

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»  
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.17, 539.12.01

На правах рукописи

ЮШИН ВЛАДИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

**БФКЛ СПЕКТР В КХД И  $\mathcal{N} = 4$  СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ  
ТЕОРИЯ ЯНГ-МИЛСА**

Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»  
Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,  
к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ М. Н. Алфимов

Москва 2024

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**БФКЛ СПЕКТР В КХД И  $\mathcal{N} = 4$  СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ  
ТЕОРИЯ ЯНГ-МИЛСА**

Студент

\_\_\_\_\_ В. О. Юшин

Научный руководитель,

к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ М. Н. Алфимов

Рецензент,

к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ А. В. Литвинов

Секретарь ГЭК,

к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,

д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

Рук. учеб. прог.,

д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ М. Д. Скорохватов

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Рассеяние при высоких энергиях	7
2 Померон и Оддерон	9
3 Решение уравнений QSC	11
3.1 Оддерон с $P$ -функциями определённой чётности . . . . .	12
3.2 Оддерон с $P$ -функциями без определённой чётности . . . . .	28
Заключение	31
A $\mu$ в NLO	32
B Саблидирующее уравнение Бакстера 4-го порядка	34
Список литературы	36

## ВВЕДЕНИЕ

Существуют экспериментальные данные [1; 2] из которых феноменологически делается вывод о росте полного сечения  $\sigma_{tot} \sim s^{\alpha-1}$  с ростом энергии [3]. В качестве объяснения был предложен обмен некоторой квазичастицей с характеристикой  $\alpha$ , интерсепт, и назван Померон. Это сыграло важную роль для понимания высокоэнергетического упругого рассеяния в квантовой теории поля (КТП). Для объяснения несоответствия между адрон-адронным и адрон-антиадронным рассеянием при высоких энергиях был ещё введён Оддерон [4–6]. В недавних измерениях было подтверждено это расхождение [7–9] и Оддерон считается открытым. Используя ФМО приближение были получены интерсепты для Померона и Оддерона без учёта и с учётом кулоновских членов [10]. Основываясь на экспериментальных данных [11], рисунок 1, можно взять логарифм  $\sigma$  и получить линейный график, его наклон и будет искомым  $\alpha$ , рисунок 2. В данной работе делаются некоторые шаги, чтобы найти этот наклон теоретически и сравнить с экспериментальными данными.

Теоретически, в рамках квантовой хромодинамики (КХД), это сделать очень нелегко, есть лишь ограниченные известные результаты. Интересен режим, когда КХД близко к пертурбативному приближению, поэтому исследуется только режим при больших  $s$  (энергии  $\gg \Lambda_{QCD} \sim 200$  МэВ). В рамках КХД, даже в асимптотически свободном режиме, с помощью теории возмущений, в старших порядках по константе связи диаграммы становятся слишком сложными, аналитически посчитать их не удаётся. Вычисление интерсепта в КХД привело к уравнению БФКЛ (Балицкий-Фадин-Кураев-Липатов), которое суммирует все ведущие логарифмические вклады [12–14].

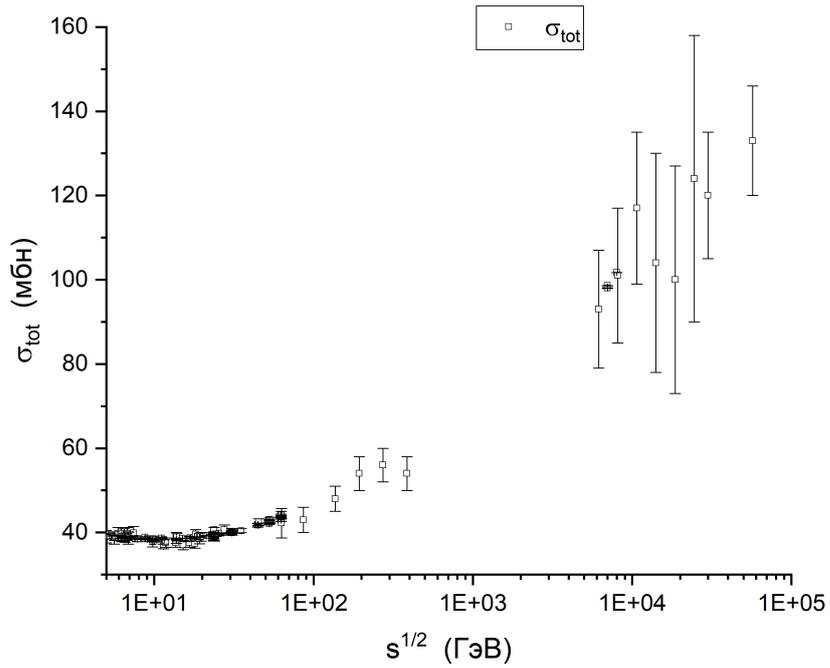


Рисунок 1 — Экспериментальные данные зависимости полного сечения  $\sigma_{tot}$  от  $s^{1/2}$  для  $pp$  столкновений.

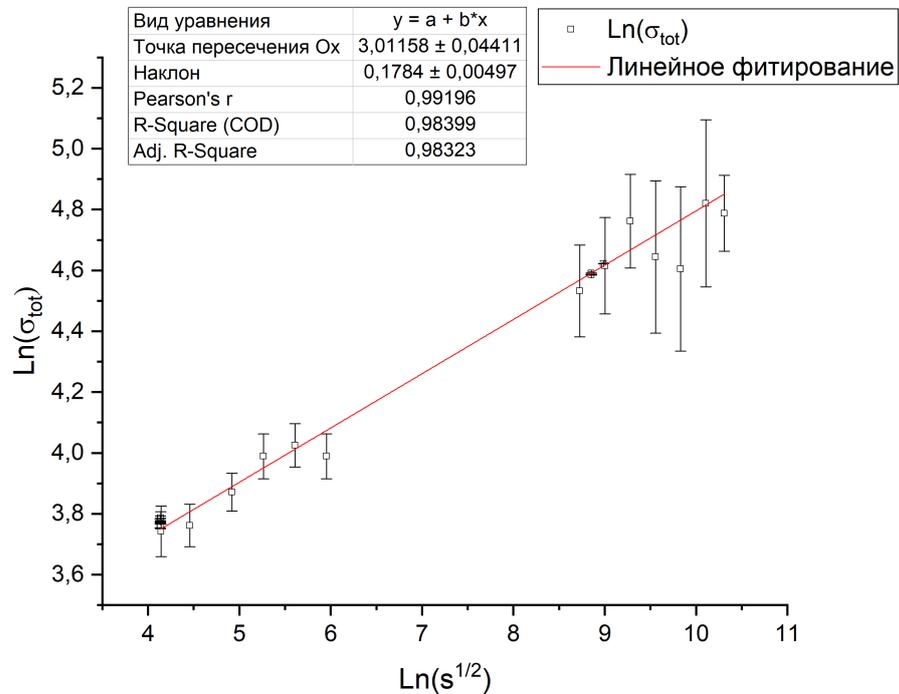


Рисунок 2 — Экспериментальные точки в осях  $\text{Ln}(\sigma_{tot})$  и  $\text{Ln}(s^{1/2})$  можно фитировать прямой, наклон этой линии и будет искомым интерсептом  $\alpha$ .

Существует  $\mathcal{N} = 4$  теория Супер-Янга-Миллса (SYM), она играет важную роль в нашем понимании квантовых теорий поля, особенно в контексте AdS/CFT.  $\mathcal{N} = 4$  SYM – это четырехмерная калибровочная теория, она хоть и не есть в точности КХД, зато она обладает рядом замечательных свойств, например: она является конформной (не зависит от масштаба), суперсимметричной, интегрируемой, поэтому множество величин в ней можно посчитать аналитически. Установлены связи между  $\mathcal{N} = 4$  SYM и КХД, в частности, принцип максимальной трансцендентности Котикова-Липатова [15–17]. Принцип заключается в том, что некоторый результат, полученные в  $\mathcal{N} = 4$  – это строго определенный кусок ответа для той же величины из КХД. Если вычислять показатель степени  $\alpha$  в КХД, то его максимально трансцендентальная часть это то же самое, как если бы эта величина была вычислена в  $\mathcal{N} = 4$  SYM.

В  $\mathcal{N} = 4$  SYM существует инструмент, который позволяет нам непертурбативно находить величины – Квантовая Спектральная Кривая (QSC). Если есть интересующий нас оператор, то в квантовую спектральную кривую можно подставить квантовые числа этого оператора (твист-2 оператор для Померона и твист-3 для Оддерона). Фундаментальное понимание Оддерона по-прежнему отсутствует и требуется изучения механизмов, лежащих в его основе. Основываясь на всём вышеописанном будет построен путь исследования Оддерона.

# 1. РАССЕЯНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Полное сечение  $\sigma(s)$  высокоэнергетического рассеяния двух бесцветных частиц  $A$  и  $B$  может быть записано в терминах факторов адронизации  $\Phi_i(q_i)$  как:

$$\sigma(s) = \int \frac{d^2q d^2q'}{(2\pi)^2 q^2 q'^2} \Phi_A(q) \Phi_B(q') \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \left(\frac{s}{s_0}\right)^\omega G_\omega(q, q'), \quad (1.1)$$

где  $G_\omega(q, q')$  –  $t$ -канальная парциальная волна глюон-глюонного рассеяния,  $s_0 = |q||q'|$ , зависит от поперечных импульсов, и  $s = 2p_A p_B$ , где  $p_A$  и  $p_B$  – 4-импульсы частиц  $A$  и  $B$  соответственно. Для парциальной волны  $t$ -канала справедливо следующее уравнение Бете-Салпитера

$$\omega G_\omega(q, q_1) = \delta^{D-2}(q - q_1) + \int d^{D-2}q_2 K(q, q_2) G_\omega(q_2, q_1), \quad (1.2)$$

где  $\omega$  являются собственными значениями, а  $K(q_1, q_2)$  – БФКЛ ядро интегрального уравнения. Уравнение (1.2) на  $G_\omega$  связано с лестницами из глюонов, показанных на рисунке 3.

