

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВОЙНЫХ  
СОБЫТИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ**

Научный руководитель \_\_\_\_\_ Е. С. Шлепкина

Студент М24-114 \_\_\_\_\_ Б. Ю. Мучкинова

Консультант \_\_\_\_\_ К. М. Белоцкий

Москва 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Задача</b>	<b>3</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	3
2.2	Параметры кластера . . . . .	4
2.3	Определение радиуса Хвольсона-Эйнштейна для ПЧД . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Гипотеза <math>H_0</math>. Расчет вероятности наблюдения событий</b>	<b>6</b>
3.1	Оценка числа ПЧД на фоне БМО . . . . .	6
3.2	Частота событий, среднее время между событиями, вероятность событий . . . . .	6
3.3	Применение формулы Пуассона – вероятность двойного события по временному интервалу .	7
<b>4</b>	<b>Гипотеза <math>H_1</math>. Расчет вероятности наблюдения событий</b>	<b>7</b>
4.1	Распределение событий по угловому расстоянию между ними . . . . .	7
4.2	Применение формулы Пуассона – вероятность двойного события по расстоянию . . . . .	8
4.3	Абсолютная вероятность двойного события на кластере . . . . .	9
4.4	Относительная оценка вероятности двойного события на кластере . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Предварительная оценка двойных доли кластеров ПЧД в СМ</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>10</b>

# 1 Введение

Открытие LIGO/Virgo гравитационных волн от слияний десятков черных дыр солнечной массы привело к повышенному интересу к первичным черным дырам (ПЧД) как кандидатам в скрытую массу. ПЧД — это черные дыры, которые образуются в ранней Вселенной. Наиболее часто изучаемым механизмом образования является коллапс больших возмущений плотности, вызванных инфляцией. ПЧД могут формировать скопления. Это может происходить за счет случайного (пуассоновского) пространственного распределения одиночных ПЧД или за счет специфики самого механизма их рождения (например, коллапс доменных стенок, образованных в результате фазовых переходов на стадии инфляции) [1–9].

Одним из наблюдательных проявлений ЧД может являться эффект гравитационного микролинзирования удаленных светил (звезд, квазаров и др.). Звездное микролинзирование — это временное усиление светимости, которое возникает, когда компактный объект (линза) проходит близко к лучу зрения звезды. Различные обзоры микролинзирования наложили жесткие ограничения на количество компактных объектов в гало Млечного Пути.

При исследовании гравитационных линз часто оказывается достаточным рассмотрение эффекта в приближение тонкой линзы. Это сильно упрощает вычисления, и оправдано тем, что характерные масштабы (расстояние от наблюдателя до источника и линзы) много больше, чем характерный размер линзы (т.е. области, где преимущественно происходит отклонение лучей света).

## 2 Задача

### 2.1 Постановка задачи

Конечной целью исследования является пересмотр результатов экспериментов MACHO, OGLE и др. в рамках представления о кластерной структуре первичных черных дыр. Мы используем термин «кластер» по отношению ПЧД во избежание путаницы с термином «скопление», преимущественно используемое для звезд. ПЧД массы  $m$  могут быть собраны в кластеры массы  $M_{cl}$ . Они могут подпадать под ограничения на одиночные ПЧД как с массами  $m$ , так и  $M_{cl}$  в зависимости от параметров (компактности) кластера и вида наблюдений (ограничений). Но также могут их и избегать! Наша общая работа нацелена на поиск таких параметров, чтобы избежать максимально и те (на  $m$ ), и те (на  $M_{cl}$ ) ограничения. Данная работа изучает возможность ослабления ограничения на  $m \approx M_{\odot}$  по микролинзированию. Работа по пересмотру ограничения на ПЧД массы  $M \approx 10^4 M_{\odot}$  ведется отдельно.

В основе работы лежат данные эксперимента MACHO [10], результатом которого стали 19 одиночных событий и 1 двойное событие микролинзирования. Посмотрим на эти события, исходя из двух гипотез:  $H_0$  — ПЧД распределены равномерно на сфере радиусом 10 кпк,  $H_1$  — ПЧД собраны в кластеры, которые равномерно распределены на сфере радиусом 10 кпк.

