}.\tag{3.6}$$

На третьем этапе остается только сделать обратное преобразование Лоренца, чтобы перейти в ЛСО.

Еще одним условием для рождения адрона является выполнение закона сохранения полного углового момента системы. Если полный угловой момент системы сохраниться не может, переход струна-адрон оказывается запрещенным и не осуществляется.

Если выполнить переход струна-адрон не получилось, алгоритм проверяет, не является ли струна слишком легкой, чтобы она сама могла образовать дочерние струны. Делается это так: если масса струны меньше определенного порога, который определяется массами двух самых легких адронов, которые можно образовать из кварков на концах струны, то она распадается по двухчастичному каналу на эти два адрона. Если струна массивная, то она сохраняется в программе для дальнейшей фрагментации. В программе это условие определяется еще одним параметром MUT (Mass Upper Threshold). Если  $m_{\text{string}} < \text{MUT}(m_{\text{h1}} + m_{\text{h2}})$ , где  $m_{\text{h1}}$ ,  $m_{\text{h2}}$  - массы самых легких адронов, которые содержат кварки на концах струны,

то струна считается слишком легкой для того, чтобы распадаться на новые струны. Подходящее значение  $MUT$  оказывается вблизи  $MUT \approx 1.5$ .

Общая схема процедуры `Hadronize()`, отвечающей за осуществление перехода струна-адрон, представлена на рисунке 3.2.

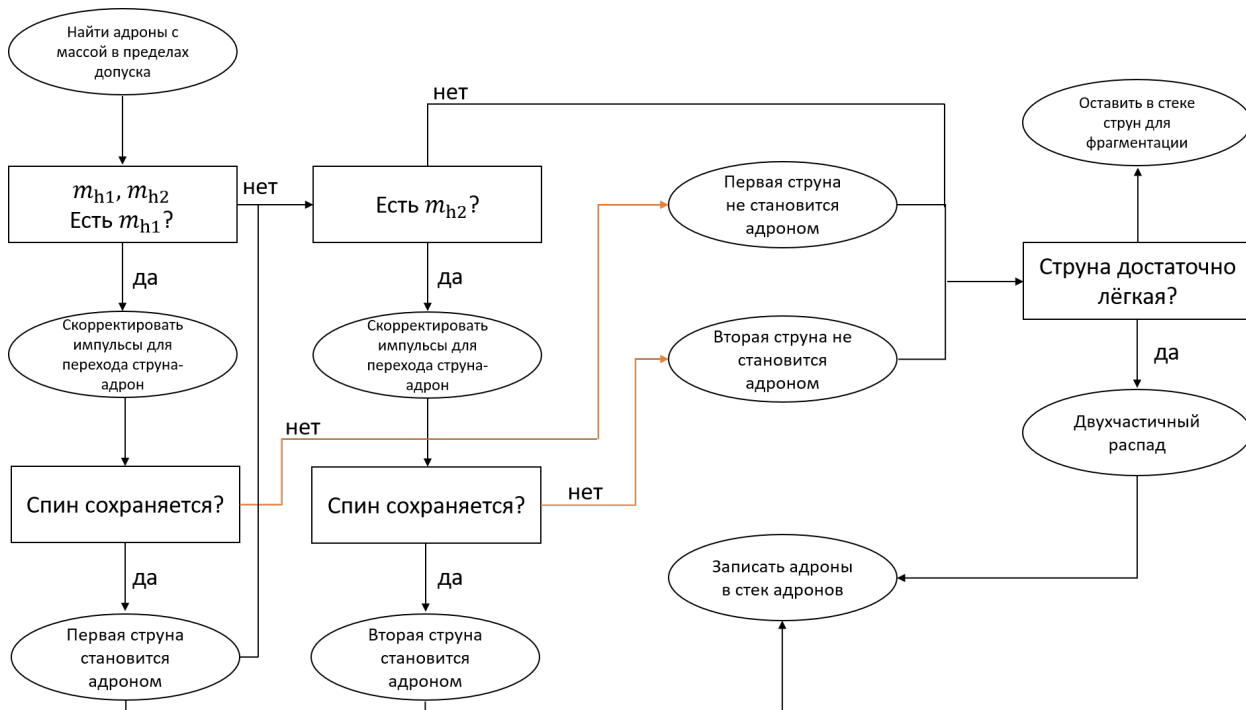


Рисунок 3.2 — Схема алгоритма для перехода струна-адрон в генераторе ATROPOS

### 3.2.3 Сохранение полного углового момента

Точный переход между струной и адронами требует также выполнения закона сохранения полного углового момента системы. К сожалению, в полной мере реализовать это невозможно из-за проблем с квантованием теории релятивистской струны. Тем не менее, возможно развить модельную классическую интерпретацию этого закона. Можно считать, что полный угловой момент струны (1.19) складывается из спинов образованного адрона и дочерней струны и орбитального углового момента их относительного движения. В результате, сгенерированная точка разрыва струны может отбраковываться в случае, когда пространственного растяжения струны недостаточно для обеспечения выполнения закона сохранения углового момента.



Поскольку масса дочерней струны однозначно определяется точкой фрагментации, данный алгоритм косвенно влияет и на массовый состав вторичных частиц. Удовлетворить закону сохранения углового момента в данном случае проще частицам со спином больше нуля. Так как такие частицы тяжелее пионов, это может приводить к утяжелению массового состава конечных адронов.

Рисунок 3.3 демонстрирует этот механизм для струны между легкими кварком и антикварком. Начальные данные задаются следующими импульсами и координатами партонов:  $p_q^\mu = \{1, 0, 0, 1\}$  ГэВ,  $\tilde{x}_q^\mu = \{0, 1, 0, 0\}$  ГэВ $^{-1}$ ,  $p_{\bar{q}}^\mu = \{1, 0, 0, -1\}$  ГэВ,  $\tilde{x}_{\bar{q}}^\mu = \{0, -1, 0, 0\}$  ГэВ $^{-1}$ . Пусть условием для отождествления фрагмента струны  $[0, \sigma_{\text{break}}]$  или  $[\sigma_{\text{break}}, \pi]$  является выполнение неравенства  $0.8m_h \leq m_{\text{string}} \leq 1.2m_h$ , то есть  $\varepsilon = 0.2$ . Область значений параметров  $\tau, \sigma$ , в которой это условие выполняется, закрашена темным цветом.

В качестве критерия для отбора координаты  $\sigma_{\text{break}}$  в соответствии с сохранением углового момента, будем считать, что фрагмент струны может быть адроном, если

$$\Delta J = J - (S_{\text{hadr},1} + J_2 + L) < 0, \quad (3.7)$$

где  $J$  - спин исходной струны,  $S_{\text{hadr},1}$  - спин адрона, который мог бы образоваться из первого фрагмента струны, а  $J_2$  - спин второго фрагмента струны. Орбитальный угловой момент определяется по формуле

$$L_a^k = \varepsilon_{ijk} Q_a^i P_a^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad a = 1, 2 \quad (3.8)$$

$$L = |\vec{L}_1 + \vec{L}_2|,$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  - абсолютно антисимметричный тензор,  $Q_a^i$  - вектор координат центра масс  $a$ -ой струны,  $P_a^j$  - вектор полного импульса  $a$ -ой струны.