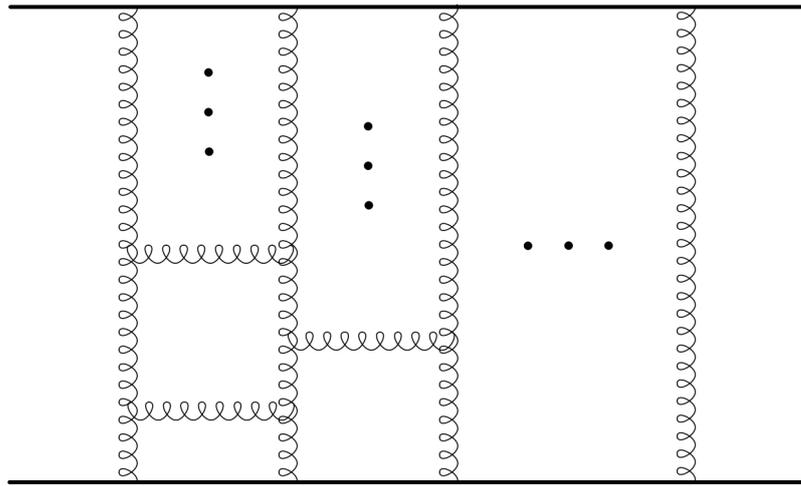


Рисунок 3 — С точки зрения суммирования лестниц глюонов: Померон – суммирование лестниц с двумя вертикальными ногами, а Оддерон – суммирования лестниц с тремя вертикальными линиями.

## 2. ПОМЕРОН И ОДДЕРОН

Собственные значения уравнения (1.2) зависят от  $\omega$ , которые в свою очередь классифицируются набором чисел. Есть разные классы решений уравнения Бете-Салпитера. Первый класс классифицируется двумя квантовыми числами:  $\omega = \omega(n, \nu)$ , целое  $n$  (конформный спин) и вещественное  $\nu$ . Этот класс решений называется – Померон. Значение  $\omega$  при  $n = 0$  и  $\nu = 0$  определяет поведение  $\sigma(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Второй класс решений зависит от трёх квантовых чисел – Оддерон. Аналогично, значения квантовых чисел из  $\omega$  влияет на поведение сечения.

Вычислить эти величины в рамках КХД при высоких порядках по константе связи сложно (у нас есть только диаграммная техника). Но у нас есть принцип максимальной трансцендентальности, который утверждает, что определенная часть ответа из КХД совпадает с ответом в  $\mathcal{N} = 4$  SYM. Локальные операторы в  $\mathcal{N} = 4$  SYM имеют квантовые числа  $(J_1, J_2, J_3, \Delta, S_1, S_2)$ .

Задача вычисления  $\omega$  для Померона эквивалентна вычисления  $S_1 + 1$  при квантовых числах  $J_1 = 2$ ,  $J_2 = J_3 = 0$  и  $S_2 = n$ . Числа  $\nu$  и  $\Delta$  связаны формулой:  $\nu = -i\Delta/2$ . Т.е. аналогом нахождения  $\omega(n, \nu)$  в рамках высокоэнергетического рассеяния в КХД будет являться нахождение  $S_1(\Delta, S_2)$  в  $\mathcal{N} = 4$  SYM. Аналогичная связь существует для  $\omega$  в случае Оддеронного состояния.

Одним из основных аспектов интегрируемости  $\mathcal{N} = 4$  SYM является описание плоского спектра в терминах конечного набора функциональных уравнений, известных как Квантовая Спектральная Кривая (QSC). QSC сопоставлен уникальный набор функций  $\mathbf{P}_a(u)$  и  $\mathbf{Q}_i(u)$  (с  $a, i = 1, \dots, 4$ ), которые имеют фиксированную аналитическую структуру и удовлетворяют множеству связанных разностных уравнений, называемых QQ-системой.

Режим БФКЛ для Померона определяется, когда спин  $S_1 \rightarrow -1$ , константа связи  $g \equiv \sqrt{\lambda}/(4\pi) \rightarrow 0$  и отношение  $\Lambda \equiv g^2/(S_1 + 1)$  является конечным. Приближение БФКЛ в лидирующем порядке соответствует сум-

мированию всех степеней  $[g^2/(S_1 + 1)]^n$ . Приведенная выше  $\lambda$  – константа ‘т Хофта. Результат связи  $S_1$  и  $\Delta$  в  $\mathcal{N} = 4$  SYM:

$$S_1 + 1 = 4g^2 \left[ -\psi \left( \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) + 2\psi(1) + \mathcal{O}(g^2) \right], \quad (2.1)$$

где  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  – полигамма-функция первого порядка. Для Оддерона подобно, но  $S_1 \rightarrow -2$ ,  $\Lambda \equiv g/(S_1 + 2)$  и  $[g/(S_1 + 2)]^n$ .

### 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ QSC

Для физических состояний все  $Q$ -функции имеют асимптотику при больших  $u$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a &\sim A_a u^{-\tilde{M}_a}, & \mathbf{P}^a &\sim A^a u^{\tilde{M}_a-1}, \\ \mathbf{Q}_i &\sim B_i u^{\hat{M}_i-1}, & \mathbf{Q}^i &\sim B^i u^{-\hat{M}_i}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Некоторые параметры  $\tilde{M}_a$  и  $\hat{M}_i$  определяются, как показано ниже:

$$\tilde{M}_a = \left( \frac{J_1 + J_2 - J_3 + 2}{2}, \frac{J_1 - J_2 + J_3}{2}, \frac{-J_1 + J_2 + J_3 + 2}{2}, \frac{-J_1 - J_2 - J_3}{2} \right), \quad (3.2)$$

$$\hat{M}_i = \left( \frac{\Delta - S_1 - S_2 + 2}{2}, \frac{\Delta + S_1 + S_2}{2}, \frac{-\Delta - S_1 + S_2}{2}, \frac{-\Delta + S_1 - S_2}{2} \right). \quad (3.3)$$

$\mathbf{P}$ - и  $\mathbf{Q}$ -функции по крайней мере имеют квадратичные точки ветвления при  $u = \pm 2g$ . Из асимптотик (3.1) можно ожидать, что разрезы  $\mathbf{P}$ -функций будут короткими. Минимальный выбор для функций  $\mathbf{P}_a(u)$  и  $\mathbf{P}^a(u)$ ,  $a = 1, \dots, 4$  – иметь только один короткий разрез на действительной оси. Из асимптотики  $\mathbf{Q}$ -функций приходится считать разрезы этих функций длинными. Итак, минимальный выбор для  $\mathbf{Q}_i(u)$  и  $\mathbf{Q}^i(u)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  – это иметь только один длинный разрез на действительной оси. Аналитическая структура  $\mathbf{P}$ - и  $\mathbf{Q}$ -функций представлена на рисунке 4.



Рисунок 4 — Естественное предположение об аналитической структуре  $Q$ -функций на определяющем листе.

### 3.1 ОДДЕРОН С $P$ -ФУНКЦИЯМИ ОПРЕДЕЛЁННОЙ ЧЁТНОСТИ

В общем виде параметризация  $P$ -функций даётся формулой (разложение в ряд Лорана):

$$\mathbf{P}_a = x^{-\tilde{M}_a} \left( g^{-\tilde{M}_a} A_a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_{a,2k}}{x^{2k}} \right). \quad (3.4)$$

После введения параметризация  $g \equiv \Lambda w$  предыдущую формулу можно переписать:

$$\mathbf{P}_a = x^{-\tilde{M}_a} \left( (\Lambda w)^{-\tilde{M}_a} A_a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_{a,2k}}{x^{2k}} \right). \quad (3.5)$$

Переменная Жуковского:

$$x(u) = \frac{u + \sqrt{u - 2g}\sqrt{u + 2g}}{2g} = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4g^2}}{2g}, \quad (3.6)$$

после подстановки параметризацию для  $g$ , получаем:

$$x(u) = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4(\Lambda w)^2}}{2\Lambda w}. \quad (3.7)$$

Состояние определяется следующими зарядами:

$$\begin{aligned} J_1 &= 3, & J_2 &= 0, & J_3 &= 0, \\ S_1 &= S = w - 2, & S_2 &= 0, & \Delta &= 3 + S + \mathcal{O}(g^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

подставляя их, параметры  $\tilde{M}_a$  и  $\hat{M}_i$  принимают вид:

$$\tilde{M}_a = \left( \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right), \quad (3.9)$$

$$\hat{M}_i = \left( \frac{\Delta - w + 4}{2}, \frac{\Delta + w - 2}{2}, \frac{-\Delta - w + 4}{2}, \frac{-\Delta + w - 2}{2} \right). \quad (3.10)$$

Коэффициенты  $A_a$  и  $B_j$  задаются в виде:

$$A_a = (A_1, A_2, A_3, A_4) , \quad (3.11)$$

$$B_j = (B_1, B_2, B_3, B_4) . \quad (3.12)$$

Константы  $A_a$  и  $B_j$  явно выражаются через  $\tilde{M}_a$  и  $\hat{M}_j$  (без суммирования по  $a$  (для  $A^a A_a$ ) и  $j$  (для  $B^j B_j$ )):

$$\mathbf{A}_a = A^a A_a = i \frac{\Pi_j(\tilde{M}_a - \hat{M}_j)}{\Pi_{b \neq a}(\tilde{M}_a - \tilde{M}_b)} , \quad \mathbf{B}_j = B^j B_j = i \frac{\Pi_a(\hat{M}_j - \tilde{M}_a)}{\Pi_{k \neq j}(\hat{M}_j - \hat{M}_k)} . \quad (3.13)$$

Тогда, подставив заряды (3.8), можно получить выражения:

$$A^1 A_1 = -A^4 A_4 = \frac{i}{192} \cdot (-1 + \Delta - w)(7 + \Delta - w) \cdot (-7 + \Delta + w)(1 + \Delta + w) , \quad (3.14)$$

$$A^2 A_2 = -A^3 A_3 = -\frac{i}{96} \cdot (1 + \Delta - w)(5 + \Delta - w) \cdot (-5 + \Delta + w)(-1 + \Delta + w) . \quad (3.15)$$

