БФКЛ спектр в КХД и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янг-Миллса

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

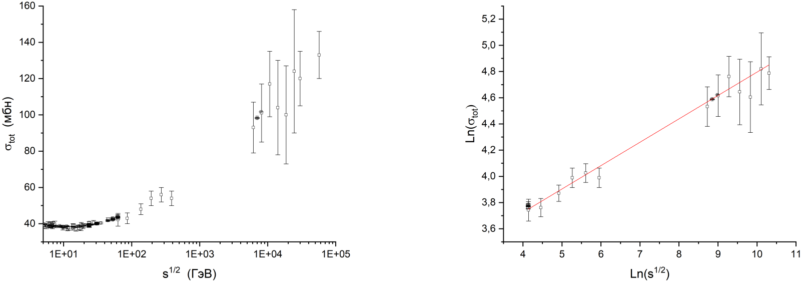
Направление подготовки 14.04.02 «Ядерная физика и технологии»

Студент: Юшин В.О.
Руководитель: Алфимов М.Н.

28 июня, 2024 г.

Формулировка задачи

В адронных столкновениях измерена зависимость $\sigma(s)$. Сделан вывод о росте полного сечения с ростом энергии: $\sigma_{tot} \sim s^{\alpha-1}$.
(H1 Collaboration'1996; ZEUS Collaboration'1996)



(Particle Data Group'2017)

В феноменологических моделях есть вычисление величины α (интерсепт).
(E.Martynov, B.Nicolescu'2019)

Но мы хотим вычислить этот показатель степени из первых принципов.

В рамках КХД есть теория возмущений – диаграммная техника.

Рассеяние при высоких энергиях

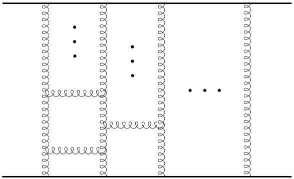
Полное сечение высокоэнергетического рассеяния двух адронов A и B может быть записано в терминах факторов адронизации $\Phi_i(q_i)$ как

$$\sigma(s) = \int \frac{d^2q\; d^2q'}{(2\pi)^2\; q^2\; q'^2}\; \Phi_A(q)\; \Phi_B(q') \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\omega} G_\omega(q, q')\;,$$

где $s_0 = |q|\,|q'|$ и $s = 2\,p_A\,p_B$.

Для G_ω выполняется уравнение Бете-Салпитера, которое называется уравнением БФКЛ (Балицкий-Фадин-Кураев-Липатов):

$$\omega\; G_\omega(q, q_1) = \delta^2(q - q_1) + \\ + \int d^2q_2\; K(q, q_2)\; G_\omega(q_2, q_1)\;,$$



где $K(q_1, q_2)$ – ядро интегрального уравнения.

Померон и Оддерон

- Первый класс решений классифицируется двумя квантовыми числами: $\omega = \omega(n, \nu)$, целое n и вещественное ν. Этот класс решений называется – Померон.
$$\alpha = 1 + \omega(n, 0)\ .$$
- Второй класс решений зависит уже от трёх квантовых чисел, $\omega = \omega(n, q_3, \nu)$, – Оддерон.
$$\alpha = \omega(n, q_3, 0)\ .$$

Вычислить эти величины в рамках КХД при высоких порядках по константе связи сложно (у нас есть только диаграммная техника). Но у нас есть принцип максимальной трансцендентальности, который утверждает, что определенная часть ответа из КХД совпадает с ответом в $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Т.е. в $\mathcal{N} = 4$ вычисляется максимально трансцендентальная часть ответа КХД, а через диаграммные техники можно получить остаток.