Область значений параметров  $\tau, \sigma$ , в которой выполняется условие (3.7), на рисунке 3.3 закрашена светлым цветом. Видно, что в случае пиона нет такой конфигурации струны, при которой одновременно выполнялись бы условия на массу и спин. С другой стороны, для  $\rho$ -мезона дополнительных ограничений вообще не возникает.

Отметим, что подавление рождения  $\pi^0$ -мезонов по сравнению с  $\rho^0$ -

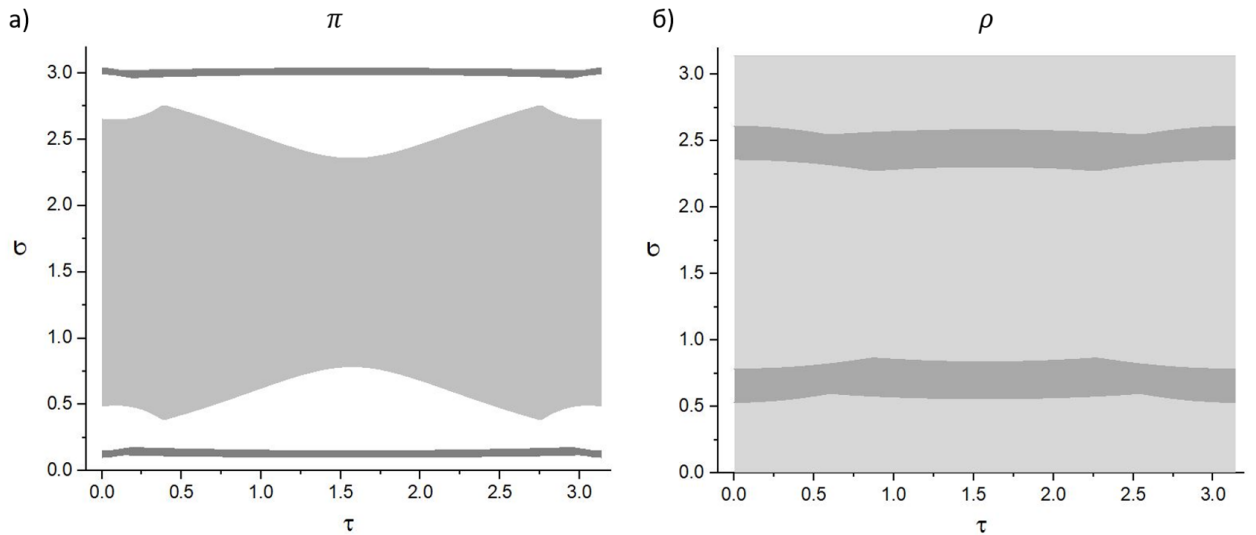


Рисунок 3.3 — Области значений параметров  $\tau$ ,  $\sigma$ , в которых выполняются условия для отождествления фрагмента струны с адроном. Темным цветом показана область, в которой масса фрагмента близка к массе адрона, светлым — область, в которой может удовлетворяться сохранение углового момента заданной струны (см. текст). Рисунок 3.3а демонстрирует результаты для случая, когда адроном является пион, 3.3б — для  $\rho$ -мезона

мезонами при больших  $x_F$ , то есть для конфигураций струн с большим угловым моментом, находится в согласии с экспериментальными данными [2].

На рисунке 3.4а показан спектр значений полного углового момента струн, вычисленного при моделировании адронизации в  $e^+e^-$ -столкновениях. Кинематика s-канального взаимодействия порождает, в основном, такие конфигурации струн, при которых кварк и антикварк на концах разлетаются с большими импульсами в противоположные стороны, что может навести на мысль, будто угловой момент струны пренебрежимо мал. Видно, однако, что заметную долю составляют струны, спин которых составляет единицы и десятки единиц. Причиной тому является поперечный импульс, который вносят жесткие глюоны. Даже если суммарный поперечный импульс струны в соответствии с законом сохранения равен нулю, струны-фрагменты, тем не менее, могут обладать ненулевым спином. В адрон-адронных взаимодействиях, как уже упоминалось выше, можно ожидать, что угловой момент струн будет достигать куда больших значений.

На рисунке 3.4б показано распределение по значению величины  $\Delta J$ , определенной в (3.7), которое вычислялось при каждой попытке совершить

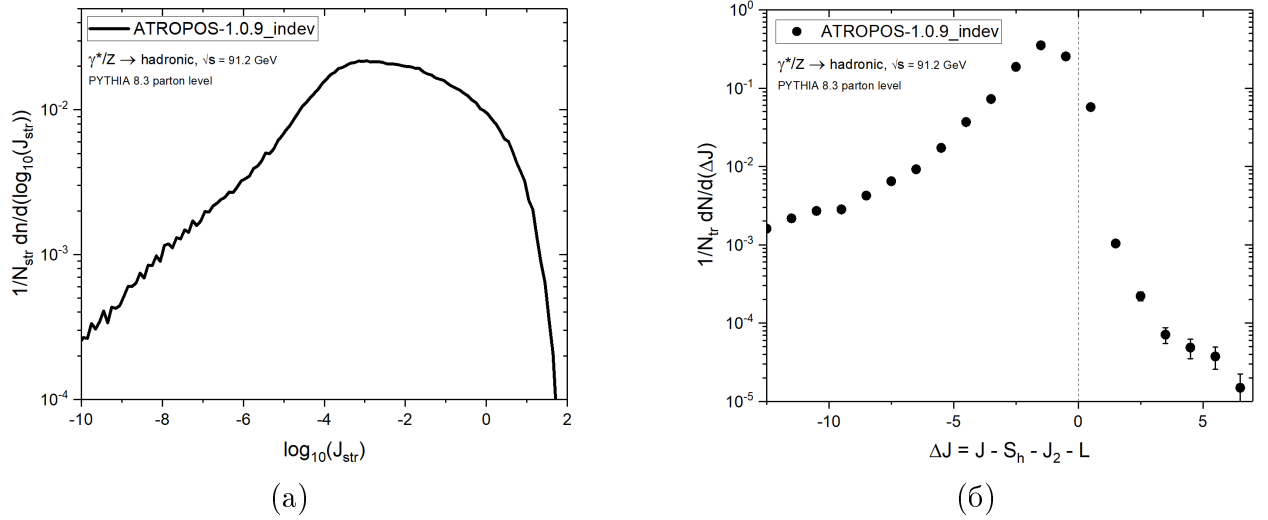


Рисунок 3.4 — Спектр полного углового момента релятивистских струн, образованных в  $e^+e^-$ -столкновениях, (а) и распределение по величине  $\Delta J$  (см. текст) (б)

переход струна-адрон при моделировании адронизации. Даже в электрон-позитронных столкновениях возникают запрещенные переходы, доля которых составляет около 6%. Отметим, что описанный подход для запрета рождения адрона в соответствии с сохранением полного углового момента является лишь наиболее простым предположением. Строгий расчет полного углового момента системы, складываемого из квантованных спинов кварков и классического спина и углового момента струн, по понятным причинам невозможен. Возможна, тем не менее, некоторая вероятностная параметризация этого процесса, основанная, к примеру, на вычислении возможных проекций суммарного углового момента.