Согласно лево-правой симметрии для  $\mathbf{P}$ -функций

$$\mathbf{P}^a = \chi^{ac} \mathbf{P}_c , \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.16)$$

откуда получаются следующие соотношения для  $\mathbf{P}$ -функций:

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}_1 , \quad \mathbf{P}^3 = -\mathbf{P}_2 . \quad (3.17)$$

Т.к. определяющим членом для  $\mathbf{P}_a$  является  $A_a$  равно как и  $A^a$  для  $\mathbf{P}^a$ , то можно совершить замену  $A^4 \rightarrow A_1$  и  $A^3 \rightarrow -A_2$ . Наименьшим порядком

для  $\mathbf{A}_a$  является  $w^0$ . Есть возможность положить  $A_1 = A_2 = 1$ , тогда:

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_4 = -A_1A_4 = -A_4 = \mathcal{O}(w^0) , \quad (3.18)$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}_3 = A_2A_3 = A_3 = \mathcal{O}(w^0) . \quad (3.19)$$

Можно сделать вывод о виде коэффициентов  $A_a$ :

$$A_a = (1, 1, -\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) , \quad (3.20)$$

или, записывая иначе,  $A_a$  принимаю вид

$$A_a = (1, 1, A_3, A_4) . \quad (3.21)$$

Значения для  $\tilde{M}_a$  (3.9) и  $A_a$  (3.21) в  $\mathbf{P}_a$  (3.5), это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \frac{1}{(\Lambda wx)^{5/2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{1,2k}}{x^{2k+5/2}} , \\ \mathbf{P}_2 &= \frac{1}{(\Lambda wx)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{2,2k}}{x^{2k+3/2}} , \\ \mathbf{P}_3 &= A_3(\Lambda wx)^{1/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{3,2k}}{x^{2k-1/2}} , \\ \mathbf{P}_4 &= A_4(\Lambda wx)^{3/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{4,2k}}{x^{2k-3/2}} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для  $\mathbf{P}$ -функций существует  $H$ -симметрия, которая даёт возможность прибавлять к быстрорастущим функциям медленно растущие с ко-

эффицентом, т.е. можно:

$$\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2 + \delta_1 \mathbf{P}_1, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3 + \delta_2 \mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3 + \delta_3 \mathbf{P}_1,$$

...

Есть возможность эффективно сократить член содержащий  $c_{4,4}$ , если учесть  $\mathbf{P}_4 \rightarrow \mathbf{P}_4 + \alpha \mathbf{P}_1$  и положить  $\alpha = -c_{4,4} g^{5/2}$ . Аналогично можно убрать слагаемое с  $c_{3,2}$ , если применить  $\mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3 + \beta \mathbf{P}_2$ , положив  $\beta = -c_{3,2} g^{3/2}$ . Раз так, то можно установить  $c_{3,2} = c_{4,4} = 0$ .

Разложение для переменной Жуковского при  $w \rightarrow 0$ :

$$x(u) = \frac{u}{\Lambda w} - \frac{\Lambda w}{u} - \frac{(\Lambda w)^3}{u^3} + \dots \quad (3.24)$$

Предполагается, что скейлинг  $\mathbf{P}$ -функции, т.е. её минимальный порядок, для всех членов одинаков и определяется первым членом. Минимальный порядок лидирующего члена  $\mathcal{O}(w^0)$ . Для остальных членов минимальным будет  $\mathcal{O}(c_{a,2k} \cdot w^{\tilde{M}_a+2k})$ , тогда получаем:

$$c_{a,2k} = \mathcal{O}(w^{-\tilde{M}_a-2k}). \quad (3.25)$$

Можно ввести аналитическое продолжение для  $\mathbf{P}$ -функции:  $\tilde{\mathbf{P}}(x) \equiv \mathbf{P}(1/x)$ . Для  $\tilde{\mathbf{P}}$ -функции также предполагается, что скейлинг определяется первым членом и одинаков для всех. Для лидирующего члена  $\mathcal{O}(w^{-2\tilde{M}_a})$ , минимальным он будет у  $\tilde{\mathbf{P}}_1$ , т.е.  $\mathcal{O}(w^{-5})$ . Для остальных членов минимальным будет  $\mathcal{O}(c_{a,2k} \cdot w^{-\tilde{M}_a-2k})$ . Такое условие приводит к:

$$c_{a,2k} = \mathcal{O}(w^{\tilde{M}_a+2k-5}). \quad (3.26)$$

Почти для всех  $k$  ( $1 \dots +\infty$ ) и  $a$  ( $1 \dots 4$ ) степень  $w$  в (3.26) больше степени в (3.25). Это приводит к параметризации для коэффициентов  $c_{a,2k}$  (ряд по

степеням  $w$ ):

$$c_{a,2k} = (\Lambda w)^{2k+\tilde{M}_a-5} \sum_{m=0}^{+\infty} c_{a,2k}^{(m)} w^m . \quad (3.27)$$

Исключениями являются  $c_{3,2}^{(0)}$ ,  $c_{3,2}^{(1)}$ ,  $c_{4,2}^{(0)}$ ,  $c_{4,2}^{(1)}$ ,  $c_{4,2}^{(2)}$  и  $c_{4,2}^{(3)}$ . Условие (3.25) приводит к  $c_{3,2}^{(0)} = c_{3,2}^{(1)} = c_{4,2}^{(0)} = c_{4,2}^{(1)} = c_{4,2}^{(2)} = c_{4,2}^{(3)} = 0$ .

БФКЛ режим:  $g \rightarrow 0 \Rightarrow w \rightarrow 0$ . Выражение для  $\mathbf{P}$ -функции в пертурбативном режиме:

$$\mathbf{P}_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_a^{(k)} g^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}_a^{(k)} w^k . \quad (3.28)$$

Можно предположить, что если пойти под разрез, результат  $\tilde{\mathbf{P}}_a$  можно выразить как линейную комбинацию исходных  $\mathbf{P}$ -функций

$$\tilde{\mathbf{P}}_a = \mu_{ab} \chi^{bc} \mathbf{P}_c . \quad (3.29)$$

Поскольку  $\mu_{ab}$   $i$ -периодична на листе с длинными разрезами, аналитическое продолжение  $\mu_{ab}$  на листе с короткими разрезами задается соотношением

$$\tilde{\mu}_{ab}(u) = \mu_{ab}(u + i) . \quad (3.30)$$

Получается, что  $\tilde{\mu}_{ab}(u)$  имеет ту же структуру разрезов, что и  $\mu_{ab}(u)$ . Для различия между версией с коротким / длинным разрезом одной и той же функции будет использована шляпа (hat) / галочка (check) над символом  $\mu$ . Так же в дальнейшем будет использовано дополнительное обозначение  $\mu_{ab}^+(u) = \mu_{ab}(u + i/2)$ . Тогда для  $\check{\mu}_{ab}$  имеется  $i$ -периодическое условие

$$\check{\mu}_{ab}(u + i) = \check{\mu}_{ab}(u) . \quad (3.31)$$

Для аналитического продолжения под всеми разрезами можно записать уравнение  $\mathbf{P}\mu$ -системы:

$$\tilde{\mu}_{ab} - \mu_{ab} = \mathbf{P}_a \tilde{\mathbf{P}}_b - \mathbf{P}_b \tilde{\mathbf{P}}_a . \quad (3.32)$$

при этом  $\mu_{23} = \mu_{14}$ . Из двух предыдущих уравнений можно получить линейное разностное уравнение на  $\hat{\mu}_{ab}$

$$\hat{\mu}_{ab}^{++} = \hat{\mu}_{ab} + \mathbf{P}_a \hat{\mu}_{bc} \mathbf{P}^c - \mathbf{P}_b \hat{\mu}_{ac} \mathbf{P}^c . \quad (3.33)$$

Нулевой порядок разложения  $\mathbf{P}$ -функций (ЛО, при  $w^0$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(0)} &= \frac{1}{u^{5/2}} , & (3.34) \\ \mathbf{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{u^{3/2}} , \\ \mathbf{P}_3^{(0)} &= A_3^{(0)} u^{1/2} + \frac{3c_{3,2}^{(0)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{3,2}^{(2)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} , \\ \mathbf{P}_4^{(0)} &= A_4^{(0)} u^{3/2} + \frac{7c_{4,2}^{(0)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{4,4}^{(0)}}{u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(2)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} . \end{aligned}$$

При этом коэффициенты  $A_3^{(0)}$  и  $A_4^{(0)}$  принимают следующие значения:

$$A_3^{(0)} = \frac{(\Delta^2 - 1) \cdot (\Delta^2 - 25)}{96 i} , \quad A_4^{(0)} = \frac{(\Delta^2 - 1) \cdot (\Delta^2 - 49)}{192 i} . \quad (3.35)$$

Согласно разложению пертурбативного решения вокруг  $S = -2$ , можно считать, что асимптотики  $\mu$ -функций имеют вид:

$$(\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{24}, \mu_{34}) \sim (u^0, u^2, u^3, u^4, u^6) e^{2\pi|u|} . \quad (3.36)$$

Поэтому этой асимптотике можно поставить в соответствие следующий

анзац:

$$\begin{aligned}
\mu_{12}^{(0)+} &= w^{-5} b_{1,1} \mathcal{P}(u) , & (3.37) \\
\mu_{13}^{(0)+} &= w^{-5} (b_{2,1} u^2 + b_{2,2}) \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{14}^{(0)+} &= w^{-5} (b_{3,1} u^3 + b_{3,2} u) \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{24}^{(0)+} &= w^{-5} (b_{4,1} u^4 + b_{4,2} u^2 + b_{4,3}) \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{34}^{(0)+} &= w^{-5} (b_{5,1} u^6 + b_{5,2} u^4 + b_{5,3} u^2 + b_{5,4}) \mathcal{P}(u) ,
\end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}(u)$  –  $i$ -периодическая функция. После подстановки (3.32) можно зафиксировать полиномиальную часть, выразив все коэффициенты  $b$  через единственный  $b_{1,1}$ . Также фиксируется оставшийся коэффициент в LO  $\mathbf{P}$ -функциях  $c_{4,2}^{(4)}$ :

$$c_{4,2}^{(4)} = -i \frac{(\Delta^2 - 1)^2 \Lambda^4}{192} . \quad (3.38)$$

Исходя из описанного выше, можно переопределить функцию  $\mathcal{P}(u)$ , включив в неё функцию  $b_{1,1}$ . Результат этого будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
\mu_{12}^{(0)+} &= w^{-5} \mathcal{P}(u) , & (3.39) \\
\mu_{13}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{i(\Delta^2 - 1)^2}{32} \left( u^2 - \frac{1}{12} \right) \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{14}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{i(\Delta^2 - 1)^2}{48} u \left( u^2 + \frac{1}{4} \right) \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{24}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{i(\Delta^2 - 1)^2}{64} \left( u^2 + \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{P}(u) , \\
\mu_{34}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{(\Delta^2 - 1)^4}{18432} \left( u^2 - \frac{3}{4} \right) \left( u^2 + \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{P}(u) .
\end{aligned}$$