Таблица 1 — События линзирования (выделено двойное событие микролинзирования)

№ п/п	Событие	RA	Dec	Дата
1	1a	78.68	-68.80	10.03.1993 14:24
2	1b	78.68	-68.8	10.03.1993 19:12
3	4	79.30	-70.78	21.10.1994 9:36
4	5	79.17	-70.49	05.02.1993 9:36
5	6	81.55	-70.35	28.07.1993 14:24
6	7a	76.01	-69.56	21.04.1994 0:00
7	7b	76.02	-69.56	13.04.1994 21:36
8	8	81.29	-69.80	04.02.1994 7:12
9	<b>9</b>	80.08	-69.25	04.09.1994 9:36
10	13	81.01	-68.82	20.02.1996 12:00
11	14	83.68	-70.42	03.11.1996 19:12
12	15	76.44	-69.73	23.01.1997 21:36
13	18	86.34	-71.16	06.03.1995 7:12
14	20	73.58	-70.04	22.11.1997 4:48
15	21	74.31	-69.46	13.08.1993 16:48
16	22	78.63	-71.15	27.08.1995 4:48
17	23	76.57	-70.98	13.02.1995 19:12
18	25	75.57	-68.01	16.01.1995 19:12
19	27	76.65	-69.35	10.06.1994 14:24

## 2.2 Параметры кластера

Параметры кластера брались, следуя работе [11]

- $R = 1$  пк – радиус кластера;
- $M = 10^4 M_{\odot}$  – масса кластера;
- $r_0 = 0.1R$  – радиус ядра кластера («кора»);
- профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотношением:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R \end{cases}.$$

- $m_{\text{PЧД}} = m_{\odot}$  – масса ПЧД в кластере.

В данной работе рассматривался плоский кластер.

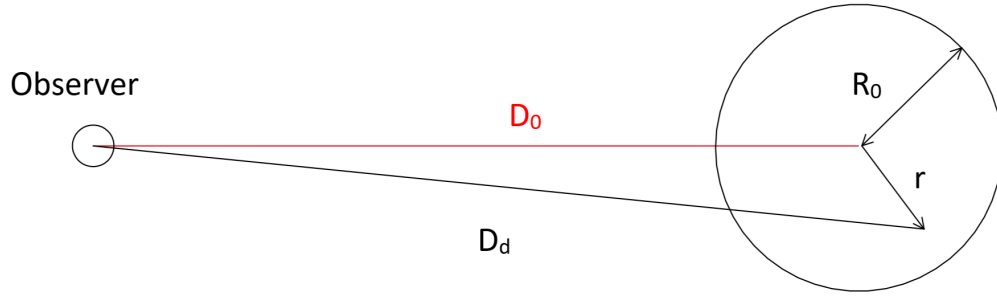


Рисунок 1 — Пояснительный рисунок

### 2.3 Определение радиуса Хвольсона-Эйнштейна для ПЧД

Радиус Хвольсона-Эйнштейна определяет область, в которой звезда должна пройти, чтобы произошел эффект гравитационного микролинзирования. Он рассчитывается по формуле:

$$R_E = \sqrt{\frac{4Gm_{\text{ПВН}} D_d D_{\text{ds}}}{c^2 D_s}} = \sqrt{2r_{\odot} \frac{D_d D_{\text{ds}}}{D_s} \frac{m_{\text{ПВН}}}{M_{\odot}}} = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ пк}, \quad (1)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света,  $D_s = 50$  кпк – расстояние между фоновым источником (Большое Магелланово Облако) и наблюдателем,  $D_d$  – расстояние между линзой (ПЧД) и наблюдателем, которая для простых численных оценок бралась 10 кпк,  $D_{\text{ds}}$  – расстояние между ПЧД и источником,  $r_{\odot} = 2.95$  км – гравитационный радиус Солнца,  $M_{\odot}$  – масса Солнца.

Звезда будет линзироваться, если ее траектория проходит в пределах радиуса Хвольсона-Эйнштейна (см. рисунок 2). Площадь, на которой может происходить линзирование, это площадь круга радиуса Хвольсона-Эйнштейна, равная  $\pi \frac{R_E^2}{D_d^2}$ .