Трансцендентальность

Выражения для величин в КХД и других калибровочных теориях поля можно представить как сумму функций, которые обладают параметром “трансцендентальность”. Пример – решение уравнения БФКЛ в первых двух порядках по константе связи в КХД:
(A.Kotikov, L.Lipatov'2000)

$$\omega(n,\nu) = C_1(g^2)\cdot\chi(n,\nu) + C_2(g^4)\cdot\delta(n,\nu)\ ,$$

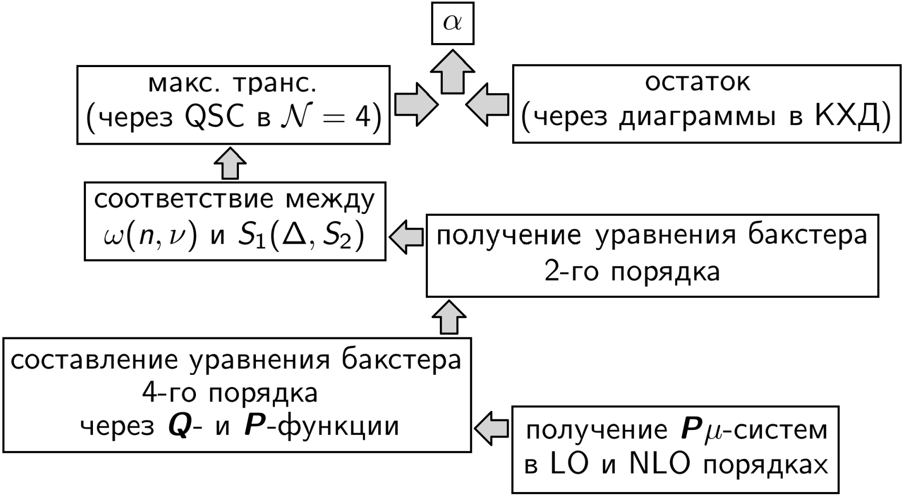
где

$$\chi(n,\nu) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}+i\nu+\frac{n}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-i\nu+\frac{n}{2}\right)\ ,$$

$$\begin{aligned}\delta(n,\nu) = {} & A\cdot\left[\chi^2(n,\nu) - \psi'\left(\frac{1}{2}+i\nu+\frac{n}{2}\right) + \psi'\left(\frac{1}{2}-i\nu+\frac{n}{2}\right)\right] + \\ & + B\cdot 2\zeta(2)\ \chi(n,\nu)\ +\ C\cdot\chi(n,\nu)\ +\ D\cdot\zeta(3)\ +\ E\cdot\pi^2 + \\ & + F\cdot\left[\psi''\left(\frac{1}{2}+i\nu+\frac{n}{2}\right) - \psi''\left(\frac{1}{2}-i\nu+\frac{n}{2}\right) + 2\Phi(n,\nu) + 2\Phi(n,-\nu)\right]\ .\end{aligned}$$

Слагаемые, выделенные синим, будут решением для $\mathcal{N}=4$ SYM.

Схема теоретического получения α



Локальные операторы

Величина ω связана с размерностью локальных операторов в $\mathcal{N}=4$ SYM, они в свою очередь имеют квантовые числа $(J_1, J_2, J_3, \Delta, S_1, S_2)$. Оператору твиста-$L$ соответствует выражение:

$$\mathcal{O} = \mathrm{Tr}\left(ZD_+^{S_1}\partial_\perp^{S_2}Z^{L-1}\right) + (\text{перестановки})\ .$$

Числа ν и Δ связаны формулой: $\nu = -i\Delta/2$.

- Оператору твист-2 соответствует Померон. Для него $\omega = S_1 + 1$ при квантовых числах $J_1 = 2$, $J_2 = J_3 = 0$ и $S_2 = n$.
- Твист-3 соответствует Оддерону. У него $\omega = S_1 + 2$, когда квантовые числа принимают значения $J_1 = 3$, $J_2 = J_3 = 0$ и $S_2 = n$.

Т.е. аналогом нахождения $\omega(n,\nu)$ в рамках высокоэнергетического рассеяния в КХД будет являться нахождение $S_1(\Delta, S_2)$ в $\mathcal{N}=4$ SYM.

