

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ  
РАСЧЕТА СПЕКТРОВ БЕТА-ЧАСТИЦ И  
АНТИНЕЙТРИНО В ПРОСТЕЙШЕМ  
ПРИБЛИЖЕНИИ

Научный руководитель  
ассистент кафедры №40



\_\_\_\_\_ Д. В. Попов

Студент

\_\_\_\_\_ В. Н. Зайцев

Москва 2024

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
<b>1 Теоретическая часть</b>	<b>5</b>
1.1 Расчет вероятности $\beta$ -распада . . . . .	5
1.2 Функция Ферми . . . . .	7
1.3 Построение суммарного спектра . . . . .	8
<b>2 Практическая часть</b>	<b>9</b>
Заключение	11
Список использованных источников	11

# ВВЕДЕНИЕ

Основной теоретической моделью современной физики является Стандартная модель (СМ), описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Последним на данный момент значительным подтверждением СМ стало открытие бозона Хиггса на Большом адронном коллайдере в 2012 году, что завершило формирование современной СМ.

Тем не менее, предсказания этой теоретической модели имеют некоторых расхождения с экспериментальными наблюдениями. Например, согласно модели, нейтрино должны быть строго безмассовыми, в то время как верхняя экспериментальная оценка суммы масс всех типов нейтрино составляет порядка  $0,28 \text{ эВ}^{[1]}$ . Эта и некоторые другие проблемы нуждаются в решении для расширения СМ.

Существование нейтрино было предложено Паули еще в 1930 году, чтобы решить актуальную на тот момент проблему несохранения энергии и углового момента при ядерном  $\beta$ -распаде. Однако открытия нейтрино как частицы пришлось ждать до 1953-1959 годов, когда Фредерик Райнес и Клайд Коуэн <sup>[2][3]</sup> обнаружили электронное антинейтрино, испускаемое ядерным реактором. В реакторах в процессе их работы образуются  $\beta$ -радиоактивные изотопы, в результате распада которых эти частицы возникают в больших количествах. Этот фундаментальный эксперимент положил начало исследованию нейтрино с помощью реакторных антинейтрино.

В самом общем случае все источники нейтрино можно разделить на 3 группы:

- Космические нейтрино;
- Нейтрино от естественных источников на Земле, возникающие в процессах бета-распада радионуклидов;

- Нейтрино от искусственных источников, к ним относятся реакторные антинейтрино и ускорительные нейтрино.

В настоящий момент наиболее интенсивными источниками антинейтрино являются ядерные реакторы. Для реакторных антинейтрино характерны энергии до 10 МэВ<sup>[4]</sup>. Их полный спектр получают суммированием парциальных спектров от всех распадающихся изотопов. При этом в связи с несопадением теоретических и экспериментальных значений одной из основных проблем является формирование точной модели для расчета спектров.

Таким образом, одним из шагов для получения спектра антинейтрино является расчет и построение спектров отдельных изотопов для последующего суммирования с учетом дополнительных факторов.

**Цель** данной работы заключается в определении и развитии теоретической модели, по которой можно построить спектр бета-частиц и антинейтрино как продуктов деления изотопов в активной зоне реактора.

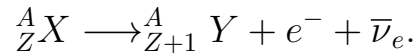
#### **Задачи:**

- Ознакомиться с теоретическим выводом функции, задающей форму спектра бета-частиц и антинейтрино от  $\beta$ -распада в первом приближении;
- Написать собственную программу для расчета и графического вывода спектров отдельных изотопов.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Расчет вероятности $\beta$ -распада

Общая формула  $\beta$ -распада ядра с зарядовым числом  $Z$  и массовым числом  $A$  имеет следующий вид:



Для расчета вероятности  $\beta$ -распада применяются методы теории возмущений, причем в связи с тем, что взаимодействие в этом процессе достаточно слабое (гораздо слабее электромагнитного<sup>[5]</sup>), можно ограничиться рассмотрением членов первого порядка.

Согласно золотому правилу Ферми вероятность перехода системы из начального состояния  $|i\rangle$  с энергией  $E_i$  в некоторое конечное состояние  $\langle f|$  с энергией  $E_f$  в единицу времени при условии  $E_0 = E_f - E_i$  равна

$$dW_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H'|i\rangle|^2 \left. \frac{d\tilde{N}}{dE} \right|_{E=E_0}, \quad (1)$$

где  $H'$  – гамильтониан малого возмущения, приводящего к переходу, а  $\frac{d\tilde{N}}{dE}$  – плотность конечных состояний на единицу энергии (статистический множитель).

