Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Институт ядерной физики и технологий
Кафедра №40 «Физика элементарных частиц»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА ИНТЕГРИРУЕМОЙ O(4) СИГМА-МОДЕЛИ

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц., PhD. _______ М. Н. Алфимов

Студент _______ И. Д. Федоров

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная $O(n)$ сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному $(n-1)$-мерному многообразию.

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пионов и каонов, а также массы пионов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [1]. Нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния [2], в частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [3].

Сигма модели могут найти применения в теории струн. Так, действие Полякова выглядит как [4]

$$S = \frac{1}{2} T_0 \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu}(x) \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu,$$

где g^{ab} — метрика на поверхности, заметаемой струной, $G_{\mu\nu}$ — метрика в пространстве, x^μ — координаты бозонных струн. Если вместо g^{ab} рассматривать метрику Миньковского, то получится действие сигма модели (1.1).

В квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. Например, в сигма моделях наблюдается явление ассимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД [5].

Данная работа посвящена изучению нелинейной $O(4)$ сигма-модели. Предпринимаются попытки по нахождению вида деформированной метрики в двупетлевом случае.

1. ДЕФОРМИРОВАННАЯ O(4) СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как правило, в $O(n)$ сигма-моделях рассматриваются римановы многообразия. Действие записывается как

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^n x,$$

где $\mathbf{X}$ – координата на заданном многообразии, $G = \{G_{ij}\}$ – метрический тензор. Метрика такова, что при отсутствии деформации действие инвариантно относительно преобразований

$$X^i \to A^{ij} X^j$$

с любой $n \times n$ ортогональной матрицей A, или, говоря иначе, действие инвариантно относительно действия группы $O(n)$ ортогональных преобразований.

Данные теории поля требуют перенормировки. Как известно, их можно описать при помощи уравнения ренормгруппы [6]. Уравнение ренормгруппы для метрики G выглядит следующим образом:

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij} \left(G \right), \tag{1.1}$$

где $\dot{G}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} G_{ij}$ – производная метрического тензора по времени, V – некоторое векторное поле. В качестве t выступает некий параметр, непрерывно связанный с масштабом энергии.

В данной работе рассматривается $O(4)$ сигма-модель. Цель - найти метрику, удовлетворяющую RG-уравнению (1.1) хотя бы в первом порядке теории возмущений. При этом, в качестве малого параметра рассматривается $\hbar$ - некоторый аналог постоянной Планка. В данной работе возмущение метрики имеет вид

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \ldots \tag{1.2}$$

2. ПОИСК ДЕФОРМИРОВАННОЙ МЕТРИКИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВЕНЕНИЕ

Если рассматривать первое приближение ($\hbar^0$), то уравнению ренорм-группы 1.1 удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right), \tag{2.1}$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2}\ln|1-\kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры $\hbar$ и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\hbar} &= 0; \\ \dot{\kappa} &= \hbar(\kappa^2 - 1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

то есть $\hbar = 0$ и $\kappa = \operatorname{arctg}\hbar t$.

Примечательно то, что при $\kappa = 0$ метрика (2.1) является метрикой трехмерной сферы, а при $\kappa = 1$ переходит в плоскость. то есть κ является параметром деформации модели.

2.2. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика 2.1 во втором приближении ($\hbar^1$) не удовлетворяет РГ уравнению (1.1). Попытки искать метрику в виде

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

ни к чему не привели. Вероятно, другие компоненты в двупетлевом случае не равны нулю, но вычисления в этом случае очень сильно усложняются. Поэтому было решено использовать другой подход, рассмотрев ультрафиолетовый предел.

2.3. УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЙ ПРЕДЕЛ. АНАЛОГИЯ С O(6)

Для нахождения ультрафиолетового предела, сведем метрику к определенному виду, следуя [7]. В этом виде компоненты метрического тензора должны представлять из себя линейную комбинацию экспонент от функций координат. В [7] рассматривается $O(6)$ сигма-модель со следующей метрикой:

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{\kappa}{\nu}\Bigg(&\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi_1^2}{1-\kappa^2\zeta^2} + \zeta^2 d\theta^2 + \\ &+2i\zeta^2\tanh\theta d\theta d\phi_2 + \frac{\left(1-\kappa^2\zeta^4\sin^2\theta\right)d\phi_2^2}{\kappa^2\zeta^2\cos^2\theta} + \frac{d\phi_3^2}{\kappa^2\zeta^2\sin^2\theta}\Bigg). \end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом, используя преобразования

$$x_1 = \ln\left(\frac{\zeta^2\cdot F^2(t)}{2(1-\kappa^2\zeta^2)}\right),\ x_2 = \ln\left(\zeta\cdot\tanh^2\theta\cdot F(t)\right),$$
$$x_3 = 2\phi_1 - i\ln\left(\frac{1-\kappa^2\zeta^2}{1-\zeta^2}\right),\ x_4 = 2\phi_2 - i\ln\left(\frac{\zeta}{\cos^2\theta}\right),$$
$$x_5 = 2\phi_3 + i\ln\left(\zeta\sin^2\theta\right),$$
$$F(t) = \frac{-\left(-2\sinh t\right)^{1/3}}{\cosh t},$$