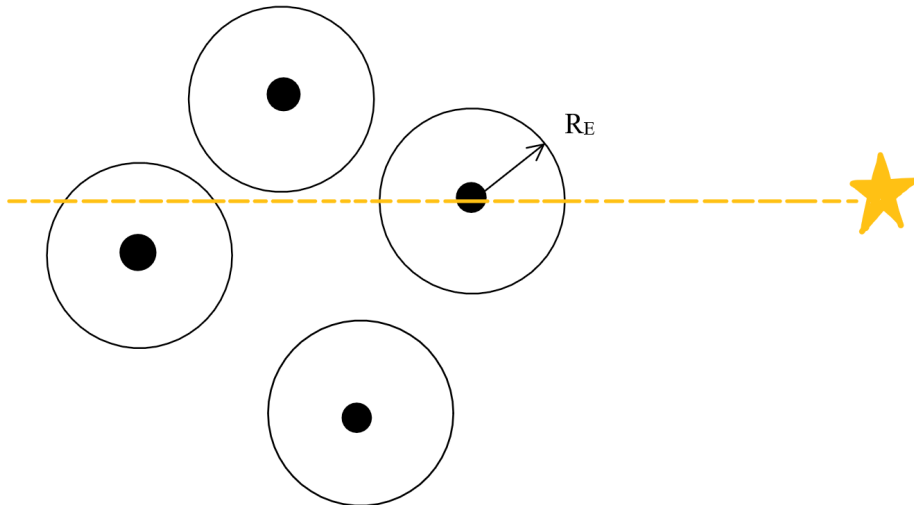


Рисунок 2 — Если звезда проходит в пределах радиуса Хвольсона-Эйнштейна, то мы наблюдаем событие гравитационного микролинзирования

### 3 Гипотеза $H_0$ . Расчет вероятности наблюдения событий

Оценим вероятность того, что в случае верной гипотезы  $H_0$  мы сможем наблюдать одно двойное событие за 10 лет.

#### 3.1 Оценка числа ПЧД на фоне БМО

Для оценки числа ПЧД, которые могут быть на фоне БМО, нужно учитывать общую массу темного гало и распределение ПЧД. Количество ПЧД на фоне БМО пропорционально площади, которую покрывает БМО на небесной сфере. Площадь, покрываемая БМО, можно вычислить исходя из угловых размеров БМО ( $10.75^\circ \times 9.17^\circ$ ). Таким образом, количество ПЧД на фоне БМО можно определить как:

$$N_{\text{РВН}} = \frac{M_{\text{Gal}}}{m_{\text{РВН}}} \frac{S_{\text{LMC}}}{S_{\text{sky}}} = 2.38 \cdot 10^9. \quad (2)$$

#### 3.2 Частота событий, среднее время между событиями, вероятность событий

Под частотой событий подразумевается количество линз, которые пересекает луч зрения в единицу времени, или же число пересекаемых лучом зрения линз в единицу времени. Ее можно интерпретировать как число событий линзирования в единицу времени. Частоту событий можно определить как:

$$\Gamma_1 = R_E n_{\text{РВН}} f_{\text{РВН}} v_{\text{rel}}, \quad (3)$$

где  $f_{\text{РВН}}$  – доля ПЧД в темном гало,  $v_{\text{rel}}$  – скорость относительного движения ПЧД и звезды,  $n_{\text{РВН}}$  – концентрация ПЧД на небесной сфере.

Перейдем к угловым размерам:

$$\Gamma = \frac{R_E}{D_d} \frac{f_{\text{РВН}} M_{\text{Gal}}}{4\pi m_{\text{РВН}}} \frac{v_{\text{rel}}}{D_d} = 1.9 \cdot 10^{-13} f_{\text{РВН}} \frac{1}{\text{с}}. \quad (4)$$

Тогда среднее время между событиями для одной ПЧД получим следующим образом:

$$\tau_1 = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{1.9 \cdot 10^{-13} \cdot f_{\text{РВН}}} \text{с} = 0.53 \cdot 10^{13} \frac{1}{f_{\text{РВН}}} \text{с}. \quad (5)$$

Среднее время между событиями линзирования для всего БМО можно определить как

$$\tau_N = \frac{\tau_1}{N_{\text{star}}} = 0.43 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{f_{\text{РВН}}} \text{с}, \quad (6)$$

где  $N_{\text{star}}$  – количество звезд в БМО. В эксперименте МАСНО ведется наблюдение за  $1.2 \cdot 10^7$  звездами. Это значит, что все БМО целиком дает сигналы в частотой примерно раз в  $10^6$  секунд.