Для  $\beta$ -распада в пренебрежении малой энергией отдачи ядра ( $\sim 15$  кэВ<sup>[6]</sup>) полная энергия распределяется между электроном и антинейтрино:

$$E_0 = E_e + E_{\bar{\nu}}.$$

Тогда статистический множитель можно представить в виде:

$$\left. \frac{d\tilde{N}}{dE} \right|_{E=E_0} = \frac{1}{dE} \frac{V d^3 \mathbf{p}_e V d^3 \mathbf{q}_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi\hbar)^3}$$

где  $V d^3 \mathbf{p}_e / (2\pi\hbar)^3$  – число состояний электрона для значений импульса в интервале от  $\mathbf{p}_e$  до  $\mathbf{p}_e + d\mathbf{p}_e$ ,  $V d^3 \mathbf{q}_{\bar{\nu}} / (2\pi\hbar)^3$  – число состояний антинейтрино для значений импульса в интервале от  $\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$  до  $\mathbf{q}_{\bar{\nu}} + d\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$ .

Представив дифференциалы в виде

$$d^3 \mathbf{p}_e = p_e^2 dp_e d\Omega_e,$$

$$d^3 \mathbf{q}_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} d\Omega_{\bar{\nu}},$$

с учетом релятивистских соотношений, получим

$$p_e^2 dp_e = p_e E_e dE_e / c^2,$$

$$q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}} E_{\bar{\nu}} dE_{\bar{\nu}} / c^2.$$

Подставляя полученные значения в (1) и интегрируя по углам для числа  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ -частиц с энергией в интервале от  $E$  до  $E + dE$  получим выражения:

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{E_e^2 - m^2 c^4} E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e, \quad (2)$$

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{(E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 - m^2 c^4} (E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 E_{\bar{\nu}}^2 dE_{\bar{\nu}}. \quad (3)$$

## 1.2 Функция Ферми

Корректный расчет спектров  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ - частиц невозможен без учета влияния поля ядра. Это обстоятельство приводит к тому, что в выражения для  $\beta$ - и  $\bar{\nu}$ -спектров (2) и (3) необходимо вводить множитель  $F(Z, E)$ , называемый функцией Ферми.

Функция Ферми  $F(Z, E)$  описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с  $\beta$ -электроном. Формально она определяется как [6]

$$F(Z, E_e) = \frac{|\Psi_U|^2}{|\Psi_0|^2},$$

где  $\Psi_U$  – решение уравнения Дирака в кулоновском потенциале,  $\Psi_0$  – свободное решение уравнения Дирака (с нулевым потенциалом).

Явный вид функции Ферми [6]:

$$F(Z, E_e) = 2(\gamma + 1) \left( \frac{2p_e R}{\hbar c} \right)^{2(\gamma-1)} e^{\left( \frac{\pi \alpha Z E_e}{p_e} \right)} \frac{|\Gamma(\gamma + \frac{i\alpha Z E_e}{p_e})|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (4)$$

где  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $p_e$  – импульс электрона,  $E_e$  – полная энергия вылетевшего электрона,  $R$  – радиус родительского ядра,  $Z$  – заряд дочернего ядра,  $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера комплексной переменной.

Тогда форма спектра электронов в результате  $\beta$ -распада с учетом выражения (2) может быть представлена в следующем виде [7]:

$$S_e(E_e; E_0, Z) = K p_e E_e (E_0 - E_e)^2 F(Z, E_e) C(Z, E_e, E_0), \quad (5)$$

где  $K$  – нормировочный множитель,  $E_0$  – полная энергия реакции,  $C(Z, E_e, E_0)$  – фактор формы, включающий в себя ядерный матричный элемент гамильтониана возмущения  $H'$  между конечным и начальным состояниями. Для разрешенных  $\beta$ -переходов  $C(Z, E_e, E_0) = 1$  [8].

Спектр антинейтрино  $S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z)$  получается заменой  $E_e$  в формуле (5) на  $E_0 - E_{\bar{\nu}}$ :

$$S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z) = K p_{\bar{\nu}} E_{\bar{\nu}}^2 (E_0 - E_{\bar{\nu}}) F(Z, E_0 - E_{\bar{\nu}}) C(Z, E_0 - E_{\bar{\nu}}). \quad (6)$$

### 1.3 Построение суммарного спектра

При построении суммарного спектра бета-частиц и антинейтрино при  $\beta$ -распаде необходимо учитывать вероятностный характер самого распада. Для большинства изотопов характерно наличие большого количества возможных  $\beta$ -переходов с разной степенью запрета и разной энергией распада. Каждый такой переход может произойти с некоторой вероятностью, определяемой его матричным элементом.

Для получения суммарного спектра необходимо просуммировать все одиночные спектры определенного изотопа с учетом вероятностей их реализации. При условии нормировки единичных спектров суммарный спектр также является отнормированным.