Теперь осталось определить периодическую функцию  $\mathcal{P}(u)$ . Учитывая знакопеременность  $\mu$ -функций, можно написать минимальный анзац для этой функции:

$$\mathcal{P}(u) = C_1 \exp(2\pi u) + C_2 \exp(-2\pi u) + C_3 . \quad (3.40)$$

Пользуясь аналитической структурой разрезов для  $\mathbf{P}$ -функций, условием  $i$ -периодичности  $\mu$ -функций, а также уравнением  $\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mu_{1b} \mathbf{P}^b$ , можно по-

лучить:

$$C_1 = -\frac{i}{\pi^2 \Lambda^5 (\Delta^2 - 1)}, \quad C_2 = C_1, \quad C_3 = -C_1 - C_2. \quad (3.41)$$

Подводя итог LO решения  $\mathbf{P}\mu$ -системы с учётом ограничений, наложенных на  $c_{a,2k}^{(m)}$ , и выражений для  $A^{(0)}$  (3.35) получаются следующие  $\mathbf{P}^{(0)}$ -функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(0)} &= \frac{1}{u^{5/2}}, \\ \mathbf{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{u^{3/2}}, \\ \mathbf{P}_3^{(0)} &= -i \frac{(\Delta^2 - 1)(\Delta^2 - 25)}{96} u^{1/2}, \\ \mathbf{P}_4^{(0)} &= -i \frac{(\Delta^2 - 1)(\Delta^2 - 49)}{192} u^{3/2} - i \frac{(\Delta^2 - 1)^2}{192} u^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

и выражения для  $\mu$ -функций:

$$\begin{aligned} \mu_{12}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{4i}{\pi^2 (\Delta^2 - 1) \Lambda^5} \cosh^2(\pi u), \\ \mu_{13}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{\Delta^2 - 1}{8\pi^2 \Lambda^5} \left(u^2 - \frac{1}{12}\right) \cosh^2(\pi u), \\ \mu_{14}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{\Delta^2 - 1}{12\pi^2 \Lambda^5} u \left(u^2 + \frac{1}{4}\right) \cosh^2(\pi u), \\ \mu_{24}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{\Delta^2 - 1}{16\pi^2 \Lambda^5} \left(u^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \cosh^2(\pi u), \\ \mu_{34}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{i(\Delta^2 - 1)^3}{4608\pi^2 \Lambda^5} \left(u^2 - \frac{3}{4}\right) \left(u^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \cosh^2(\pi u). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Следующий порядок разложения  $\mathbf{P}$ -функций (NLO, при  $w^1$ ) имеет

ВИД:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(1)} &= 0 , & (3.44) \\
\mathbf{P}_2^{(1)} &= 0 , \\
\mathbf{P}_3^{(1)} &= A_3^{(1)} u^{1/2} + \frac{3c_{3,2}^{(1)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{3,2}^{(3)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} , \\
\mathbf{P}_4^{(1)} &= A_4^{(1)} u^{3/2} + \frac{7c_{4,2}^{(1)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{4,4}^{(1)}}{u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(3)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} .
\end{aligned}$$

При этом коэффициенты  $A_3^{(1)}$  и  $A_4^{(1)}$  выглядят, как показано ниже:

$$A_3^{(1)} = \frac{(\Delta^2 - 5)}{8i} , \quad A_4^{(1)} = \frac{(\Delta^2 + 7)}{16i} . \quad (3.45)$$

Все коэффициенты  $c_{a,2k}^{(m)}$ , за исключением одного, равны нулю из-за ограничений наложенных ранее. Один оставшийся коэффициент в NLO  $\mathbf{P}$ -функциях  $c_{4,2}^{(5)}$ :

$$c_{4,2}^{(5)} = i \frac{(\Delta^2 - 1)\Lambda^4}{16} . \quad (3.46)$$

Вид  $\mu$ -функций приведён в [A](#). В итоге NLO решение  $\mathbf{P}\mu$ -системы задаётся  $\mathbf{P}$ -функциями

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(1)} &= 0 , & (3.47) \\
\mathbf{P}_2^{(1)} &= 0 , \\
\mathbf{P}_3^{(1)} &= -i \frac{(\Delta^2 - 5)}{8} u^{1/2} , \\
\mathbf{P}_4^{(1)} &= -i \frac{(\Delta^2 + 7)}{16} u^{3/2} + i \frac{(\Delta^2 - 1)}{16} u^{-1/2} .
\end{aligned}$$

При изменении квантовых зарядов на

$$\begin{aligned}
J_1 &= 3 , & J_2 &= 0 , & J_3 &= 0 , & (3.48) \\
S_1 &= S = w - 2 , & S_2 &= n , & \Delta &= 3 + S + \mathcal{O}(g^2) ,
\end{aligned}$$

получается, что для LO  $\mathbf{P}$ -функций изменяются только  $A_a^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} A_3^{(0)} &= \frac{((\Delta + n)^2 - 1) \cdot ((\Delta - n)^2 - 25)}{96 i}, \\ A_4^{(0)} &= \frac{((\Delta + n)^2 - 1) \cdot ((\Delta - n)^2 - 49)}{192 i}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

При фиксации полиномиальной части в анзаце для  $\mu$ -функций, все  $b$  по-прежнему выражаются через единственную  $b_{1,1}$ , однако теперь имеют немного другие значения. Оставшийся свободный коэффициент в LO  $\mathbf{P}$ -функциях  $c_{4,2}^{(4)}$  принимает вид:

$$c_{4,2}^{(4)} = -i \frac{((\Delta^2 - 1)^2 + n^4 - 2n^2(\Delta^2 + 1))\Lambda^4}{192}. \quad (3.50)$$

Фиксация коэффициентов в  $\mathcal{P}(u)$  даёт:

$$C_1 = -\frac{i}{\pi^2 \Lambda^5 ((\Delta - n)^2 - 1)}, \quad C_2 = C_1, \quad C_3 = -C_1 - C_2. \quad (3.51)$$

Итогом решения LO  $\mathbf{P}\mu$ -системы, с учётом вышеизложенного, будут  $\mathbf{P}$ -функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(0)} &= \frac{1}{u^{5/2}}, \\ \mathbf{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{u^{3/2}}, \\ \mathbf{P}_3^{(0)} &= -i \frac{((\Delta + n)^2 - 1) \cdot ((\Delta - n)^2 - 25)}{96} u^{1/2}, \\ \mathbf{P}_4^{(0)} &= -i \frac{((\Delta + n)^2 - 1) \cdot ((\Delta - n)^2 - 49)}{192} u^{3/2} - \\ &\quad - i \frac{((\Delta^2 - 1)^2 + n^4 - 2n^2(\Delta^2 + 1))}{192} u^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

и  $\mu$ -функции:

$$\begin{aligned}
\mu_{12}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{4i}{\pi^2((\Delta - n)^2 - 1)\Lambda^5} \cosh^2(\pi u) , \\
\mu_{13}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{(\Delta + n)^2 - 1}{8\pi^2\Lambda^5} \left(u^2 - \frac{1}{12}\right) \cosh^2(\pi u) , \\
\mu_{14}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{(\Delta + n)^2 - 1}{12\pi^2\Lambda^5} u \left(u^2 + \frac{1}{4}\right) \cosh^2(\pi u) , \\
\mu_{24}^{(0)+} &= w^{-5} \frac{(\Delta + n)^2 - 1}{16\pi^2\Lambda^5} \left(u^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \cosh^2(\pi u) , \\
\mu_{34}^{(0)+} &= -w^{-5} \frac{i((\Delta - n)^2 - 1)((\Delta + n)^2 - 1)^2}{4608\pi^2\Lambda^5} \cdot \\
&\quad \cdot \left(u^2 - \frac{3}{4}\right) \left(u^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \cosh^2(\pi u) .
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Для NLO  $\mathbf{P}$ -функций также изменяются только коэффициенты  $A_a^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}
A_3^{(1)} &= \frac{(3\Delta^2 + 3n^2 + 4\Delta n - 15)}{24 i} , \\
A_4^{(1)} &= \frac{(3\Delta^2 + 3n^2 + 8\Delta n + 21)}{48 i} .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

При решении  $\mathbf{P}\mu$ -системы аналогично находится коэффициент  $c_{4,2}^{(5)}$ :

$$c_{4,2}^{(5)} = i \frac{(3(\Delta^2 - 1)^2 + 3n^4 - 2n^2(\Delta^2 + 3))\Lambda^4}{48(\Delta^2 + n^2 - 1)} . \tag{3.55}$$

И тогда NLO  $\mathbf{P}$ -функции из решения принимают вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(1)} &= 0 , \\
\mathbf{P}_2^{(1)} &= 0 , \\
\mathbf{P}_3^{(1)} &= -i \frac{(3\Delta^2 + 3n^2 + 4\Delta n - 15)}{24} u^{1/2} , \\
\mathbf{P}_4^{(1)} &= -i \frac{(3\Delta^2 + 3n^2 + 8\Delta n + 21)}{48} u^{3/2} + \\
&\quad + i \frac{(3(\Delta^2 - 1)^2 + 3n^4 - 2n^2(\Delta^2 + 3))}{48(\Delta^2 + n^2 - 1)} u^{-1/2} .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Можно взять несколько  $QQ$ -соотношений из множества возможных:

$$\mathcal{Q}_{a|j}^+ - \mathcal{Q}_{a|j}^- = P_a \mathbf{Q}_j, \quad \mathbf{Q}_j = -P^a \mathcal{Q}_{a|j}^\pm. \quad (3.57)$$