Одним из основных аспектов интегрируемости $\mathcal{N}=4$ SYM является описание спектра в терминах конечного набора функциональных уравнений, известных как Квантовая Спектральная Кривая (QSC).

Квантовая Спектральная Кривая

Квантовой Спектральной Кривой сопоставлен уникальный набор функций $\boldsymbol{P}_a(u)$ и $\boldsymbol{Q}_i(u)$ (с $a, i = 1, \dots, 4$), которые имеют фиксированную аналитическую структуру и удовлетворяют множеству связанных разностных уравнений, называемых QQ-системой.

Для физических состояний все Q-функции имеют степенную асимптотику при больших u:

$$\boldsymbol{P}_a \sim A_a\, u^{-\tilde{M}_a}\;, \qquad \boldsymbol{P}^a \sim A^a\, u^{\tilde{M}_a - 1}\;, \qquad \boldsymbol{Q}_i \sim B_i\, u^{\hat{M}_i - 1}\;, \qquad \boldsymbol{Q}^i \sim B^i\, u^{-\hat{M}_i}\;,$$

где

$$\tilde{M}_a = \left\{ \frac{J_{1+2-3}}{2} + 1, \frac{J_{1-2+3}}{2}, -\frac{J_{1-2-3}}{2} + 1, -\frac{J_{1+2+3}}{2} \right\}\;,$$
$$\hat{M}_i = \left\{ \frac{\Delta - S_{1+2}}{2} + 1, \frac{\Delta + S_{1+2}}{2}, -\frac{\Delta + S_{1-2}}{2} + 1, -\frac{\Delta - S_{1-2}}{2} \right\}\;.$$

Видно, что зависимость $S_1(\Delta, S_2)$ находится в асимптотиках $\boldsymbol{Q}$-функций.

P-функции при $S_2 = n$

БФКЛ режим: $\omega \to 0$. Выражение для $\boldsymbol{P}$-функции в пертурбативном режиме:

$$\boldsymbol{P}_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{P}_a^{(k)} \omega^k \ .$$

$\boldsymbol{P}$-функции для Оддерона в LO (нулевой порядок разложения, при ω^0) и NLO (при ω^1) порядках при общем случае $S_2 = n$ представлены ниже:

$$\boldsymbol{P}_1^{(0)} = \frac{1}{u^{5/2}} \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_2^{(0)} = \frac{1}{u^{3/2}} \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_3^{(0)} = -i \frac{((\Delta+n)^2-1)\cdot((\Delta-n)^2-25)}{96} u^{1/2} \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_4^{(0)} = -i \frac{((\Delta+n)^2-1)\cdot((\Delta-n)^2-49)}{192} u^{3/2} - \\ - i \frac{((\Delta^2-1)^2+n^4-2n^2(\Delta^2+1))}{192 \ u^{1/2}} \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_1^{(1)} = 0 \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_2^{(1)} = 0 \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_3^{(1)} = -i \frac{(3\Delta^2+3n^2+4\Delta n-15)}{24} u^{1/2} \ ,$$

$$\boldsymbol{P}_4^{(1)} = -i \frac{(3\Delta^2+3n^2+8\Delta n+21)}{48} u^{3/2} + \\ + i \frac{(3(\Delta^2-1)^2+3n^4-2n^2(\Delta^2+3))}{48(\Delta^2+n^2-1) \ u^{1/2}} \ .$$

Уравнение Бакстера 4-го порядка

Основным объектом для вычисления $\omega(n,\nu)$ является уравнение Бакстера.