можно преобразовать метрику к нужному виду и перейти к ультрафиолетовому пределу пределу. На данном этапе, основываясь на виде метрики $O(6)$, мы делаем предположение о том, что и в случае $O(4)$ модели можно сделать подобное преобразование координат и перейти к метрике нужного вида. В самом деле, с точностью до переименования координат видно, что метрики совпадают, если положить $\phi_2 = 0, \phi_3 = 0$. Таким образом, согласно предположению, для недеформированной метрики $O(4)$ (2.1) попробуем выполнить преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = \ln\left(\frac{r^2}{1-\kappa^2r^2}\right) + 2\ln F(t) - \ln 2 \\ x_2 = \ln\left(r\tanh^2\varphi_2\right) + \ln F(t) \\ x_3 = 2\varphi_1 - i\ln\left(\frac{1-\kappa^2r^2}{1-r^2}\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

где $F(t)$ – некоторая функция, завясящая от t. Продолжая аналогию с $O(6)$ моделью, потребуем, чтобы $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$. Используя Wolfram Mathematica и библиотека sympy для Python 3.10 была найдена метрика в новых координатах. Метрика имеет громоздкий вид, поэтому ее компоненты были вынесены в **Приложение**. Следующие шаги работы - нахождение $F(t)$, анализ полученной метрики в ультрафиолетовом пределе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данном этапе научно-исследовательской работы было продолжено изучение $O(4)$-сигма модели в двупетлевом случае. Полученные ранее результаты не принесли ожидаемого результата, поэтому для нахождения поправки первого порядка по $\hbar$ к метрике было решено использовать другой подход, а именно, рассмотрение ультрафиолетового предела. Этот подход требует найти координаты, в которых метрика имеет определенный вид. Сделано предположение, что данные координаты можно найти аналогично тому, как они найдены для случая $O(6)$ сигма-модели [7]. Согласно этому предположению, найдена метрика в новых координатах. Дальнейшая работа заключается в анализе полученной метрики в ультрафиолетовом пределе, нахождении $F(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [arXiv:hep-ph/0601196].

[2] S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, *GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1110.

[3] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.

[4] R. Kallosh and A.A. Tseytlin, *Simplifying superstring action on ads5 $\times$ s5*, *Journal of High Energy Physics* **1998** (1998) 016–016.

[5] M.C. Abbott, Z. Bajnok, J. Balog, A. Hegedűs and S. Sadeghian, *Resurgence in the o(4) sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) .

[6] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [arXiv:1804.03399].

[7] A.V. Litvinov and L.A. Spodyneiko, *On dual description of the deformed o(n) sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) 139.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Компоненты метрического тензора невозмущенной метрики $O(4)$ сигма-модели в новых координатах (2.5):

$$G_{11}=\frac{\kappa e^x}{4\hbar}\left(\frac{\sqrt{2}F(t)^4\left(\sqrt[4]{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(\kappa)^2+2\kappa^2e^x}}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}-2e^y\right)+e^y\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}\right)^2}{\left(F(t)^2+2\kappa^2e^x\right)^3\left(e^y-\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}\right)^2\left(-2\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}+\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}+e^y\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{4F(t)^2}{\left(F(t)^2+2\kappa^2e^x\right)\left(F(t)^2+2\left(\kappa^2-1\right)e^x\right)}-\frac{8\left(\kappa^2-1\right)^2e^x}{2\left(\kappa^2-1\right)e^xF(t)^2+F(t)^4}\right),$$

$$G_{12}=G_{21}=-\frac{\kappa e^xF(t)^2\left(\sqrt[4]{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}-2e^y\right)+e^y\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}\right)^2}{\sqrt{2}\hbar\left(F(t)^2+2\kappa^2e^x\right)^2\left(e^y-\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}\right)^2\left(-2\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}+\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}+e^y\right)^2},$$

$$G_{13}=G_{31}=-\frac{i\kappa\left(\kappa^2-1\right)e^x}{\hbar F(t)^2},$$

$$G_{22}=\frac{\sqrt{2}\kappa e^x\left(\sqrt[4]{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}-2e^y\right)+e^y\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}\right)^2}{\hbar\left(F(\kappa)^2+2\kappa^2e^x\right)\left(e^y-\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}\right)^2\left(-2\sqrt[4]{2}\sqrt{e^yF(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}}+\sqrt{2}F(t)\sqrt{\frac{e^x}{F(t)^2+2\kappa^2e^x}}+e^y\right)^2},$$

$$G_{23}=G_{32}=0,$$

$$G_{33}=\frac{\kappa\left(F(t)^2+2\left(\kappa^2-1\right)e^x\right)}{2\hbar F(t)^2}$$