# ГЛАВА 4.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АДРОНИЗАЦИИ В ATROPOS

В данный момент генератор имеет две основные рабочие версии: ATROPOS-1.0.7 и ATROPOS-1.0.9\_indev (версия все еще в разработке). Первая является хорошо настроенной версией, в которой рассматриваются только свободные струны, вторая - версией, в которой реализован математический аппарат для струн с массами на концах. Моделирование фрагментации струн с тяжелыми кварками занимает заметно больше времени, и отладка программы еще не завершена. Поэтому некоторые результаты приводятся для версии ATROPOS-1.0.7.

Всего в модели фрагментации струн, использующейся в генераторе ATROPOS, вводится 15 свободных параметров, которые представлены в таблице 4.1 вместе с описанием и значениями, соответствующими наилучшему подбору параметров FPS-40 (FPS-50 для версии 1.0.9).

Таблица 4.1 — Свободные параметры генератора ATROPOS

Наименование параметра	Стартовое значение	Описание
$P_0$	0.5 ГэВ <sup>2</sup>	Постоянная вероятность разрыва струны на единицу площади мировой поверхности
$P_{u\bar{u}} = P_{d\bar{d}}$	0.3325	Относительная вероятность образования пары кварк-антикварк
$P_{uu\bar{u}\bar{u}} = P_{dd\bar{d}\bar{d}} = P_{ud\bar{u}\bar{d}}$	0.05	Относительная вероятность образования пары дикварк-антидикварк

$P_{s\bar{s}} = P_{us\bar{u}\bar{s}} = P_{ds\bar{d}\bar{s}}$	0.1450	Относительная вероятность образования пары кварк-антикварк
$P_{us\bar{u}\bar{s}} = P_{ds\bar{d}\bar{s}}$	0.01	Относительная вероятность образования пары дикварк-антидикварк
$P_{ss\bar{s}\bar{s}}$	0.01925	Относительная вероятность образования пары дикварк-антидикварк
$\varepsilon$	0.2	Допуск на массу при переходе струна-адрон (SHMT)
$\kappa$	0.2 ГэВ <sup>2</sup>	Коэффициент натяжения струны
MUT	1.5	Ограничение на массу струны для дальнейшей фрагментации (Mass Upper Threshold)

Параметр  $P_0$  из закона площади (3.1) определяет вероятность распада струны к моменту  $\tau$ . Поскольку движение релятивистской струны периодически, предсказать, как его значение влияет на спектры регистрируемых частиц довольно трудно. Однако его можно связать с характерным размером системы, фрагментирующей на адроны:  $\approx 1$  Фм. Тогда, в распределении по времени разрыва струны должно наблюдаться значительное подавление для событий с  $ct_{\text{break}} \geq 5 \text{ ГэВ}^{-1} - 50 \text{ ГэВ}^{-1} = 1 - 10$  Фм.

Параметры, определяющие вероятность рождения той или иной пары кварк-антикварк или дикварк-антидикварк, настраиваются по сравнению выходов частиц в моделировании с экспериментом. Сравнение рассчитанных выходов частиц в событиях  $e^+e^-$ -аннигиляции с данными эксперимента DELPHI [23] при  $\sqrt{s} = 91$  ГэВ показано на рисунке 4.1. Как видно из рисунка 4.1а, ATROPOS весьма хорошо описывает рождение пионов и каонов. Интересная ситуация наблюдается с  $\eta$ -мезонами: средняя множественность  $\eta$ -мезонов в генераторе ATROPOS совпадает с экспериментальными данными куда лучше, чем у PYTHIA 8.3.

Крайне важно отметить, что для сравнения используются не просто

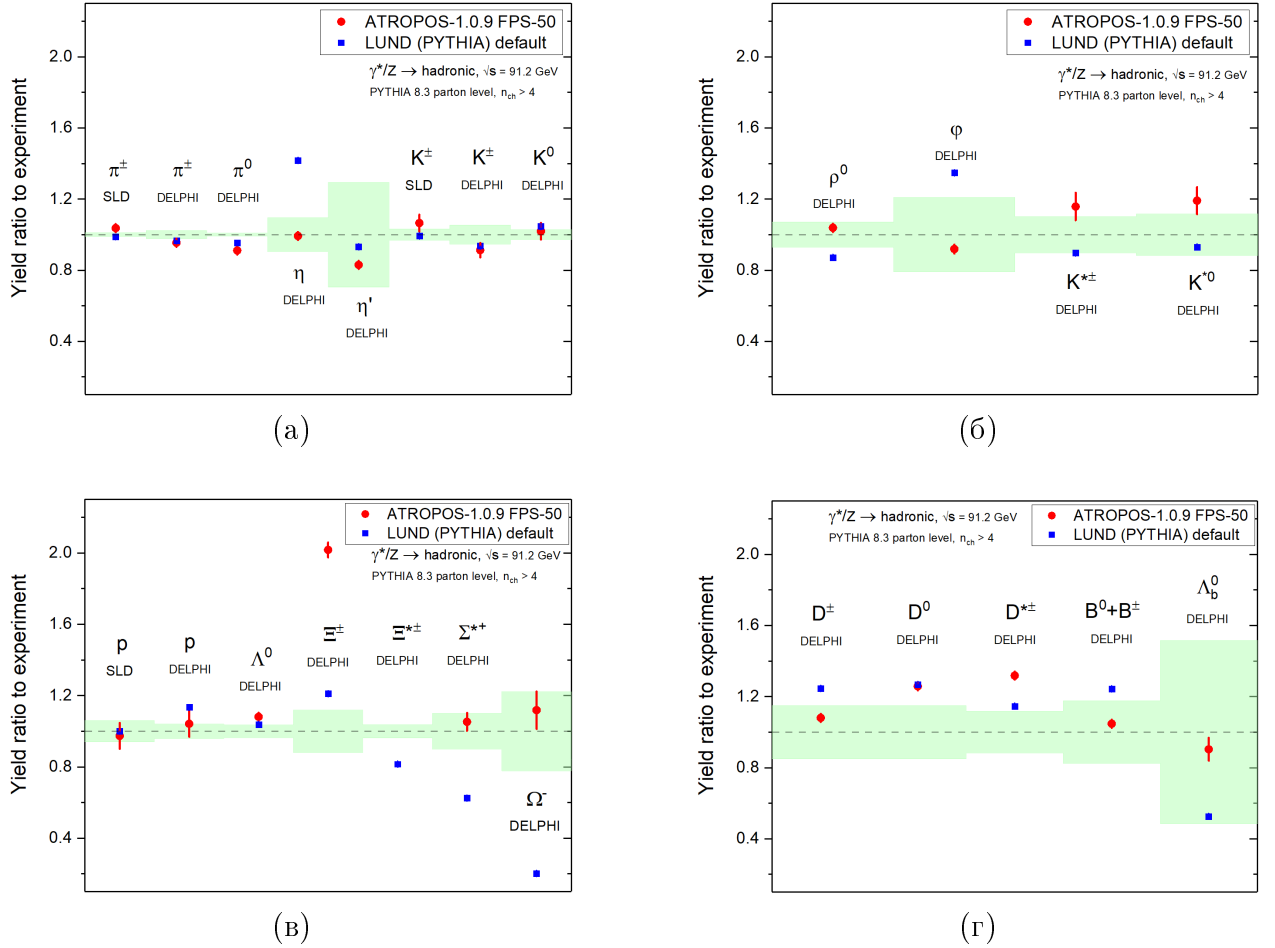


Рисунок 4.1 — Сравнение выходов частиц в событиях  $e^+e^-$ -аннигиляции при энергии  $\sqrt{s} = 91$  ГэВ с экспериментами DELPHI и SLD. а) - легкие скалярные мезоны, б) - легкие векторные мезоны, в) - легкие барионы, г) - с- и b-частицы. Закрашенная область показывает полные погрешности экспериментальных данных

результаты моделирования в одинаковых условиях, а буквально одни и те же наборы партонов: все, чем отличаются расчеты - модель адронизации.