Теперь посчитаем среднее число событий линзирования за  $T = 10$  лет:

$$N_{10} = \frac{T}{\tau_N} = \frac{f_{\text{РВН}} \cdot \pi \cdot 10^8 \text{с}}{0.43 \cdot 10^6} = 30 \cdot f_{\text{РВН}} \quad (7)$$

По формуле Пуассона рассчитаем вероятность 20 одиночных событий, считая, что  $f_{\text{РВН}} = 1$

$$P_{20}(T) = \frac{N_{10}^{20} e^{-N_{10}}}{20!} = \frac{30^{20} e^{-30}}{20!} = 0.013 \quad (8)$$

### 3.3 Применение формулы Пуассона – вероятность двойного события по временному интервалу

Наблюдалось одно двойное событие с временным интервалом  $\Delta t = 80$  дней (см. рисунок 3), тогда можно оценить вероятность двойного события по временному интервалу для одиночных ПЧД.

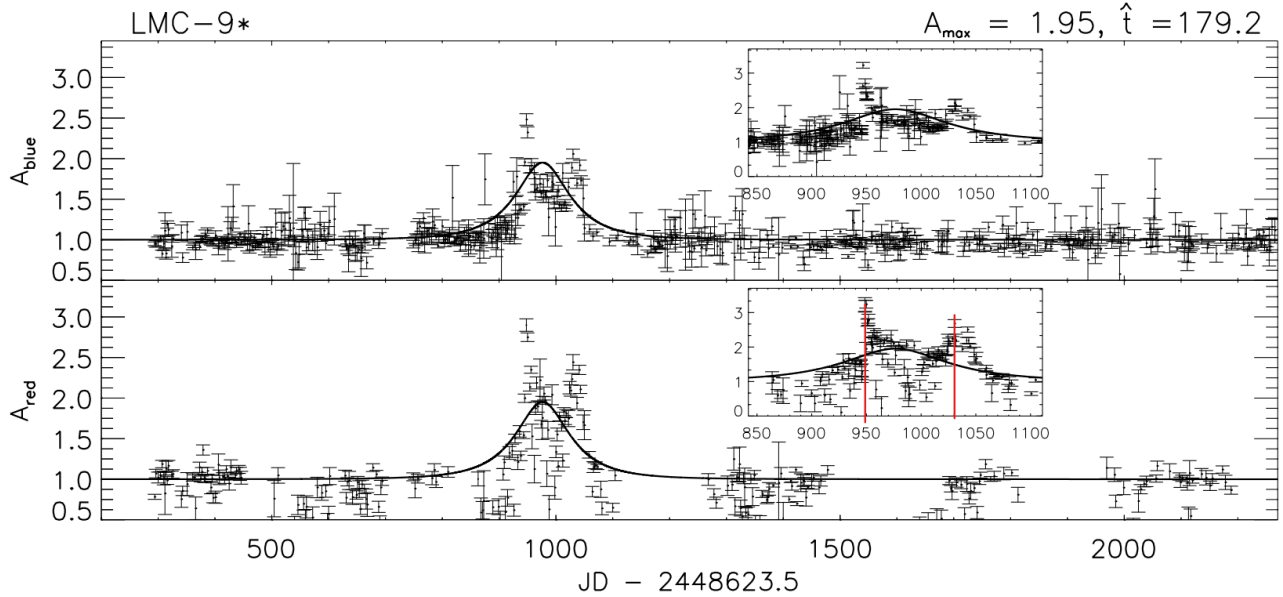


Рисунок 3 — Двойное событие линзирования, временной интервал между событиями составляет примерно 80 дней

Оценим, сколько двойных событий может дать БМО, чтобы проверить, является ли такое событие редким или нет:

$$N_2^t = \frac{\Delta t}{\tau_N} = 16 \quad (9)$$

Для МАСНО:

$$N_2^t = \frac{\Delta t}{\tau_N^M} = 0.4. \quad (10)$$

## 4 Гипотеза $H_1$ . Расчет вероятности наблюдения событий

Оценим вероятность того, что в случае верной гипотезы  $H_1$  мы сможем наблюдать одно двойное событие за 10 лет. Рассмотрим распределение наблюдаемых событий по угловому расстоянию между ними.

