Исследование ренорм-группового потока интегрируемой O(4) сигма-модели

Федоров Иван Денисович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе

Москва, 27 декабря 2024 г.

Нелинейная $O(n)$ сигма-модель

В нелинейных $O(n)$ сигма-моделях поле описывается как точечная частица, движущуюся по $(n-1)$-мерному многообразию. Действие данной модели

$$S(G) = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^n\sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, который должен удовлетворять уравнению ренорм-группы (РГ)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$$

Мотивировка

Сигма-модели находят множество применений в физике:

1. Описание спиновых цепочек [S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, 1989]
2. Описание квантового эффекта Холла [P. Fendley, 2000]
3. Аналогично КХД, сигма-модели обладают такими свойствами, как явление асимптотической свободы и массовой щели. Поэтому их можно использовать как игрушечную модель КХД [M.C. Abbott, Z. Bajnok and Balog, 2021]
4. Нас интересуют интегрируемые сигма-модели, так как в них с помощью уравнения термодинамического Бете-анзаца можно вычислить энергетический спектр возбуждений, однако для этого нам нужно знать, как выглядит S-матрица
5. Из симметрий можно предъявить вид S-матрицы, но это необходимо проверить из первых принципов

$O(4)$ сигма-модель. Теория возмущений

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots$$

Невозмущенная метрика:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Двухпетлевой случай. Специальный вид поправки

Искали в виде

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили

$$2f(r)\hbar(\kappa^2 r^4 - 1) = \beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1}\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}),$$
$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)}\Gamma_{rr}^{r\ (0)} + 2V_r^{(0)}\Gamma_{rr}^{r\ (1)} = -(\beta_{rr})^{(1)},$$

но решения не обладают нужными свойствами

Двухпетлевой случай. Аналогия с $O(3)$

Предположение:

$$f(r) = A\kappa \frac{1 - r^2}{1 - \kappa^2 r^2}$$

Уравнение на константы A и c_2

$$\frac{1}{\Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(0)}} \left((\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} - 2V_r^{(0)} \Gamma^{r}_{\varphi_1\varphi_1}{}^{(1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(0)}} \left((\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} - 2V_r^{(0)} \Gamma^{r}_{\varphi_2\varphi_2}{}^{(1)} \right)$$

не имеет нетривиальных решений

Ультрафиолетовый предел. Аналогия с $O(6)$

Метрика в $O(6)$

$$ds^2 = \frac{\kappa}{\nu}\left(\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi_1^2}{1-\kappa^2\zeta^2} + \zeta^2 d\theta^2 + \right.$$
$$\left. +2i\zeta^2 \tanh\theta d\theta d\phi_2 + \frac{\left(1-\kappa^2\zeta^4\sin^2\theta\right)d\phi_2^2}{\kappa^2\zeta^2\cos^2\theta} + \frac{d\phi_3^2}{\kappa^2\zeta^2\sin^2\theta}\right)$$

сводится некоторыми преобразованиями к виду, который подходит для рассмотрения ультрафиолетового предела

Ультрафиолетовый предел. Аналогия с $O(6)$

Для $O(4)$ аналогичные преобразования должны иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \ln\left(\frac{r^2}{1-\kappa^2 r^2}\right) + 2\ln F(t) - \ln 2, \\ x_2 = \ln\left(r \tanh^2 \varphi_2\right) + \ln F(t), \\ x_3 = 2\varphi_1 - i \ln\left(\frac{1-\kappa^2 r^2}{1-r^2}\right) \end{cases}$$

Ультрафиолетовый предел. Следующие шаги

При помощи Wolfram Mathematica и sympy, python 3.10 получена метрика в новых координатах. Дальнейшая работа заключается в анализе полученной метрики в ультрафиолетовом пределе и нахождении $F(t)$

Спасибо за внимание!

Преобразования для $O(6)$ сигма-модели (UV)

$$x_1 = \ln\left(\frac{\zeta^2 \cdot F^2(t)}{2(1-\kappa^2\zeta^2)}\right), \ x_2 = \ln\left(\zeta \cdot \tanh^2\theta \cdot F(t)\right),$$

$$x_3 = 2\phi_1 - i\ln\left(\frac{1-\kappa^2\zeta^2}{1-\zeta^2}\right), \ x_4 = 2\phi_2 - i\ln\left(\frac{\zeta}{\cos^2\theta}\right),$$

$$x_5 = 2\phi_3 + i\ln\left(\zeta\sin^2\theta\right),$$

$$F(t) = \frac{-\left(-2\sinh t\right)^{1/3}}{\cosh t}$$

Вид метрики для UV - случай $O(6)$ сигма-модели

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + 2e^{\alpha t}\left(A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_2} + C_{\mu\nu}e^{-x_1+x_2}\right) + \ldots,$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$