Примечательным является хорошее соответствие между предсказаниями модели и экспериментом для  $\rho^0$ -мезонов, рисунок 4.1б. Настройка под описание выходов векторных частиц является одной из основных задач генератора ATROPOS. Интересно и то, что ATROPOS предсказывает несимметричное рождение  $\rho^0$  и  $\rho^\pm$ . Соотношение средних множественностей  $N_{\rho^0} : N_{\rho^+} : N_{\rho^-}$  составляет  $1.16 : 1 : 1$ . Выход векторных мезонов с s-кварками несколько завышен в модели, что может быть связано с подавлением состояний кварк-антикварк с сонаправленными спинами для более тяжелых ароматов кварков. Пока что в модели это может учитываться только введением дополнительных параметров.

Сравнение выходов легких барионов тоже показывает хорошее соответствие экспериментальным данным, рисунок 4.1в. Заметно выбиваются  $\Xi$  - гипероны, однако настройка их описания требует дополнительной работы, и, учитывая малое число этих частиц по сравнению с более привычными  $p$ ,  $n$ ,  $\Lambda$  и  $\Sigma$  - барионами, она не в приоритете.

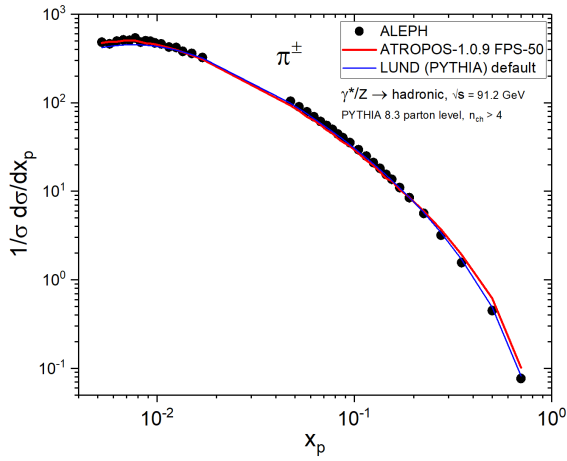
Выход тяжелых  $c$ - и  $b$ -частиц ATROPOS описывает не хуже, а иногда и лучше, чем в RUTHIA 8.3, как видно из рисунка 4.1г. Таким образом, своеобразный дебют нового подхода к описанию рождения  $c$ - и  $b$ -частиц можно считать успешным.

Кроме того, есть возможность сравнить описание импульсных спектров некоторых идентифицированных в эксперименте частиц. Результаты представлены на рисунке 4.2, где показаны дифференциальные сечения рождения  $\pi^\pm$ -мезонов,  $\rho^0$ -мезонов, протонов и  $K^\pm$  в зависимости от величины бьеркиновской переменной  $x_p = 2p/\sqrt{s}$ . Из рисунка 4.2а видно, что спектр пионов отлично описывается генератором ATROPOS. Исходя из рисунка 4.2б, спектр  $\rho^0$ -мезонов в ATROPOS описывается лучше, чем в RUTHIA, что особенно видно при больших импульсах  $\rho^0$ .

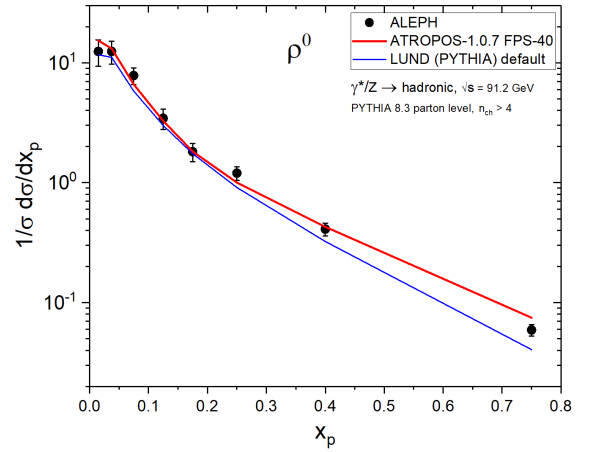
Спектр протонов описывается чуть хуже при больших  $x_p$ : модель завышает число протонов, уносящих основную энергию взаимодействия (рисунок 4.2в). Тем не менее, это лишь вопрос точной настройки модели. Спектр  $K^\pm$ -мезонов тоже описывается моделью весьма хорошо, рисунок 4.2г.

На рисунке 4.3 приведены распределения по множественности заряженных частиц, полученные в версии ATROPOS-1.0.7, для двух значений энергии в СЦМ - 91 ГэВ на рисунке 4.3а и 44 ГэВ на рисунке 4.3б. Видно, что форма распределений воспроизводится неточно. Завышение хвостов распределений связано, по всей видимости, с неправильной трактовкой рождения тяжелых адронов. Доля таких событий в электрон-позитронных аннигиляциях высока, поэтому слишком большое число частиц, рождающихся при фрагментации струн с  $c$ - и  $b$ -кварками приводит к отклонению предсказанных зависимостей от эксперимента. Ожидается, что версия 1.0.9 генератора ATROPOS покажет улучшенные результаты.

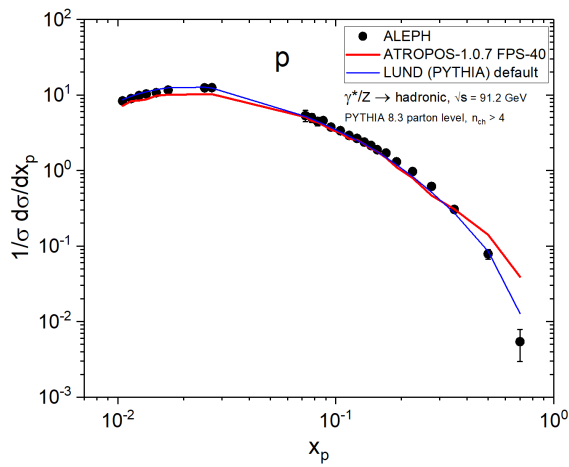
Однако, отклонения наблюдаются и при малых множественностях частиц. Дело в том, что экспериментальные данные, представленные на



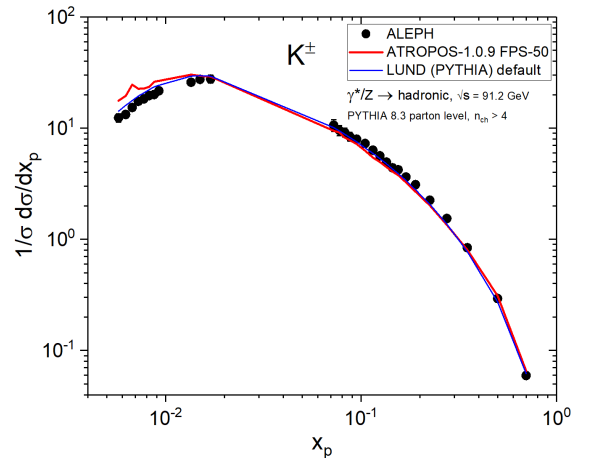
(а)