### 4.1 Распределение событий по угловому расстоянию между ними

На рисунке 4 изображена карта БМО, на которой нанесены наблюдаемые события линзирования.

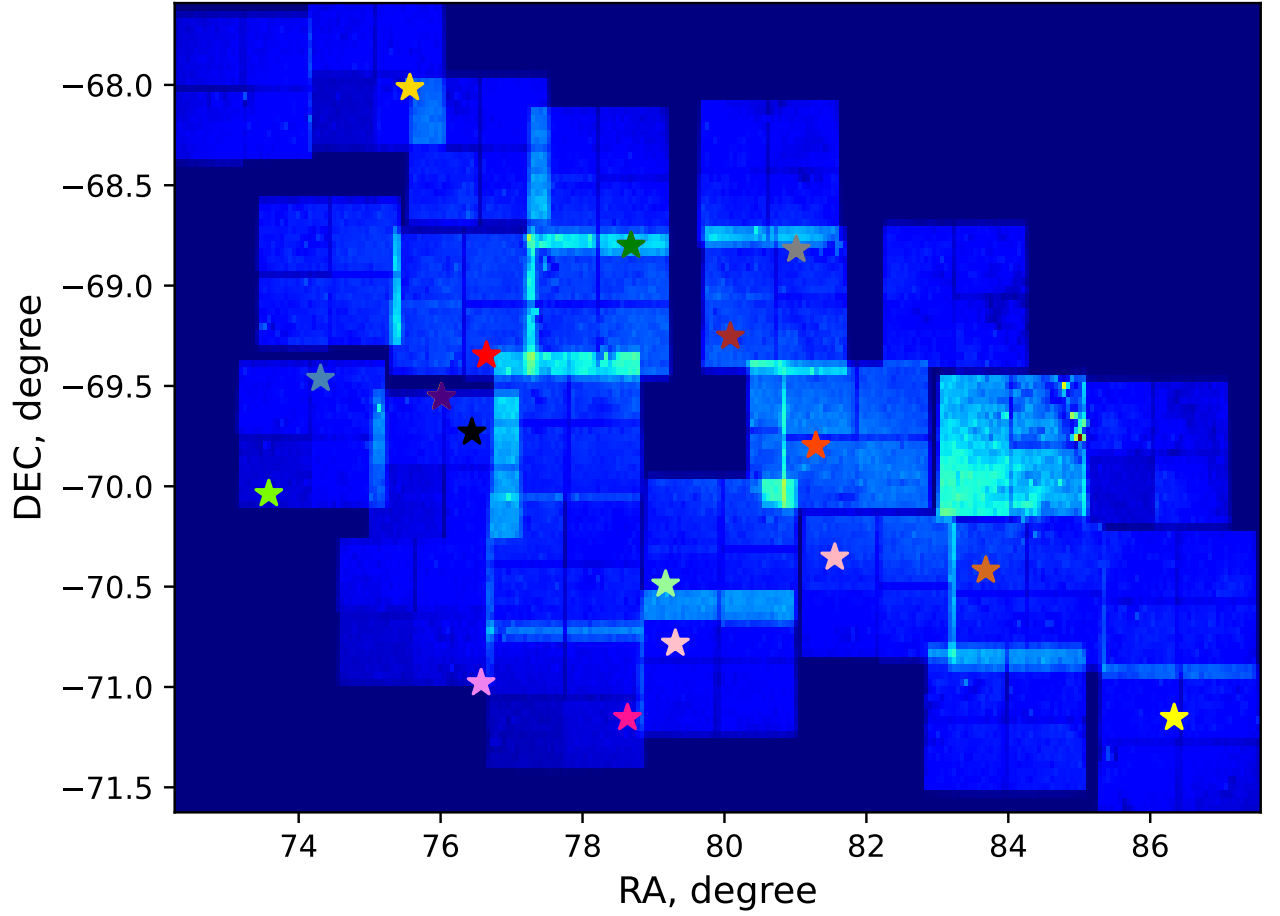


Рисунок 4 — Карта БМО с нанесенными на нее событиями линзирования

Посчитаем среднее расстояние между наблюдаемыми событиями линзирования.