Уравнение Бакстера 4-го порядка, т.е. с четырьмя сдвигами переменной связывает $\boldsymbol{P}$- и $\boldsymbol{Q}$-функции:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{[+4]} - \boldsymbol{Q}^{[+2]}\left[D_1 - \boldsymbol{P}_a^{[+2]}\boldsymbol{P}^{a[+4]}D_0\right] + \\ + \boldsymbol{Q}\left[D_2 - \boldsymbol{P}_a\boldsymbol{P}^{a[+2]}D_1 + \boldsymbol{P}_a\boldsymbol{P}^{a[+4]}D_0\right] - \\ - \boldsymbol{Q}^{[-2]}\left[\bar{D}_1 + \boldsymbol{P}_a^{[-2]}\boldsymbol{P}^{a[-4]}\bar{D}_0\right] + \boldsymbol{Q}^{[-4]} = 0\ ,\end{aligned}$$

где D_0, D_1, D_2, $\bar{D}_0$, $\bar{D}_1$ – детерминанты собранные из $\boldsymbol{P}_a$ и $\boldsymbol{P}^a$ функций.

Используя LO $\boldsymbol{P}$-функции и подставляя их в эти детерминанты, можно вычислить лидирующее уравнение Бакстера 4-го порядка, а учитывая NLO $\boldsymbol{P}$-фукнции – саблидирующее уравнение.

Есть возможность свести 4-ый порядок уравнения Бакстера ко 2-му. Вид итоговых уравнений для LO (сверху) и NLO (снизу):

$$-\frac{(1+8u^2-(\Delta-n)^2)}{2u^{5/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u)+\frac{2(u-i)}{(u-i)^{3/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u-i)+ \\ +\frac{2(u+i)}{(u+i)^{3/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u+i)=0\ ,$$

$$\boldsymbol{Q}^{(1)}_{1,3}(u+i)+\boldsymbol{Q}^{(1)}_{1,3}(u-i)+\left(-2+\frac{(\Delta-n)^2-1}{4u^{5/2}}\right)\boldsymbol{Q}^{(1)}_{1,3}(u)= \\ =-\frac{i}{2(u+i)^{3/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u+i)+\frac{i}{2(u-i)^{3/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u-i)+ \\ +\frac{u^{5/2}-\Lambda(\Delta-n)^2-1}{2u^{9/2}}\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u)\ .$$

Для перехода от $\boldsymbol{Q}^{(0)}_{1,3}(u)$ к $\boldsymbol{Q}^{(0)2,4}(u)$, нужно заменить $n\to-n$. Аналогично для NLO.

$\boldsymbol{P}$-функции без определённой чётности

Спектр Оддерона не ограничивается $\boldsymbol{P}$-функциями с определённой четностью, т.е. двумя квантовыми числами. Поэтому был сделан шаг по определению общего вида $\boldsymbol{P}$-функций без определённой четности. Слева написан LO порядок, справа – NLO:

$$\boldsymbol{P}_1^{(0)} = \frac{1}{u^{5/2}} \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_2^{(0)} = \frac{1}{u^{3/2}} \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_3^{(0)} = A_3^{(0)} u^{1/2} + \frac{c_{3,1}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_4^{(0)} = A_4^{(0)} u^{3/2} + \frac{c_{4,2}^{(4)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} \, ,$$

$$A_3^{(0)} = \frac{((\Delta+n)^2-1)\cdot((\Delta-n)^2-25)}{96\, i} \, ,$$

$$A_4^{(0)} = \frac{((\Delta+n)^2-1)\cdot((\Delta-n)^2-49)}{192\, i} \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_1^{(1)} = 0 \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_2^{(1)} = 0 \, ,$$