Смещая аргумент  $u$  на  $\pm i, \pm 2i$ , получаем линейную систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} P^{a[-3]} \mathcal{Q}_{a|j} &= \mathbf{Q}_j^{[-3]} - \mathbf{Q}_j^{[-1]} (P^{a[-3]} P_a^{[-1]}), \\ P^{a[-1]} \mathcal{Q}_{a|j} &= \mathbf{Q}_j^{[-1]}, \\ P^{a[+1]} \mathcal{Q}_{a|j} &= \mathbf{Q}_j^{[+1]}, \\ P^{a[+3]} \mathcal{Q}_{a|j} &= \mathbf{Q}_j^{[+3]} - \mathbf{Q}_j^{[+1]} (P^{a[+3]} P_a^{[+1]}). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из неё можно выразить  $\mathcal{Q}_{a|j}$  в терминах  $P_a$ ,  $P^a$  и  $\mathbf{Q}_j$ . Следствием этого является связь  $P$ - и  $Q$ -функций через уравнение Бакстера 4-го порядка, т.е. с четырьмя сдвигами переменной:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{[+4]} - \mathbf{Q}^{[+2]} \left[ D_1 - P_a^{[+2]} P^{a[+4]} D_0 \right] + \\ + \mathbf{Q} \left[ D_2 - P_a P^{a[+2]} D_1 + P_a P^{a[+4]} D_0 \right] - \\ - \mathbf{Q}^{[-2]} \left[ \bar{D}_1 + P_a^{[-2]} P^{a[-4]} \bar{D}_0 \right] + \mathbf{Q}^{[-4]} = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $D_0, D_1, D_2, \bar{D}_0, \bar{D}_1$  – детерминанты собранные из  $P_a$  и  $P^a$  функций. Используя LO  $P$ -функции и подставляя их в эти детерминанты, можно вычислить уравнение Бакстера 4-го порядка. Для  $S_2 = 0$  результат представлен формулой (3.60). При  $S_2 = n$  уравнение Бакстера имеет структуру показанную формулой (3.61). Учитывая NLO  $P$ -функции, получается саб-лидирующее уравнение Бакстера 4-го порядка, его вид для  $S_2 = n$  представлен в В.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q}(u) \cdot \frac{1}{16u^{3/2}} \left( (\Delta^2 - 49)(\Delta^2 - 1) + 96(\Delta^2 - 49)u^6 - \right. & (3.60) \\
& \quad \left. -16(\Delta^4 + 54\Delta^2 + 293)u^4 + (\Delta^2 - 1)(\Delta^4 - 90\Delta + 2137)u^2 \right) + \\
& + \mathcal{Q}(u - 2i) \cdot (u - 2i)^{5/2} \left( -8 + (\Delta^2 - 49)u(u + i) \right) + \\
& + \mathcal{Q}(u + 2i) \cdot (u + 2i)^{5/2} \left( -8 + (\Delta^2 - 49)u(u - i) \right) + \\
& + \mathcal{Q}(u - i) \cdot \frac{1}{4(u - i)^{5/2}} \left( u(522\Delta^2 + \Delta^4(u + i)(2u - 3i)(-3 + u(u - 3i))) + \right. \\
& \quad \left. + 2\Delta^2 u(u(182 + u(2u(3 + 2(-2u - 9i)u) + 155i)) + 134i) + \right. \\
& \quad \left. + u(u(-5478 + u(2u(-2631 + 196u(2u - 9i)) + 977i)) + \right. \\
& \quad \left. + 6010i) + 2431) - 64i(\Delta^2 + 7) \right) + \\
& + \mathcal{Q}(u + i) \cdot \frac{1}{4(u + i)^{5/2}} \left( u(522\Delta^2 + \Delta^4(u - i)(2u + 3i)(-3 + u(u + 3i))) - \right. \\
& \quad \left. - 2\Delta^2 u(u(-182 + u(2u(-3 + 2(2u + 9i)u) + 155i)) + 134i) + \right. \\
& \quad \left. + u(u(-5478 + u(2u(-2631 + 196u(2u + 9i)) - 977i)) - \right. \\
& \quad \left. - 6010i) + 2431) + 64i(\Delta^2 + 7) \right) = \\
& = 0 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}(u-i) \cdot (u-i)^{5/2} \frac{1}{4(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2} ((n+\Delta)^2-1)^2. \tag{3.61} \\
& \cdot ((n-\Delta)^2-25) \left( \frac{1}{(u-i)^5} (2u^3-9iu^2-15u+9i) \cdot \right. \\
& \cdot ((n+\Delta)^2-1) \left( ((n-\Delta)^2-49)u^2+i((n-\Delta)^2-49)u-8 \right) - \\
& - 8((2u^2+iu+1)n^2-2(2u^2+iu+1)\Delta n+\Delta^2+ \\
& \left. +2u^2(\Delta^2-49)+iu(\Delta^2-49)-65) \right) + \\
& + \mathbf{Q}(u+i) \cdot (u+i)^{5/2} \frac{1}{4(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2} ((n+\Delta)^2-1)^2. \\
& \cdot ((n-\Delta)^2-25) \left( \frac{1}{(u+i)^5} (2u^3+9iu^2-15u-9i) \cdot \right. \\
& \cdot ((n+\Delta)^2-1) \left( ((n-\Delta)^2-49)u^2-i((n-\Delta)^2-49)u-8 \right) - \\
& - 8((2u^2-iu+1)n^2-2(2u^2-iu+1)\Delta n+\Delta^2+ \\
& \left. +2u^2(\Delta^2-49)-iu(\Delta^2-49)-65) \right) + \\
& + \mathbf{Q}(u+2i) \cdot (u+2i)^{5/2} \frac{1}{(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2} (n+\Delta-1)^2(n+\Delta+1)^2. \\
& \cdot (n^2-2\Delta n+\Delta^2-25) \left( (n^2-2\Delta n+\Delta^2-49)u^2- \right. \\
& \left. -i(n^2-2\Delta n+\Delta^2-49)u-8 \right) + \\
& + \mathbf{Q}(u-2i) \cdot (u-2i)^{5/2} \frac{1}{(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2} (n+\Delta-1)^2(n+\Delta+1)^2. \\
& \cdot (n^2-2\Delta n+\Delta^2-25) \left( (n^2-2\Delta n+\Delta^2-49)u^2+ \right. \\
& \left. +i(n^2-2\Delta n+\Delta^2-49)u-8 \right) + \\
& + \mathbf{Q}(u) \cdot \frac{1}{16u^{3/2}(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2} ((n+\Delta)^2-1)^2 ((n-\Delta)^2-25) \cdot \\
& \cdot \left( (u^2+1)(n^6-2\Delta n^5) - (16u^4+(\Delta^2+91)u^2+\Delta^2+91)n^4+ \right. \\
& +4(u^2+1)(\Delta^3+\Delta)n^3+(96u^6+32(\Delta^2+27)u^4+ \\
& +(-\Delta^4+174\Delta^2+2227)u^2-\Delta^4+174\Delta^2+2099)n^2- \\
& -2\Delta(96u^6-704u^4+(\Delta^4-2\Delta^2-2047)u^2+\Delta^4- \\
& -2\Delta^2-1919)n+96(\Delta^2-49)u^6+\Delta^6-91\Delta^4+ \\
& \left. +(\Delta^6-91\Delta^4+2227\Delta^2-2137)u^2+2099\Delta^2-16u^4 \right. \\
& \cdot (\Delta^4-54\Delta^2+293)-2009) = \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Теперь сводим уравнение Бакстера 4-го порядка к уравнению 2-го. Зная  $P_a$  и  $Q_i$  можно построить  $Q_{a|j}$ , используя (3.57), это позволяет определить  $\omega_{ij}$

$$\omega_{ij} = Q_{a|i}^- Q_{b|j}^- \mu^{ab} . \quad (3.62)$$

Аналитическое продолжение под разрезами для  $Q$ -функций можно задать  $Q\omega$ -системой:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{ij} - \omega_{ij} &= Q_i \tilde{Q}_j - Q_j \tilde{Q}_i , \\ \tilde{Q}_i &= \omega_{ij} Q^j . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Используя (3.62), можем задать, так называемый, Вронскиан (определитель Вронского) для  $Q_1$  и  $Q_3$ :

$$Q_{a,b|1,3} = Q_1^+ Q_3^- - Q_1^- Q_3^+ . \quad (3.64)$$

При  $S_2 = 0$  получается следующая структура  $Q_{a,b|1,3}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{4iA}{\pi^2(\Delta^2 - 1)\Lambda^5 w^5}, \frac{A(\Delta^2 - 1)(12u^2 - 1)}{96\pi^2\Lambda^5 w^5}, \\ &\frac{A(\Delta^2 - 1)u(4u^2 + 1)}{48\pi^2\Lambda^5 w^5}, \frac{A(\Delta^2 - 1)u(4u^2 + 1)}{48\pi^2\Lambda^5 w^5}, \\ &\frac{A(\Delta^2 - 1)(4u^2 + 1)^2}{256\pi^2\Lambda^5 w^5}, -\frac{iA(\Delta^2 - 1)^3(4u^2 - 3)(4u^2 + 1)^2}{294912\pi^2\Lambda^5 w^5} \end{aligned} \right\} . \quad (3.65)$$

Для  $S_2 = n$  структура  $Q_{a,b|1,3}$  принимает немного другой вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{4iA}{\pi^2((n - \Delta)^2 - 1)\Lambda^5 w^5}, \frac{A((\Delta + n)^2 - 1)(12u^2 - 1)}{96\pi^2\Lambda^5 w^5}, \\ &\frac{A((\Delta + n)^2 - 1)u(4u^2 + 1)}{48\pi^2\Lambda^5 w^5}, \frac{A((\Delta + n)^2 - 1)u(4u^2 + 1)}{48\pi^2\Lambda^5 w^5}, \\ &\frac{A((\Delta + n)^2 - 1)(4u^2 + 1)^2}{256\pi^2\Lambda^5 w^5}, \\ &-\frac{iA((n - \Delta)^2 - 1)((\Delta + n)^2 - 1)^2(4u^2 - 3)(4u^2 + 1)^2}{294912\pi^2\Lambda^5 w^5} \end{aligned} \right\} . \quad (3.66)$$