(б)

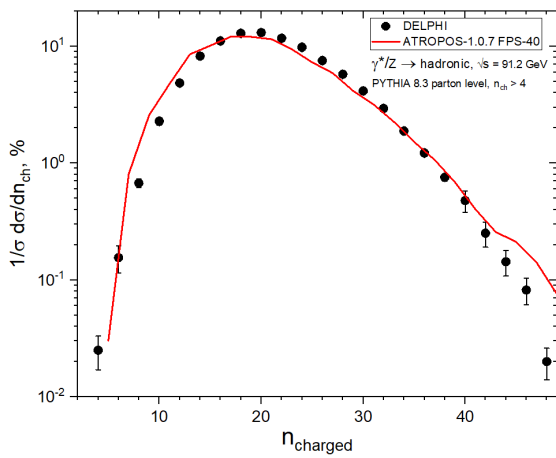


(в)

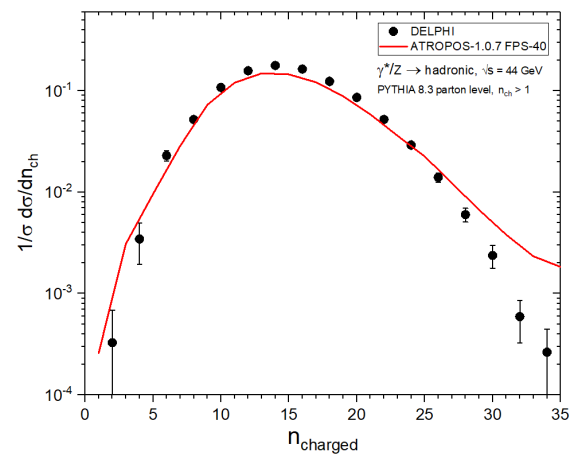


(г)

Рисунок 4.2 — Сравнение спектров частиц в событиях  $e^+e^-$ -аннигиляции при энергии  $\sqrt{s} = 91$  ГэВ с экспериментом АЛЕФН. а) - для заряженных пионов, б) - для  $\rho^0$ -мезонов, в) - для протонов и г) - для  $K^\pm$



(а)



(б)

Рисунок 4.3 — Сравнение распределений по множественности заряженных частиц в событиях  $e^+e^-$ -аннигиляции при энергии  $\sqrt{s} = 91$  ГэВ (а) и  $\sqrt{s} = 44$  ГэВ (б)



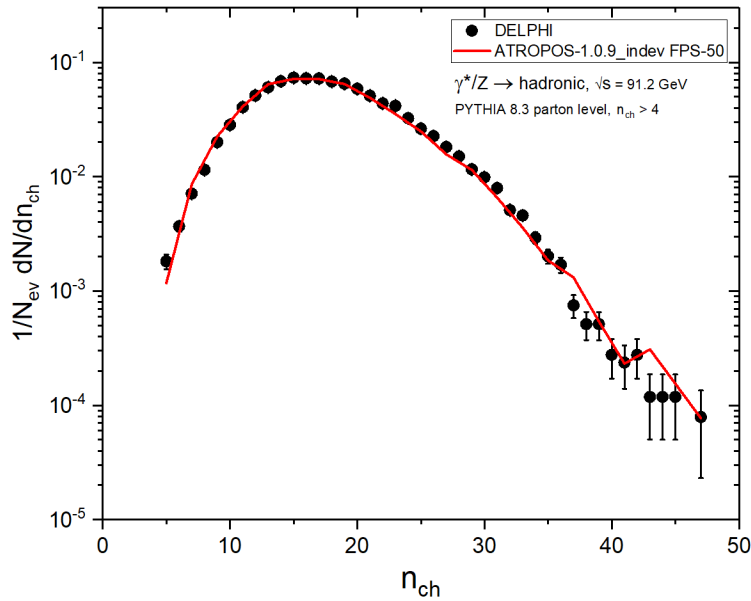


Рисунок 4.4 — Сравнение распределений по множественности заряженных частиц без МК-коррекции экспериментальных данных

рисунке 4.3, скорректированы при помощи Монте-Карло моделирования [24]. В эксперименте использовались довольно строгие критерии отбора событий, одним из которых являлось требование регистрации не менее 5 заряженных частиц. А для экстраполяции в меньшие множественности и полный телесный угол использовались МК-события, полученные при помощи модели LUND в программе JETSET (старое название генератора PYTHIA). Таким образом, более правильным представляется сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными без МК-коррекции, но с учетом всех критериев отбора событий. Результат показан на рисунке 4.4. Как видно из рисунка, модель весьма неплохо описывает экспериментальную зависимость.

Приведем еще предварительный результат для спектра заряженных  $D^*$ -мезонов, рисунок 4.5. Поскольку версия 1.0.9 все еще находится на стадии разработки и отладки, стоит с осторожностью судить о том, как модель описывает экспериментальные данные. Тем не менее, видно, что модель хорошо повторяет форму спектра. Это весьма важный результат, поскольку в модели используется совершенно новый механизм рождения тяжелых частиц.

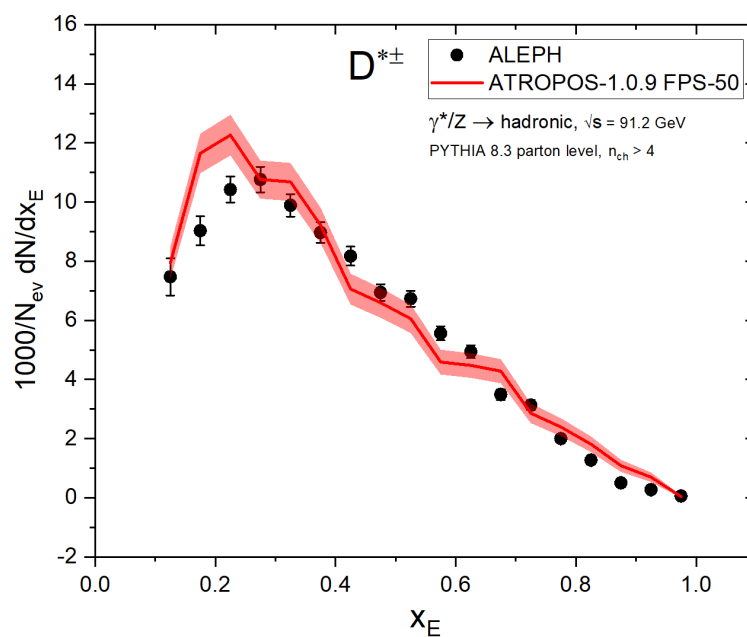


Рисунок 4.5 — Сравнение спектров  $D^{*\pm}$ -мезонов. Закрашенная область обозначает статистические погрешности моделирования

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и протестирован генератор адронизации по схеме фрагментации релятивистских кварк-глюонных струн Намбу-Гото ATROPOS.

Выведены начальные условия для струны, состоящей из произвольного числа партонов и с тяжелыми кварками на концах. Таким образом, генератор ATROPOS стал первой моделью адронизации, в которой рождение тяжелых  $s$ - и  $b$ -адронов описывается исходя из первых принципов теории, без потери согласованности с исходными постулатами. Математический аппарат модели одинаковым образом описывает фрагментацию струн с тяжелыми и легкими кварками, тем самым исключая необходимость использовать разные подходы и наборы параметров для описания рождения различных частиц.