Таким образом, форму суммарных спектров бета-частиц и антинейтрино можно представить в следующем виде:

$$S_e^{sum} = \sum^n P_k S_{ek}, \quad (7)$$

$$S_{\bar{\nu}}^{sum} = \sum^n P_k S_{\bar{\nu}k}, \quad (8)$$

где  $n$  – количество возможных переходов,  $P_k$  – вероятность  $k$ -го перехода,  $S_{ek}$  и  $S_{\bar{\nu}k}$  – одиночные спектры  $k$ -го перехода.



## 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

На данный момент были реализованы две основные программы:

- Программа для построения спектров бета-частиц и антинейтрино от единичного  $\beta$ -распада при заданных значения массового и зарядового чисел изотопа и определенной энергии распада;
- Программа для построения суммарных спектров бета-частиц и антинейтрино от распада определенного изотопа.

При расчете спектров по формулам (5), (6), (7) и (8) на данный момент учитывались только разрешенные переходы. Для расчета гамма-функции комплексного переменного использовалась аппроксимация Ланцоша<sup>[9]</sup>. Радиус ядра рассчитывался по эмпирической формуле  $R \approx 1,2A^{1/3}$  [фм]. Программы для построения спектра антинейтрино имеют аналогичную структуру с учетом замены  $E_e$  в формуле (5) на  $E_0 - E_e$ .

Для иллюстрации на рисунках 1 и 2 приведены спектры бета-частиц и антинейтрино от  $\beta$ -распада  $^{133}\text{I}$ :