В результате (3.59) можно свести к уравнению Бакстера 2-го порядка ис-

пользуя (3.64). Вид ЛО уравнения при  $S_2 = n$  для  $j = 1, 3$  и  $j = 2, 4$  показан ниже:

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1 + 8u^2 - (\Delta - n)^2)}{2u^{5/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u) + \\
& \quad + \frac{2(u - i)}{(u - i)^{3/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u - i) + \frac{2(u + i)}{(u + i)^{3/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u + i) = 0 , \\
& - \frac{(1 + 8u^2 - (\Delta + n)^2)}{2u^{5/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u) + \\
& \quad + \frac{2(u - i)}{(u - i)^{3/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u - i) + \frac{2(u + i)}{(u + i)^{3/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u + i) = 0 .
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Уравнение Бакстера 2-го порядка в NLO для  $S_2 = n$  при  $j = 1, 3$  и  $j = 2, 4$  принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Q}_{1,3}^{(1)}(u + i) + \mathcal{Q}_{1,3}^{(1)}(u - i) + \left( -2 + \frac{(\Delta - n)^2 - 1}{4u^{5/2}} \right) \mathcal{Q}_{1,3}^{(1)}(u) = \\
& = -\frac{i}{2(u + i)^{3/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u + i) + \frac{i}{2(u - i)^{3/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u - i) + \\
& \quad + \frac{u^{5/2} - \Lambda(\Delta - n)^2 - 1}{2u^{9/2}} \mathcal{Q}_{1,3}^{(0)}(u) , \\
& \mathcal{Q}^{(1)2,4}(u + i) + \mathcal{Q}^{(1)2,4}(u - i) + \left( -2 + \frac{(\Delta + n)^2 - 1}{4u^{5/2}} \right) \mathcal{Q}^{(1)2,4}(u) = \\
& = -\frac{i}{2(u + i)^{3/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u + i) + \frac{i}{2(u - i)^{3/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u - i) + \\
& \quad + \frac{u^{5/2} - \Lambda(\Delta + n)^2 - 1}{2u^{9/2}} \mathcal{Q}^{(0)2,4}(u) .
\end{aligned} \tag{3.68}$$

## 3.2 ОДДЕРОН С $P$ -ФУНКЦИЯМИ БЕЗ ОПРЕДЕЛЁННОЙ ЧЁТНОСТИ

Параметризация  $P$ -функций без определённой чётности с  $g \equiv \Lambda w$  имеет вид:

$$\mathbf{P}_a = x^{-\tilde{M}_a} \left( (\Lambda w)^{-\tilde{M}_a} A_a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{a,k}}{x^k} \right). \quad (3.69)$$

Подставляются значения для  $\tilde{M}_a$  (3.9) и  $A_a$  (3.21) в  $\mathbf{P}_a$  (3.69):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \frac{1}{(\Lambda w x)^{5/2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{1,k}}{x^{k+5/2}}, \\ \mathbf{P}_2 &= \frac{1}{(\Lambda w x)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{2,k}}{x^{k+3/2}}, \\ \mathbf{P}_3 &= A_3 (\Lambda w x)^{1/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{3,k}}{x^{k-1/2}}, \\ \mathbf{P}_4 &= A_4 (\Lambda w x)^{3/2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{4,k}}{x^{k-3/2}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Есть возможность эффективно сократить члены содержащий  $c_{4,4}$ ,  $c_{4,3}$  и  $c_{4,1}$ , если учесть  $\mathbf{P}_4 \rightarrow \mathbf{P}_4 + \alpha_1 \mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_4 \rightarrow \mathbf{P}_4 + \alpha_2 \mathbf{P}_2$  и  $\mathbf{P}_4 \rightarrow \mathbf{P}_4 + \alpha_3 \mathbf{P}_3$ , положив  $\alpha_1 = -c_{4,4} g^{5/2}$ ,  $\alpha_2 = -c_{4,3} g^{3/2}$  и  $\alpha_3 = -c_{4,1}/(g^{1/2} A_3)$ . Раз так, то можно установить  $c_{4,4} = c_{4,3} = c_{4,1} = 0$ . Аналогично можно убрать слагаемые при  $c_{3,3}$  и  $c_{3,2}$ , если применить  $\mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3 + \beta_1 \mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3 + \beta_2 \mathbf{P}_2$ , положив  $\beta_1 = -c_{3,3} g^{5/2}$  и  $\beta_2 = -c_{3,2} g^{3/2}$ . Следовательно, можно положить  $c_{3,3} = c_{3,2} = 0$ . Если учесть  $\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2 + \gamma_1 \mathbf{P}_1$ , то можно сократить слагаемое содержащее  $c_{2,1}$ , при  $\gamma_1 = -c_{2,1} g^{5/2}$ . Поэтому  $c_{2,1} = 0$ .

Предполагая, что поведение  $P$ -функции определяется поведением лидирующего коэффициента, получаем:

$$c_{a,k} = \mathcal{O} \left( w^{-\tilde{M}_a - k} \right). \quad (3.71)$$

С другой стороны, также предполагается, что скейлинг  $\tilde{\mathbf{P}}$ -функции определяется первым членом из  $\tilde{\mathbf{P}}_1$ , т.е.  $\tilde{\mathbf{P}}_a = \mathcal{O}(w^{-5})$ . Такое условие приводит к:

$$c_{a,k} = \mathcal{O}\left(w^{\tilde{M}_a+k-5}\right). \quad (3.72)$$

Т.к. почти для всех  $k$  и  $a$  степень  $w$  в (3.72) больше степени в (3.71), то параметризация для коэффициентов  $c_{a,k}$  (ряд по степеням  $w$ ):

$$c_{a,k} = (\Lambda w)^{k+\tilde{M}_a-5} \sum_{m=0}^{+\infty} c_{a,k}^{(m)} w^m. \quad (3.73)$$

Исключениями являются:

$$c_{4,1}^{(0-5)}, \quad c_{4,2}^{(0-3)}, \quad c_{4,3}^{(0-1)}, \quad c_{3,1}^{(0-3)}, \quad c_{3,2}^{(0-1)}.$$

Условие (3.71) приводит к тому, что все они равны нулю.

Лидирующий порядок  $\mathbf{P}$ -функций (ЛО, при  $w^0$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(0)} &= \frac{1}{u^{5/2}}, \\ \mathbf{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{u^{3/2}} + \frac{c_{2,1}^{(0)}}{u^{5/2}}, \\ \mathbf{P}_3^{(0)} &= A_3^{(0)} u^{1/2} + \frac{7c_{3,1}^{(0)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{3,1}^{(2)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{3,1}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} + \frac{3c_{3,2}^{(0)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{3,2}^{(2)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{c_{3,3}^{(0)}}{u^{5/2}}, \\ \mathbf{P}_4^{(0)} &= A_4^{(0)} u^{3/2} - \frac{21c_{4,1}^{(0)}}{16u^{11/2}} - \frac{5c_{4,1}^{(2)}}{8\Lambda^2 u^{7/2}} - \frac{c_{4,1}^{(4)}}{2\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{u^{1/2} c_{4,1}^{(6)}}{\Lambda^6} + \\ &\quad + \frac{7c_{4,2}^{(0)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{4,2}^{(2)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} + \frac{3c_{4,3}^{(0)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{4,3}^{(2)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{c_{4,4}^{(0)}}{u^{5/2}}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

С учётом всех введённых ранее ограничений получается:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(0)} &= \frac{1}{u^{5/2}} , & (3.75) \\
\mathbf{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{u^{3/2}} , \\
\mathbf{P}_3^{(0)} &= A_3^{(0)} u^{1/2} + \frac{c_{3,1}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} , \\
\mathbf{P}_4^{(0)} &= A_4^{(0)} u^{3/2} + \frac{c_{4,2}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} .
\end{aligned}$$

Следующий порядок разложения  $\mathbf{P}$ -функций (NLO, при  $w^1$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(1)} &= 0 , & (3.76) \\
\mathbf{P}_2^{(1)} &= \frac{c_{2,1}^{(1)}}{u^{5/2}} , \\
\mathbf{P}_3^{(1)} &= A_3^{(1)} u^{1/2} + \frac{7c_{3,1}^{(1)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{3,1}^{(3)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{3,1}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} + \frac{3c_{3,2}^{(1)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{3,2}^{(3)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{c_{3,3}^{(1)}}{u^{5/2}} , \\
\mathbf{P}_4^{(1)} &= A_4^{(1)} u^{3/2} - \frac{21c_{4,1}^{(1)}}{16u^{11/2}} - \frac{5c_{4,1}^{(3)}}{8\Lambda^2 u^{7/2}} - \frac{c_{4,1}^{(5)}}{2\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{u^{1/2} c_{4,1}^{(7)}}{\Lambda^6} + \\
&\quad + \frac{7c_{4,2}^{(1)}}{8u^{9/2}} + \frac{c_{4,2}^{(3)}}{2\Lambda^2 u^{5/2}} + \frac{c_{4,2}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} + \frac{3c_{4,3}^{(1)}}{2u^{7/2}} + \frac{c_{4,3}^{(3)}}{\Lambda^2 u^{3/2}} + \frac{c_{4,4}^{(1)}}{u^{5/2}} .
\end{aligned}$$

С учётом ограничений, наложенных на  $c_{a,k}^{(m)}$ , получаются следующие  $\mathbf{P}^{(1)}$ -функции:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(1)} &= 0 , & (3.77) \\
\mathbf{P}_2^{(1)} &= 0 , \\
\mathbf{P}_3^{(1)} &= A_3^{(1)} u^{1/2} + \frac{c_{3,1}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} , \\
\mathbf{P}_4^{(1)} &= A_4^{(1)} u^{3/2} + \frac{c_{4,2}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} .
\end{aligned}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение КХД задачи рассеяния адронов при высоких энергиях сводится к рассмотрению в  $\mathcal{N} = 4$  SYM, за счёт принципа максимальной трансцендентальности. Этот принцип позволяет получать определённую часть ответа из КХД, которую в ином случае, в самой КХД, вычислить не представляется возможным из-за сложности диаграмм. Померонное состояние, отвечающее за адрон-адронное взаимодействие, изучено достаточно хорошо, поэтому внимание уделено состоянию, отвечающему за адрон-антиадронное рассеяние, – Оддерону.