$$\langle \theta \rangle = \sqrt{\frac{S_\theta}{20}} = \sqrt{\frac{30}{20}} = 1.2^\circ, \quad (11)$$

где  $S_\theta$  – площадь, на которой наблюдались события линзирования. Теперь посчитаем расстояние между событиями двойного события (уточнение: двойное событие произошло на одной звезде, так что углового расстояния скорее всего нет, но можно полагать расстояние как угловое разрешение МАСНО). Оценим его как угловой размер кластера:

$$\theta_{cl} = \frac{R_{cl}}{D_d} = 0.6 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ. \quad (12)$$

Найдем число двойных событий

$$N_2^\theta = \frac{\theta_{cl}}{\langle \theta \rangle} = 0.5 \cdot 10^{-2} \quad (13)$$

#### 4.2 Применение формулы Пуассона – вероятность двойного события по расстоянию

Оценим вероятность двойного события по расстоянию



$$P_2^\theta = N_2^\theta e^{-N_2^\theta} = 0.49 \cdot 10^{-2} \quad (14)$$

### 4.3 Абсолютная вероятность двойного события на кластере

Оценим  $N_1$  – число событий для одного кластера:

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}}, \quad (15)$$

где  $l = vT$  – расстояние которое пройдет фоновая звезда за время  $T = 10$  лет,  $v = 200$  км/с – ее скорость,  $\lambda = (n_\theta \theta_E)^{-1}$  – средняя длина свободного пробега фоновой звезды относительно эффекта линзирования,  $n_\theta$  – угловая двумерная концентрация ПЧД,  $N_{\text{star}}$  – количество звезд на фоне одного кластера.

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}} = n_\theta \theta_E \cdot \frac{vt}{D_d} N_{\text{star}} \sim \frac{\theta_E \theta}{\theta_1^2} N_{\text{star}} = \tau \frac{\theta}{\theta_E} N_{\text{star}}, \quad (16)$$

где  $\tau$  – оптическая толщина кластера,  $\theta = \frac{vt}{D_d} = 2.09 \cdot 10^{-7}$ ,  $\theta_1$  – среднее угловое расстояние между ПЧД в кластере,  $\theta_E$  – угловой радиус Хвольсона-Эйнштейна, который задается соотношением:

$$\theta_E = \frac{R_E}{D_d} = \sqrt{2r_\odot \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot}} = 3.97 \cdot 10^{-9} \left( \frac{m_{\text{PBH}}}{M_\odot} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Оптическая толщина определена следующим соотношением:

$$\tau = N_{\text{PBH}} \frac{\pi \theta_E^2}{\pi \theta_{\text{cl}}^2} = \frac{M_{\text{cl}}}{m_{\text{PBH}}} \frac{\theta_E^2}{\left( \frac{R}{D_d} \right)^2}, \quad (18)$$

где  $N_{\text{PBH}}$  – количество ПЧД в кластере,  $\theta_{\text{cl}} = \frac{R}{D_d}$  – угловой радиус кластера. Таким образом,

$$N_1 = \frac{l}{\lambda} N_{\text{star}} = 2.49 \cdot 10^{-2} \left( \frac{M_\odot}{m_{\text{PBH}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1 \text{ ПК}}{R} \right)^2 \left( \frac{T}{10 \text{ лет}} \right) \left( \frac{N_{\text{star}}}{30} \right). \quad (19)$$

С учетом всех кластеров получим число двойных событий, которое может дать БМО:

$$N_{\text{tot}} = N_{\text{cl}} \cdot N_1 = 2.49 \cdot 10^{-2} \cdot 2.38 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^3 \quad (20)$$

Таким образом, гипотеза  $H_1$  также будет отвергаться.