Разработан алгоритм генерации точек разрыва струны с учетом необходимости рождения пары партон-антипартон. Создан алгоритм для осуществления перехода струна-адрон, в котором выполняется закон сохранения энергии-импульса благодаря механизму «hadron-string shoving».

Впервые в модель адронизации введен механизм сохранения полного углового момента системы, благодаря чему возможно определение запрещенных переходов струна-адрон.

Проведена серия моделирования адронизации в электрон-позитронных столкновениях, что позволяет провести настройку свободных параметров модели. На данный момент используется набор параметров FPS-40 (FPS-50), при котором результаты расчетов хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Примечательным является то факт, что рождение некоторых типов частиц ATROPOS уже описывает лучше, чем PYTHIA 8.3. Особое внимание стоит уделить  $\rho^0$ -мезонам, поскольку именно с описанием их рождения и спектров у существующих моделей наблюдаются значительные трудности. Результаты, полученные при помощи генератора ATROPOS свиде-

тельствуют о том, что выход векторных и тяжелых частиц может быть изменен в рамках неколлективной модели адронизации при помощи введения новых механизмов через математический аппарат фрагментации кварк-глюонных струн.

## Приложение А

### ВЫВОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Имеем постановку задачи:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_\mu - x''_\mu &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad \tau > 0; \\ x'_\mu(\tau, 0) &= x'_\mu(\tau, \pi) = 0; \\ x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma), \quad \dot{x}_\mu(0, \sigma) = v_\mu(\sigma),\end{aligned}\tag{A.1}$$

где  $\dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu(\tau, \sigma)}{\partial \tau}$ ,  $x'_\mu = \frac{\partial x_\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma}$ . Будем искать решение в виде  $x_\mu(\tau, \sigma) = T_\mu(\tau)u(\sigma)$ . Подстановка в волновое уравнение дает

$$\frac{\ddot{T}_\mu(\tau)}{T_\mu(\tau)} = \frac{u''(\sigma)}{u(\sigma)} = -\omega^2.\tag{A.2}$$

Получаем постановку задачи Штурма-Лиувилля на собственные функции  $u_n(\sigma)$  и собственные значения  $\omega_n$ :

$$\begin{aligned}u''_n(\sigma) + \omega_n^2 u_n(\sigma) &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi]; \\ u'_n(0) &= u'_n(\pi) = 0.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Общее решение запишем в виде

$$u_n(\sigma) = A_n \cos(\omega_n \sigma) + B_n \sin(\omega_n \sigma).\tag{A.4}$$

Из граничных условий следует

$$u'_n(0) = \omega_n B_n = 0 \Rightarrow B_n = 0,\tag{A.5}$$

$$u'_n(\pi) = -\omega_n A_n \sin(\omega_n \pi) = 0 \Rightarrow \omega_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots.\tag{A.6}$$

Рассмотрим отдельно случай  $\omega_0 = 0$ :  $u_0(\sigma) = A_0\sigma + B_0$ . Тогда из граничных условий  $A_0 = 0$ . Выберем  $A_n = B_0 = 1$ . Отметим, что собственные функции задачи Штурма-Лиувилля подчиняются условию ортогональности

$$\int_0^\pi u_n(\sigma)u_m(\sigma)d\sigma = \|u_n\|^2 \delta_{nm}. \quad (\text{A.7})$$

Общее решение для задачи на функцию  $T_n^\mu(\tau)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} T_n^\mu(\tau) &= D_n^\mu \cos(n\tau) + C_n^\mu \sin(n\tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ T_0^\mu(\tau) &= C_0^\mu \tau + D_0^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Представляя общее решение исходной задачи в виде ряда Фурье и подставляя в первое начальное условие, получим

$$\int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)u_m(\sigma)d\sigma = \int_0^\pi \left( D_0^\mu + \sum_{n=1}^\infty D_n^\mu u_n(\sigma) \right) u_m(\sigma)d\sigma, \quad (\text{A.9})$$

откуда следует

$$D_0^\mu \|u_0\|^2 = \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)u_0(\sigma)d\sigma, \quad (\text{A.10})$$

$$D_n^\mu \|u_n\|^2 = \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)u_n(\sigma)d\sigma. \quad (\text{A.11})$$

Вычисляя

$$\|u_0\|^2 = \int_0^\pi d\sigma = \pi, \quad (\text{A.12})$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(n\sigma)d\sigma = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.13})$$

получаем окончательные выражения для коэффициентов  $D_n^\mu$ :

$$D_0^\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma)d\sigma, \quad (\text{A.14})$$

$$D_n^\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) \cos(n\sigma)d\sigma, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (\text{A.15})$$

Повторяя приведенные выкладки для второго начального условия,

получаем формулы для коэффициентов  $C_n^\mu$ :

$$C_0^\mu = \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma) u_0(\sigma) d\sigma}{\|u_0\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v^\mu(\sigma) d\sigma, \quad (\text{A.16})$$

$$C_n^\mu = \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma) u_n(\sigma) d\sigma}{\omega_n \|u_n\|^2} = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi v^\mu(\sigma) \cos(n\sigma) d\sigma. \quad (\text{A.17})$$

Тогда решение задачи имеет вид

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\tau}{\pi} \int_0^\pi v^\mu(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) d\sigma + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \int_0^\pi v^\mu(\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda}{n\pi} \sin(n\tau) + \frac{2 \int_0^\pi \rho^\mu(\lambda) \cos(n\lambda) d\lambda}{\pi} \cos(n\tau) \right] \cos(n\sigma). \quad (\text{A.18})$$

Переходя к экспоненциальному представлению синуса и косинуса и учитывая, что выражения внутри интегралов не зависят от знака  $n$ , формулу (A.18) можно переписать в эквивалентном виде

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\tau}{\pi} \int_0^\pi v^\mu(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) d\sigma + \\ + \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n = -\infty \\ n = +\infty}} \frac{e^{-in\tau}}{n} \cos(n\sigma) \int_0^\pi [v^\mu(\lambda) - in\rho^\mu(\lambda)] \cos(n\lambda) d\lambda. \quad (\text{A.19})$$

Вводя обозначения

$$\kappa \int_0^\pi v^\mu(\sigma) d\sigma = P^\mu, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) d\sigma = Q^\mu, \\ \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^\pi [v^\mu(\sigma) - in\rho^\mu(\sigma)] \cos(n\sigma) d\sigma = \alpha_n^\mu, \quad (\text{A.20})$$

приводим решение задачи к известному виду

$$x^\mu(\tau, \sigma) = P^\mu \frac{\tau}{\kappa\pi} + Q^\mu + \frac{i}{\sqrt{\kappa\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (\text{A.21})$$

## Приложение В

### ВЫВОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СТРУНЫ С МАССАМИ НА КОНЦАХ

Постановка задачи Коши о движении релятивистской струны с массами на концах в ортонормальной калибровке выглядит так ( $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_\mu - x''_\mu &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad \tau > 0; \\
 x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma), \quad \dot{x}_\mu(0, \sigma) = v_\mu(\sigma); \\
 \mu_1 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= x'_\nu, \quad \sigma = 0; \\
 \mu_2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= -x'_\nu, \quad \sigma = \pi,
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