При решении уравнений Квантовой Спектральной Кривой были получены и проанализированы LO и NLO  $\mathbf{P}\mu$ -системы при  $S_2 = 0$ : (3.42), (3.47). Эта же работа была выполнена для новых  $\mathbf{P}\mu$ -систем – общего случая  $S_2 = n$ : (3.52), (3.56).

Посредством связи  $\mathbf{P}$ - и  $\mathbf{Q}$ -функций были получены дифференциальные уравнения четвертого порядка для  $\mathbf{Q}$ -функций с коэффициентами, построенными из  $\mathbf{P}_a$ : (3.61), (B.1). Получены новые уравнения Бакстера в лидирующем и саблидирующем порядках для Оддерона за счёт рассмотрения общего случая  $S_2 = n$ : (3.67), (3.68).

Дополнительно к этому выполнены начальные шаги по рассмотрению случая  $\mathbf{P}$ -функций без определённой чётности, найден общий вид этих функций в LO и NLO порядках: (3.75), (3.77).

## A. $\mu$ В NLO

Начальный анзац для NLO  $\mu$ -функции задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mu_{12}^{(1)+} &= \mu_{12}^{(0)+} \left( \frac{C_{1,1}}{\cosh^2(\pi u)} + C_{1,2} \Psi(u) \right) \cdot w + \\
&\quad + b_{1,1} \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{12}^{(0)+} , \\
\mu_{13}^{(1)+} &= \mu_{13}^{(0)+} \left( \frac{C_{2,1}}{\cosh^2(\pi u)} + C_{2,2} \Psi(u) \right) \cdot w + \\
&\quad + (b_{2,1} u^2 + b_{2,2}) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{13}^{(0)+} , \\
\mu_{14}^{(1)+} &= \mu_{14}^{(0)+} \left( \frac{C_{3,1}}{\cosh^2(\pi u)} + C_{3,2} \Psi(u) \right) \cdot w + \\
&\quad + (b_{3,1} u^3 + b_{3,2} u) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{14}^{(0)+} , \\
\mu_{24}^{(1)+} &= \mu_{24}^{(0)+} \left( \frac{C_{4,1}}{\cosh^2(\pi u)} + C_{4,2} \Psi(u) \right) \cdot w + \\
&\quad + (b_{4,1} u^4 + b_{4,2} u^2 + b_{4,3}) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{24}^{(0)+} , \\
\mu_{34}^{(1)+} &= \mu_{34}^{(0)+} \left( \frac{C_{5,1}}{\cosh^2(\pi u)} + C_{5,2} \Psi(u) \right) \cdot w + \\
&\quad + (b_{5,1} u^6 + b_{5,2} u^4 + b_{5,3} u^2 + b_{5,4}) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{34}^{(0)+} ,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

где  $\Psi$ -функция имеет вид

$$\Psi(u) = \psi^{(0)} \left( \frac{1}{2} - iu \right) + \psi^{(0)} \left( \frac{1}{2} + iu \right) - 2\psi^{(0)}(1) , \tag{A.2}$$

а  $\psi^{(0)}(u)$  – дигамма-функция. Для  $S_2 = 0$  все коэффициенты  $b$  выражаются через  $b_{3,1}$ :

$$b_{3,1} = -\frac{1}{6\pi^2 \Lambda^5} , \tag{A.3}$$

все  $C_{k,1} = 0$ , а все  $C_{k,2} = -1/2$ , при  $k = 1, \dots, 5$ .

В NLO  $\mathbf{P}\mu$ -системе  $\mu$ -функции принимают вид:

$$\begin{aligned}
\mu_{12}^{(1)+} &= -\frac{\mu_{12}^{(0)+}\Psi(u)w}{2} - \frac{8i}{\pi^2(\Delta^2 - 1)^2\Lambda^5} \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{12}^{(0)+}, \\
\mu_{13}^{(1)+} &= -\frac{\mu_{13}^{(0)+}\Psi(u)w}{2} + \left( \frac{1}{4\pi^2\Lambda^5}u^2 + \frac{7}{48\pi^2\Lambda^5} \right) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{13}^{(0)+}, \\
\mu_{14}^{(1)+} &= -\frac{\mu_{14}^{(0)+}\Psi(u)w}{2} - \left( \frac{1}{6\pi^2\Lambda^5}u^3 + \frac{1}{24\pi^2\Lambda^5}u \right) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{14}^{(0)+}, \\
\mu_{24}^{(1)+} &= -\frac{\mu_{24}^{(0)+}\Psi(u)w}{2} - \left( \frac{3}{8\pi^2\Lambda^5}u^4 + \frac{2}{16\pi^2\Lambda^5}u^2 + \frac{3}{128\pi^2\Lambda^5} \right) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{24}^{(0)+}, \\
\mu_{34}^{(1)+} &= -\frac{\mu_{34}^{(0)+}\Psi(u)w}{2} + \left( \frac{i(\Delta^2 - 1)^2}{2304\pi^2\Lambda^5}u^6 - \frac{25i(\Delta^2 - 1)^2}{9216\pi^2\Lambda^5}u^4 - \frac{53i(\Delta^2 - 1)^2}{36864\pi^2\Lambda^5}u^2 - \frac{3i(\Delta^2 - 1)^2}{16384\pi^2\Lambda^5} \right) \cosh^2(\pi u) \cdot w^{-4} + \mu_{34}^{(0)+}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

При  $S_2 = n$   $\mu$ -функции имеют похожую структуру, но более громоздкий вид.