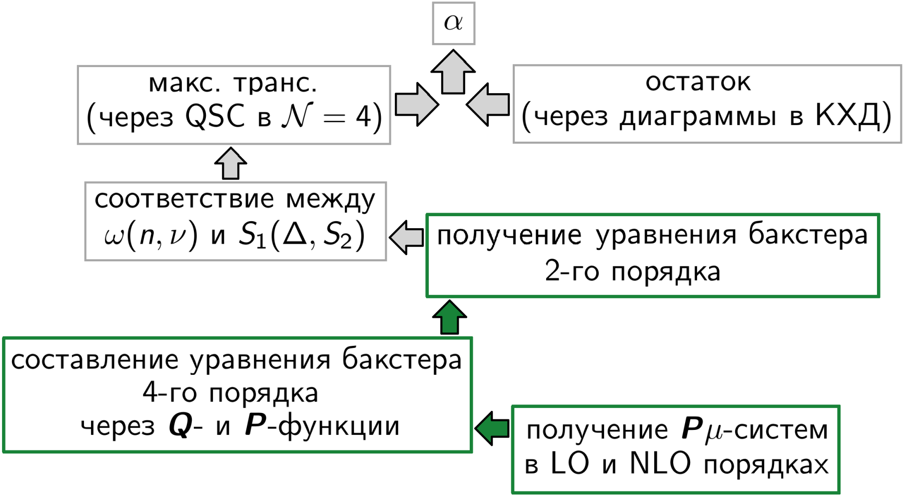
$$\boldsymbol{P}_3^{(1)} = A_3^{(1)} u^{1/2} + \frac{c_{3,1}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} \, ,$$

$$\boldsymbol{P}_4^{(1)} = A_4^{(1)} u^{3/2} + \frac{c_{4,2}^{(5)}}{\Lambda^4 u^{1/2}} \, ,$$

$$A_3^{(1)} = \frac{(3\Delta^2+3n^2+4\Delta n-15)}{24\, i} \, ,$$

$$A_4^{(1)} = \frac{(3\Delta^2+3n^2+8\Delta n+21)}{48\, i} \, .$$

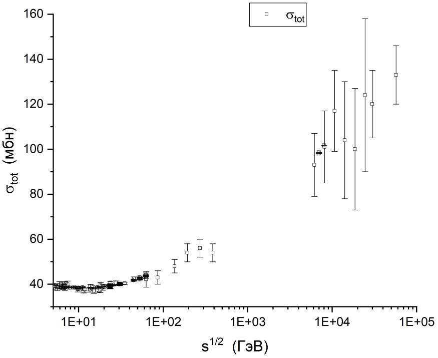
Результаты работы

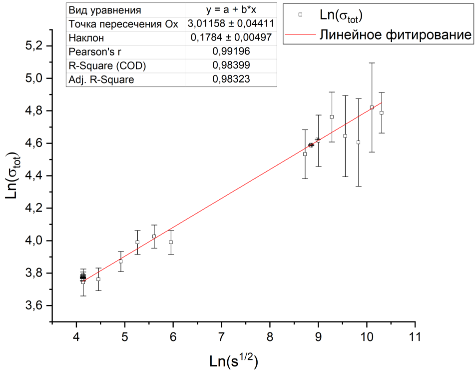


Помимо этого найден общий вид $\boldsymbol{P}$-функций без определённой чётности в LO и NLO порядках.

Спасибо за внимание

Дополнительный слайд 1





Дополнительный слайд 2

Режим БФКЛ определяется когда:

- Для Померона спин $S_1 \to -1$, константа связи $g \equiv \sqrt{\lambda}/(4\pi) \to 0$ и отношение $\Lambda \equiv g^2/(S_1+1)$ является конечным. Приближение БФКЛ в лидирующем порядке соответствует суммированию всех степеней $\left[g^2/(S_1+1)\right]^n$. Приведенная выше λ – константа 'т Хофта.

  Результат связи S_1 и Δ в $\mathcal{N}=4$ SYM:

$$S_1 + 1 = 4g^2\left[-\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{2}\right) + 2\psi(1) + \mathcal{O}(g^2)\right],$$

  где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – полигамма-функция первого порядка.

- Для Оддерона подобно, но $S_1 \to -2$, $\Lambda \equiv g/(S_1+2)$ и $[g/(S_1+2)]^n$.