где  $\mu_1 = m_1/\kappa, \mu_2 = m_2/\kappa$ . Если ограничиться рассмотрением движения струны, при котором выполняется критерий линеаризации граничных условий, т. е.  $(\dot{x}(\tau, \sigma_i))^2 = m_i^{-2}, i = 1, 2, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pi$ , постановка задачи приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_\mu - x''_\mu &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad \tau > 0; \\
 x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma), \quad \dot{x}_\mu(0, \sigma) = v_\mu(\sigma); \\
 \ddot{x}_\nu &= q_1 x'_\nu, \quad \sigma = 0; \\
 \ddot{x}_\nu &= -q_2 x'_\nu, \quad \sigma = \pi; \\
 q_1 &= \frac{\kappa}{m_1^2}, \quad q_2 = \frac{\kappa}{m_2^2}.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Подставляя в (B.2) искомое решение в виде  $x_\mu(\tau, \sigma) = T_\mu(\tau)u(\sigma)$ ,



получаем следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} u_n''(\sigma) + \omega_n^2 u_n(\sigma) &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi]; \\ u_n'(0) &= -\frac{\omega_n^2}{q_1} u_n(0), \\ u_n'(\pi) &= \frac{\omega_n^2}{q_2} u_n(\pi). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Отличием струны с массами на концах от свободной является то, что собственные числа задачи Штурма-Лиувилля теперь определяются корнями трансцендентного уравнения

$$\text{tg}(\omega_n \pi) = \frac{\omega_n(q_1 + q_2)}{\omega_n^2 - q_1 q_2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{B.4})$$

а собственные функции принимают вид

$$\begin{aligned} u_n(\sigma) &= \cos(\omega_n \sigma) - \frac{\omega_n}{q_1} \sin(\omega_n \sigma), \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ u_0(\sigma) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

которые теперь удовлетворяют условию ортогональности собственных функций для струны с нагрузкой:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u_n(\sigma) u_m(\sigma) \xi(\sigma) d\sigma &= \|u_n\|^2 \delta_{nm}, \\ \xi(\sigma) &= 1 + \frac{1}{q_1} \delta(\sigma) + \frac{1}{q_2} \delta(\sigma - \pi), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

где  $\delta(\lambda)$  - дельта-функция Дирака. Весовую функцию  $\xi(\sigma)$  необходимо учитывать при любом интегрировании вдоль струны.

Представляя общее решение задачи в виде ряда и подставляя его в начальные условия, получим формулы для коэффициентов в функциях

$$T_n^\mu(\tau) = C_n^\mu \sin(\omega_n \tau) + D_n^\mu \cos(\omega_n \tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad T_0^\mu(\tau) = C_0^\mu \tau + D_0^\mu:$$

$$\begin{aligned} D_0^\mu &= \frac{\int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) \xi(\sigma) d\sigma}{\|u_0\|^2}, \\ C_0^\mu &= \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma) \xi(\sigma) d\sigma}{\|u_0\|^2}, \\ D_n^\mu &= \frac{\int_0^\pi \rho^\mu(\sigma) u_n(\sigma) \xi(\sigma) d\sigma}{\|u_n\|^2}, \\ C_n^\mu &= \frac{\int_0^\pi v^\mu(\sigma) u_n(\sigma) \xi(\sigma) d\sigma}{\omega_n \|u_n\|^2}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Используя (B.4)-(B.6), вычислим квадраты норм собственных функций:

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \pi + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \\ \|u_n\|^2 &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{q_1^2} \right) - \frac{(q_1 + q_2)(\omega_n^2 + q_1 q_2)}{2q_1^2(\omega_n^2 + q_2^2)}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Таким образом, решением задачи (B.2) является функция

$$x^\mu(\tau, \sigma) = C_0^\mu \tau + D_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^\mu \sin(\omega_n \tau) + D_n^\mu \cos(\omega_n \tau)] u_n(\sigma), \tag{B.9}$$

в которой коэффициенты  $D_n^\mu$ ,  $C_n^\mu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , определяются формулами (B.7), (B.8), собственные функции имеют вид (B.5), а собственные значения вычисляются из (B.4).

Рассмотрим теперь случаи, когда лишь один конец струны нагружен массой. Решение задачи по-прежнему дается формулой (B.9), в которой коэффициенты также вычисляются при помощи (B.7). Изменяются лишь собственные функции и собственные значения ввиду отличной постановки задачи Штурма-Лиувилля.

Сначала рассмотрим случай  $m_1 = 0$ ,  $m_2 \neq 0$ . Постановка задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} u_n''(\sigma) + \omega_n^2 u_n(\sigma) &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi]; \\ u_n'(0) &= 0, \\ u_n'(\pi) &= \frac{\omega_n^2}{q_2} u_n(\pi). \end{aligned} \tag{B.10}$$

Собственные значения являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega_n \pi) = -\frac{\omega_n}{q_2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{B.11})$$

а собственные функции принимают вид

$$u_n(\sigma) = \cos(\omega_n \sigma), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (\text{B.12})$$

Как и прежде,  $u_0 = 1$ . Для случая  $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 = 0$ , постановка задачи есть

$$\begin{aligned} u_n''(\sigma) + \omega_n^2 u_n(\sigma) &= 0, \quad \sigma \in [0, \pi]; \\ u_n'(0) &= -\frac{\omega_n^2}{q_1} u_n(0), \\ u_n'(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

собственные значения находятся из

$$\operatorname{tg}(\omega_n \pi) = -\frac{\omega_n}{q_1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{B.14})$$

собственные функции имеют вид

$$u_n(\sigma) = \cos(\omega_n(\pi - \sigma)), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (\text{B.15})$$

Таким образом, решением задачи о движении релятивистской струны с массами на концах является выражение (B.9), в котором коэффициенты определяются формулами (B.7). В случае, если оба конца нагружены массой, для вычисления квадрата норм собственных функций (B.5) нужно пользоваться формулами (B.8), а собственные значения находить из (B.4). Если нагружен только один из концов струны, при вычислении коэффициентов нужно пользоваться формулами (B.11), (B.12) или (B.14), (B.15) в зависимости от того, какой конец струны нагружен массой.

## Приложение С

### ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДОЧЕРНИХ СТРУН

Рассмотрим случай струны, заданной на произвольном интервале  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ . Постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_\mu - x_\mu'' &= 0, \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2], \quad \tau > 0; \\
 x_\mu(0, \sigma) &= \rho_\mu(\sigma) = x_\mu^{\text{mother}}(\tau_{\text{break}}, \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]; \\
 \dot{x}_\mu(0, \sigma) &= v_\mu(\sigma) = \dot{x}_\mu^{\text{mother}}(\tau_{\text{break}}, \sigma), \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]; \\
 \ddot{x}_\nu &= q_1 x_\nu', \quad \sigma = \sigma_1; \\
 \ddot{x}_\nu &= -q_2 x_\nu', \quad \sigma = \sigma_2; \\
 q_1 &= \frac{\kappa}{m_1^2}, \quad q_2 = \frac{\kappa}{m_2^2}.
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Здесь снова используется ОНК (1.8) и требование линеаризации граничных условий (1.26). Будем искать решение в виде  $x_\mu(\tau, \sigma) = T_\mu(\tau)u(\sigma)$ . Введем обозначение  $s = \frac{\pi}{\sigma_2 - \sigma_1}$ . После разделения переменных запишем полученное равенство следующим образом:

$$\frac{\ddot{T}_\mu(\tau)}{T_\mu(\tau)} = \frac{u''(\sigma)}{u(\sigma)} = -s^2\omega^2. \tag{C.2}$$