## В. САБЛИДИРУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ БАКСТЕРА 4-ГО ПОРЯДКА

При использовании детерминантов заполненных NLO  $P$ -функциями для  $S_2 = n$  уравнение Бакстера 4-го порядка принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}(u) \cdot \frac{1}{12u^{3/2}(\Delta^2 - 25)(\Delta^2 - 1)^2(n^2 + \Delta^2 - 1)} ((n + \Delta)^2 - 1)^2 (3(7u^2 + 9)n^8 + \\
& + 4(2u^4 - 7u^2 - 13)\Delta n^7 - 4((8\Delta^2 + 54)u^4 + 3(4\Delta^2 + 133)u^2 + 2\Delta^2 + 501)n^6 + \\
& + 4(2(7\Delta^2 - 111)u^4 + (27\Delta^2 - 323)u^2 + 17\Delta^2 - 57)\Delta n^5 + 2(864u^6 - \\
& - 4(8\Delta^4 - 251\Delta^2 - 837)u^4 + (-53\Delta^4 + 1882\Delta^2 + 14043)u^2 - 35\Delta^4 + 1254\Delta^2 + 18285)n^4 + \\
& + 4(-864u^6 + 2(7\Delta^4 - 226\Delta^2 + 4731)u^4 + (27\Delta^4 - 438\Delta^2 + 23227)u^2 + 17\Delta^4 - 138\Delta^2 + \\
& + 19641)\Delta n^3 + 4(864(\Delta^2 - 18)u^6 + (-8\Delta^6 + 502\Delta^4 + 2788\Delta^2 + 4590)u^4 + \\
& + (-12\Delta^6 + 941\Delta^4 + 13858\Delta^2 + 14781)u^2 - 2\Delta^6 + 627\Delta^4 + 16568\Delta^2 - 4137)n^2 + \\
& + 4(-864(\Delta^2 - 1)u^6 + 2(\Delta^6 - 111\Delta^4 + 4731\Delta^2 - 4045)u^4 - (7\Delta^6 + 323\Delta^4 - 23227\Delta^2 + \\
& + 22897)u^2 - 13\Delta^6 - 57\Delta^4 + 19641\Delta^2 - 19571)\Delta n + 3(\Delta^2 - 1)(576(\Delta^2 - 35)u^6 - \\
& - 72(\Delta^4 - 30\Delta^2 - 115)u^4 + (7\Delta^6 - 525\Delta^4 + 8837\Delta^2 + 28545)u^2 + 9\Delta^6 - 659\Delta^4 + \\
& + 11531\Delta^2 + 6015)) \\
& + \mathbf{Q}(u - i) \cdot \frac{1}{24(u - i)^{5/2}(\Delta^2 - 25)(\Delta^2 - 1)^2(n^2 + \Delta^2 - 1)} ((n + \Delta)^2 - 1)^2 (3(2u^2 - iu + 3) \cdot \\
& \cdot un^8 + 4(-2u^3 + 7iu^2 + 9i)u^2\Delta n^7 + 4((4\Delta^2 + 27)u^4 - 2i(4\Delta^2 + 27)u^3 + (5\Delta^2 - 57)u^2 - \\
& - i(7\Delta^2 + 162)u - 24)(2u - 3i)n^6 - 4u(2u - 3i)\Delta((7\Delta^2 - 111)u^3 - 2i(7\Delta^2 - 111)u^2 + \\
& + 5(\Delta^2 - 29)u - 4i(4\Delta^2 - 51))n^5 - 2(1152u^7 - 5184iu^6 - 4(8\Delta^4 - 251\Delta^2 + 1311)u^5 + \\
& + 2(56\Delta^4 - 1757\Delta^2 - 3639)iu^4 + (78\Delta^4 - 2344\Delta^2 - 20646)u^3 + (105\Delta^4 - 3698\Delta^2 + 705)iu^2 + \\
& + (117\Delta^4 - 4268\Delta^2 - 23433)u + 48(7\Delta^2 + 89)i)n^4 - 4\Delta(-1152u^7 + 5184iu^6 + \\
& + 2(7\Delta^4 - 226\Delta^2 + 9019)u^5 - i(49\Delta^4 - 1582\Delta^2 + 37405)u^4 - 16(2\Delta^4 - 65\Delta^2 + 1159)u^3 - \\
& - i(47\Delta^4 - 1706\Delta^2 + 48859)u^2 - 8(6\Delta^4 - 247\Delta^2 + 7345)u - 32i(6\Delta^2 - 233))n^3 - \\
& - 4(1152(\Delta^2 - 18)u^7 - 5184i(\Delta^2 - 18)u^6 + (-8\Delta^6 + 502\Delta^4 - 5772\Delta^2 + 159006)u^5 + \\
& + (28\Delta^6 - 1757\Delta^4 - 5622\Delta^2 - 93705)iu^4 + 2(7\Delta^6 - 586\Delta^4 - 9013\Delta^2 + 57528)u^3 + \\
& + (29\Delta^6 - 1849\Delta^4 + 4843\Delta^2 - 255375)iu^2 + (21\Delta^6 - 2134\Delta^4 - 12367\Delta^2 - 154224)u + \\
& + 8(21\Delta^4 + 182\Delta^2 + 2757)i)n^2 - 4\Delta(-1152(\Delta^2 - 1)u^7 + 5184(\Delta^2 - 1)iu^6 + \\
& + 2(\Delta^6 - 111\Delta^4 + 9019\Delta^2 - 8141)u^5 - i(7\Delta^6 - 777\Delta^4 + 37405\Delta^2 - 28955)u^4 + \\
& + 8(47\Delta^4 - 2318\Delta^2 + 351)u^3 - i(9\Delta^6 - 843\Delta^4 + 48859\Delta^2 - 63385)u^2 + \\
& + (612\Delta^4 - 58760\Delta^2 + 65828)u + 32(233\Delta^2 - 281)i)n - 3(\Delta^2 - 1)(768(\Delta^2 - 35)u^7 - \\
& - 3456i(\Delta^2 - 35)u^6 - 8(9\Delta^4 + 446\Delta^2 - 26055)u^5 + 4(63\Delta^4 - 1150\Delta^2 - 32385)iu^4 - \\
& - 2(\Delta^6 - 183\Delta^4 + 6699\Delta^2 - 70005)u^3 + (\Delta^6 + 205\Delta^4 + 675\Delta^2 - 339825)iu^2 - \\
& - (3\Delta^6 - 709\Delta^4 + 14913\Delta^2 + 220545)u - 32i(3\Delta^4 - 86\Delta^2 - 1005))) +
\end{aligned}
\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbf{Q}(u+i) \cdot \frac{1}{24(u+i)^{5/2}(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2(n^2+\Delta^2-1)} ((n+\Delta)^2-1)^2(3(2u^2+iu+3) \cdot \\
& \cdot un^8-4u^2(2u^3+7iu^2+9i)\Delta n^7+4((4\Delta^2+27)u^4+2(4\Delta^2+27)iu^3+(5\Delta^2-57)u^2+ \\
& + (7\Delta^2+162)iu-24)(2u+3i)n^6-4u(2u+3i)\Delta((7\Delta^2-111)u^3+2(7\Delta^2-111)iu^2+ \\
& + 5(\Delta^2-29)u+4(4\Delta^2-51)i)n^5-2(1152u^7+5184iu^6-4(8\Delta^4-251\Delta^2+1311)u^5- \\
& - 2i(56\Delta^4-1757\Delta^2-3639)u^4+(78\Delta^4-2344\Delta^2-20646)u^3-i(105\Delta^4-3698\Delta^2+705)u^2+ \\
& + (117\Delta^4-4268\Delta^2-23433)u-48i(7\Delta^2+89))n^4-4\Delta(-1152u^7-5184iu^6+ \\
& + 2(7\Delta^4-226\Delta^2+9019)u^5+(49\Delta^4-1582\Delta^2+37405)iu^4-16(2\Delta^4-65\Delta^2+1159)u^3+ \\
& + (47\Delta^4-1706\Delta^2+48859)iu^2-8(6\Delta^4-247\Delta^2+7345)u+32(6\Delta^2-233)i)n^3- \\
& - 4(1152(\Delta^2-18)u^7+5184(\Delta^2-18)iu^6+(-8\Delta^6+502\Delta^4-5772\Delta^2+159006)u^5- \\
& - i(28\Delta^6-1757\Delta^4-5622\Delta^2-93705)u^4+2(7\Delta^6-586\Delta^4-9013\Delta^2+57528)u^3- \\
& - i(29\Delta^6-1849\Delta^4+4843\Delta^2-255375)u^2+(21\Delta^6-2134\Delta^4-12367\Delta^2-154224)u- \\
& - 8i(21\Delta^4+182\Delta^2+2757))n^2-4\Delta(-1152(\Delta^2-1)u^7-5184i(\Delta^2-1)u^6+ \\
& + 2(\Delta^6-111\Delta^4+9019\Delta^2-8141)u^5+(7\Delta^6-777\Delta^4+37405\Delta^2-28955)iu^4+ \\
& + 8(47\Delta^4-2318\Delta^2+351)u^3+(9\Delta^6-843\Delta^4+48859\Delta^2-63385)iu^2+ \\
& + (612\Delta^4-58760\Delta^2+65828)u+32i(281-233\Delta^2))n+3(\Delta^2-1)(-768(\Delta^2-35)u^7- \\
& - 3456i(\Delta^2-35)u^6+8(9\Delta^4+446\Delta^2-26055)u^5+4(63\Delta^4-1150\Delta^2-32385)iu^4+ \\
& + 2(\Delta^6-183\Delta^4+6699\Delta^2-70005)u^3+(\Delta^6+205\Delta^4+675\Delta^2-339825)iu^2+ \\
& + (3\Delta^6-709\Delta^4+14913\Delta^2+220545)u-32i(3\Delta^4-86\Delta^2-1005))) + \\
& +\mathbf{Q}(u+2i) \cdot (u+2i)^{5/2} \frac{1}{3(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2(n^2+\Delta^2-1)} 4((n+\Delta)^2-1)^2(3(6u^2-6iu+1)n^4- \\
& - 4(9u^2-9iu+2)\Delta n^3+2(18(\Delta^2-18)u^2-18i(\Delta^2-18)u+5\Delta^2-69)n^2- \\
& - 4\Delta(9(\Delta^2-1)u^2-9i(\Delta^2-1)u+2(\Delta^2-7))n+3(6(\Delta^2-35)u^2-6i(\Delta^2-35)u+ \\
& + \Delta^2-45)(\Delta^2-1)) + \\
& +\mathbf{Q}(u-2i) \cdot (u-2i)^{5/2} \frac{1}{3(\Delta^2-25)(\Delta^2-1)^2(n^2+\Delta^2-1)} 4((n+\Delta)^2-1)^2(3(6u^2+6iu+1)n^4- \\
& - 4(9u^2+9iu+2)\Delta n^3+2(18(\Delta^2-18)u^2+18(\Delta^2-18)iu+5\Delta^2-69)n^2- \\
& - 4\Delta(9(\Delta^2-1)u^2+9(\Delta^2-1)iu+2(\Delta^2-7))n+3(6(\Delta^2-35)u^2+6(\Delta^2-35)iu+ \\
& + \Delta^2-45)(\Delta^2-1)) = \\
& = 0 .
\end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A measurement and QCD analysis of the proton structure function  $F_2(x, Q^2)$  at HERA / S. Aid [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol. 470. — P. 3–38.
2. Measurement of the proton structure function  $F_2$  at low  $x$  and low  $Q^2$  at HERA / M. Derrick [et al.] // Zeit. Phys. C. — 1996. — Vol. 69. — P. 607–620.
3. The QCD pomeron with optimal renormalization / S. Brodsky [et al.] // JETP Lett. — 1999. — Vol. 70. — P. 155–160.
4. *Lukaszuk L., Nicolescu B.* A Possible interpretation of  $pp$  rising total cross-sections // Lett. Nuovo Cim. — 1973. — Vol. 8. — P. 405–413.
5. *Fischer J.* Odderon classes – general criteria // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 12. — P. 331–338.
6. *Kwiecinski J., Praszalowicz M.* Three Gluon Integral Equation and Odd C Singlet Regge Singularities in QCD // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 94. — P. 413–416.
7. Elastic differential cross-section  $d\sigma/dt$  at  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV and implications on the existence of a colourless C-odd three-gluon compound state / G. Antchev [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80, no. 91.
8. Odderon Exchange from Elastic Scattering Differences between  $pp$  and  $p\bar{p}$  Data at 1.96 TeV and from  $pp$  Forward Scattering Measurements / V. Abazov [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Vol. 127, no. 062003.
9. *Martynov E., Nicolescu B.* Did TOTEM experiment discover the Odderon? // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 778. — P. 414–418.
10. *Martynov E., Nicolescu B.* Odderon effects in the differential cross-sections at Tevatron and LHC energies // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 461.

11. Review of Particle Physics / C. Patrignani [et al.] // Chin. Phys. C. — 2016. — Vol. 40, no. 100001.
12. *Kuraev E., Lipatov L., Fadin V.* Multiregge processes in the Yang-Mills theory // Sov. Phys. JETP. — 1976. — Vol. 44. — P. 443–450.
13. *Kuraev E., Lipatov L., Fadin V.* The Pomeranchuk singularity in non-abelian gauge theories // Sov. Phys. JETP. — 1977. — Vol. 45. — P. 199–204.
14. *Balitsky I., Lipatov L.* The Pomeranchuk Singularity in Quantum Chromodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. — 1978. — Vol. 28. — P. 822–829.
15. *Gromov N., Levkovich-Maslyuk F., Sizov G.* Pomeron Eigenvalue at Three Loops in  $\mathcal{N} = 4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, no. 251601.
16. *Kotikov A., Lipatov L.* DGLAP and BFKL equations in the  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric gauge theory // Nucl. Phys. B. — 2003. — Vol. 661. — P. 19–61.
17. *Kotikov A.* The property of maximal transcendentality in the  $\mathcal{N} = 4$  SYM // Phys. Part. Nucl. — 2010. — Vol. 41. — P. 951–953.