### 4.4 Относительная оценка вероятности двойного события на кластере

Вероятность события линзирования для одного кластера.

$$P_1 = 2.49 \cdot 10^{-2} \quad (21)$$

Тогда вероятность двойного события вычисляется по формулам теории вероятности

$$P_2 = P_1^2 = (2.49 \cdot 10^{-2})^2 \quad (22)$$

Таким образом, относительная доля двойных событий среди одиночных составляет

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 2.49 \cdot 10^{-2} \quad (23)$$

Из наблюдательных данных известно, что одно двойное событие было среди 20 одиночных. Тогда отнормируем на наблюдательные события и найдем число двойных событий

$$N_2 = 20 \cdot 2.49 \cdot 10^{-2} = 0.49. \quad (24)$$

$$N_2 = 0.49 \sim 1 \quad (25)$$

Полученное значение относительной вероятности двойного события говорит о том, что, подобрав область параметров кластера, мы можем добиться того, что эта вероятность приблизится к 1. Поэтому не будем отвергать гипотезу  $H_1$

## 5 Предварительная оценка двойных доли кластеров ПЧД в СМ

Количество событий на кластере с учетом доли кластеров в СМ

$$N_{\text{tot}} = f_{\text{cl}} \cdot N_{\text{cl}} \cdot N_1 = f_{\text{cl}} \cdot 2.49 \cdot 10^{-2} \cdot 2.38 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^3 \cdot f_{\text{cl}} = 20 \quad (26)$$

Таким образом

$$f_{\text{cl}} = \frac{20}{6 \cdot 10^3} = 0.003 \quad (27)$$

## 6 Заключение

В ходе данной работы были рассмотрены две гипотезы о ПЧД:  $H_0$  – ПЧД распределены равномерно на сфере радиусом 10 кпк,  $H_1$  – ПЧД собраны в кластеры, которые равномерно распределены на сфере радиусом 10 кпк. Гипотеза  $H_0$  отвергается, поскольку ею не удастся описать двойные события линзирования (двойные черные дыры в данной гипотезе не рассматривались). Гипотеза  $H_1$  отвергается частично, поскольку подобрав область параметров кластера, мы можем добиться того, что вероятность двойного события приблизится к 1. Поэтому необходимо рассмотреть гипотезу  $H_2$ : часть одиночных ПЧД собрана в кластер. Математически ее можно описать так:

$$H_2 : f_{\text{РВН}} (1 - \tilde{f}_{\text{cl}}) \text{ (одиночные ПЧД)} + f_{\text{РВН}} \cdot \tilde{f}_{\text{cl}} \text{ (кластеры)}, \quad (28)$$

где  $\tilde{f}_{\text{cl}} = \frac{f_{\text{cl}}}{f_{\text{РВН}}}$  – доля кластеризованных ПЧД. В дальнейшем планируется оценить долю ПЧД, входящих в кластер  $\tilde{f}_{\text{cl}}$ .

## Список литературы

- [1] N. Afshordi, P. McDonald and D.N. Spergel, *Primordial black holes as dark matter: The Power spectrum and evaporation of early structures*, *Astrophys. J. Lett.* **594** (2003) L71 [[astro-ph/0302035](#)].
- [2] M.Y. Khlopov, R.V. Konoplich, S.G. Rubin and A.S. Sakharov, *First-order phase transitions as a source of black holes in the early universe*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 153.
- [3] S.G. Rubin, M.Y. Khlopov and A.S. Sakharov, *Primordial black holes from nonequilibrium second order phase transition*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 51 [[hep-ph/0005271](#)].
- [4] S.G. Rubin, A.S. Sakharov and M.Y. Khlopov, *The Formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe*, *J. Exp. Theor. Phys.* **91** (2001) 921 [[hep-ph/0106187](#)].
- [5] M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka and S. Yokoyama, *Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 061101 [[1603.08338](#)].
- [6] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka and K.S. Thorne, *Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries*, *Astrophys. J. Lett.* **487** (1997) L139 [[astro-ph/9708060](#)].
- [7] K. Ioka, T. Chiba, T. Tanaka and T. Nakamura, *Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 063003 [[astro-ph/9807018](#)].
- [8] N. Kaiser, *On the Spatial correlations of Abell clusters*, *Astrophys. J. Lett.* **284** (1984) L9.
- [9] C. Animalì and V. Vennin, *Clustering of primordial black holes from quantum diffusion during inflation*, [2402.08642](#).
- [10] MACHO collaboration, *The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations*, *Astrophys. J.* **542** (2000) 281 [[astro-ph/0001272](#)].
- [11] K.M. Belotsky, V.I. Dokuchaev, Y.N. Eroshenko, E.A. Esipova, M.Y. Khlopov, L.A. Khromykh et al., *Clusters of primordial black holes*, *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) 246 [[1807.06590](#)].