Тогда получаем следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned}
 u_n''(\sigma) + s^2\omega^2 u_n(\sigma) &= 0, \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]; \\
 u_n'(\sigma_1) &= -\frac{\omega_n^2 s^2}{q_1} u_n(\sigma_1), \\
 u_n'(\sigma_2) &= \frac{\omega_n^2 s^2}{q_2} u_n(\sigma_2).
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Будем искать решение в виде функций  $u_n(x) = A_n \cos(x) + B_n \sin(x)$ ,

где  $x = x(\sigma)$ :  $x(\sigma_1) = 0$ ,  $x(\sigma_2) = \pi$ . Легко убедиться, что в качестве функции  $x(\sigma)$  подходит  $x(\sigma) = s(\sigma - \sigma_1)$ . После подстановки выбранного вида  $u_n(\sigma)$  в граничные условия (С.3), получим, что собственные значения задачи  $\omega_n$  определяются из уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega_n \pi) = \frac{\omega_n s (q_1 + q_2)}{\omega_n^2 s^2 - q_1 q_2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{C.4})$$

а собственные функции имеют вид

$$u_n(\sigma) = \cos [\omega_n s (\sigma - \sigma_1)] - \frac{\omega_n s}{q_1} \sin [\omega_n s (\sigma - \sigma_1)], \quad u_0(\sigma) = 1. \quad (\text{C.5})$$

Общее решение задачи дается в виде ряда

$$x^\mu(\tau, \sigma) = C_0^\mu \tau + D_0^\mu + \sum_{n=1}^{+\infty} [C_n^\mu \sin(s\omega_n \tau) + D_n^\mu \cos(s\omega_n \tau)] u_n(\sigma), \quad (\text{C.6})$$

где коэффициенты  $C_n^\mu$ ,  $D_n^\mu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , вычисляются согласно (В.7), квадраты норм собственных функций есть

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \frac{\pi}{s} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \\ \|u_n\|^2 &= \frac{\pi}{2s} \left( 1 + \frac{\omega_n^2 s^2}{q_1^2} \right) - \frac{(q_1 + q_2)(\omega_n^2 s^2 + q_1 q_2)}{2q_1^2(\omega_n^2 s^2 + q_2^2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Для случая, когда  $m_1 = 0$ ,  $m_2 \neq 0$ , собственные значения и собственные функции определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega_n \pi) &= -\frac{\omega_n s}{q_2}, \\ u_n(\sigma) &= \cos [\omega_n s (\sigma - \sigma_1)], \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

а в случае, когда  $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 = 0$  - выражениями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\omega_n \pi) &= -\frac{\omega_n s}{q_1}, \\ u_n(\sigma) &= \cos [\omega_n s (\sigma - \sigma_1)] - \frac{\omega_n s}{q_1} \sin [\omega_n s (\sigma - \sigma_1)]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] ALICE Collaboration, arXiv: 1708.08745 [hep ex], 2017.
- [2] NA61/SHINE collaboration, arXiv: 1705.08206 [nucl ex], 2017.
- [3] D. Heck, J. Knapp, J. N. Capdevielle, G. Schatz, T. Thouw CORSIKA: A Monte Carlo Code to Simulate Extensive Air Showers. FZKA 6019 (Forschungszentrum Karlsruhe, 1998).
- [4] A. A. Petrukhin Muon puzzle in cosmic ray experiments and its possible solution Nucl. Instrum Methods Phys Res A , 742 , 228 231 (2014).
- [5] H. P. Dembinski , J. C. Arteaga Velázquez, L. Cazon, R. Conceição, J. Gonzalez, Y. Itow, D. Ivanov, N. N. Kalmykov, I. Karpikov, S. Müller, T. Pierog, F. Riehn, M. Roth, T. Sako, D. Soldin, R. Takeishi, et al., Report on tests and measurements of hadronic interaction properties with air showers, EPJ Web Conf. 210, 02004 (2019).
- [6] T. Pierog, S. Baur, H. Dembinski, M. Perlin, R. Ulrich, K. Werner, When heavy ions meet cosmic rays: potential impact of QGP formation on the muon puzzle, PoS (ICRC2021) 469 (2021).
- [7] R. D. Field and R. P. Feynman, A parameterization of the properties of quark jets, Nucl. Phys. B 136 (1978).
- [8] B. R. Webber, A QCD model for jet fragmentation including soft gluon interference, Nucl. Phys. B 238 492 (1984).
- [9] B. Andersson, G. Gustafson and B. Söderberg, A general Model for Jet Fragmentation, Z. Phys. C 20, 317 (1983).
- [10] D. A. Morris, A Framework for the Fragmentation of the Massless Relativistic String, Nuc. Phys. B 288, 717 (1987).

- [11] T. Sjöstrand, S. Mrenna, P. Z. Skands, A brief introduction to PYTHIA8.1, *Comput. Phys. Commun.* 178, 852 (2008); arXiv:0710.3820 [hep-ph].
- [12] D. A. Morris, *The Relativistic String in the Caltech-II Model of Hadronization and Electron-Positron Annihilation* (PhD thesis, California Institute of Technology 1987).
- [13] H. J. Drescher, M. Hladik, S. Ostapchenko, T. Pierog, K. Werner, Parton based Gribov-Regge theory, *Phys. Rep.* 350, 93 (2001); arXiv:hep-ph/0007198 [hep-ph].
- [14] T. Pierog, Iu. Karpenko, J. M. Katzy, E. Yatsenko, and K. Werner, *Phys. Rev. C* 92, 034906 (2015).
- [15] D. Amati and G. Veneziano, Preconfinement as a property of perturbative QCD, *Phys. Lett. B* 83, 87 (1979).
- [16] C. Bierlich, G. Gustafson and L. Lönnblad, *Collectivity without plasma in hadronic collisions*, (Lund University, 2022). arXiv:1710.09725v1.
- [17] Y. Nambu, Quark model and the factorization of the Veneziano amplitude, In R. Chand, editor, *Symmetries and Quark Models*, Gordon and Breach: New York, 269 (1970).
- [18] X. Artru, G. Mennessier, String model and multiproduction, *Nucl. Phys. B* 70, 93 (1974).
- [19] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *Модель релятивистской струны в физике адронов* (ЭНЕРГООАТОМИЗДАТ, Москва, 1987).
- [20] M. G. Bowler,  $e+e-$  Production of Heavy Quarks in the String Model, *Z. Phys. C* 11, 169 (1981), doi:10.1007/BF01574001.
- [21] R. Brun, F. Rademakers, ROOT - An Object Oriented Data Analysis Framework, *Proceedings AIHENP'96 Workshop*, Lausanne. 1996.
- [22] L. Garren, I. G. Knowles, T. Sjöstrand et al, Monte carlo particle numbering scheme. *Eur. Phys. J. C* 15, 205–207 (2000). <https://doi.org/10.1007/BF02683426>

- [23] DELPHI Collaboration, Tuning and test of fragmentation models based on identified particles and precision event shape data. *Z. Phys. C* 73. 11-60 (1996).
- [24] DELPHI Collaboration, Charged particle multiplicity distributions in  $Z^0$  hadronic decays. *Z. Phys. C* 50. 185-194 (1991).