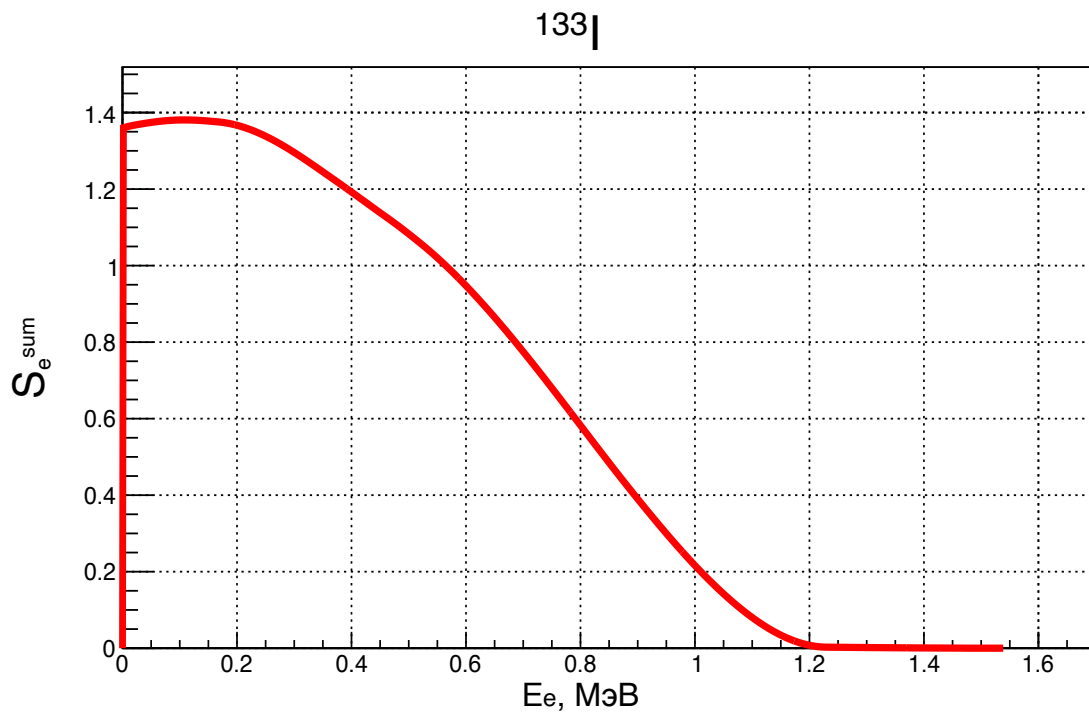


Рисунок 1 — Спектр бета-частиц от  $\beta$ -распада <sup>133</sup>I

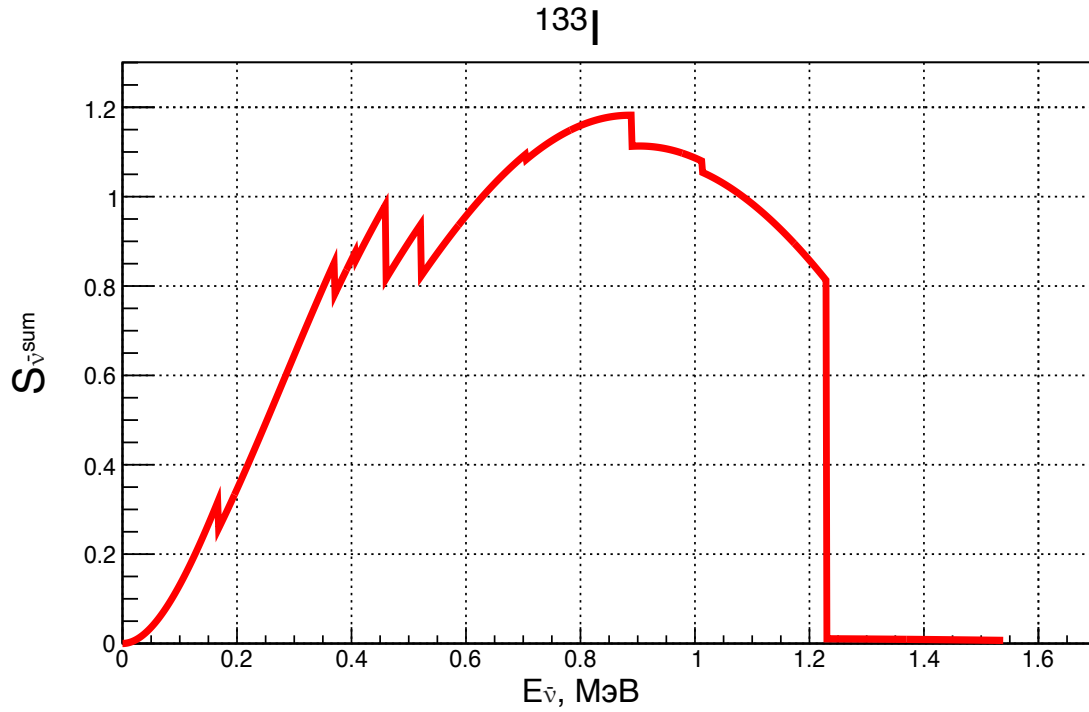


Рисунок 2 — Спектр антинейтрино от  $\beta$ -распада <sup>133</sup>I

II

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная научно-исследовательская работа посвящена исследованию и расчету спектров бета-частиц и антинейтрино от  $\beta$ -распада.

Для начала был проведен вывод из золотого правила Ферми формул плотности вероятности перехода бета-частицы (2) и антинейтрино (3) из некоторого начального состояния в известное конечное состояние.

Также было учтено влияние поля ядра на процесс перехода, был записан явный вид функции Ферми (4), описывающей поправку спектра на это влияние.

Далее были получены общие формулы (5) и (6), описывающие формы спектра бета-частиц и антинейтрино от единичного  $\beta$ -распада с известной энергией реакции. Суммированием этих спектров с учетом вероятностей их реализации были получены полные спектры бета-частиц (7) и антинейтрино (8) от  $\beta$ -распада известного изотопа, что являлось первой задачей данной работы.

В ходе практической части исследовательской работы были реализованы программы, осуществляющие расчет и графический вывод единичных и суммарных спектров бета-частиц и антинейтрино от распадов отдельных изотопов, что являлось второй задачей данной работы. Примеры спектров в графическом представлении приведены на рисунках 1 и 2.

Тем самым, задачи, поставленные в данной научно-исследовательской работе, были достигнуты в полной мере.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Thomas S. A., Abdalla F. B., Lahav O.* Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey // *Physical Review Letters*. — 2010. — July. — Vol. 105, no. 3. — ISSN 1079-7114. — DOI: 10.1103/physrevlett.105.031301.
2. *Reines F., Cowan C. L.* Detection of the Free Neutrino // *Physical Review*. — 1953. — Nov. — Vol. 92, no. 3. — P. 830–831. — ISSN 0031-899X. — DOI: 10.1103/physrev.92.830.
3. *Reines F., Cowan C. L.* Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons // *Physical Review*. — 1959. — Jan. — Vol. 113, no. 1. — P. 273–279. — ISSN 0031-899X. — DOI: 10.1103/physrev.113.273.
4. Neutrino oscillations: status and prospects for the determination of neutrino mass ordering and the leptonic CP-violation phase / L. D. Kolupaeva [et al.] // *Physics-Uspekhi*. — 2022. — May. — Vol. 66, no. 08. — P. 753–774. — ISSN 1468-4780. — DOI: 10.3367/ufne.2022.05.039191.
5. *Б. С. Джелепов Л. Н. З.* Влияние электрического поля атома на Бета-распад // *АН СССР*. — 1956.
6. *В. Г. Алексанкин С. В. Родичев П. М. Р. и др.* Бета- и антинейтринное излучение радиоактивных ядер : Справочник // *Энергоатомиздат*. — 1989.
7. *Hayes A. C., Vogel P.* Reactor Neutrino Spectra // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 2016. — Oct. — Vol. 66, no. 1. — P. 219–244. — ISSN 1545-4134. — DOI: 10.1146/annurev-nucl-102115-044826.

8. *Mougeot X., Bé M.-M., Bisch C.* Calculation of beta spectral shapes // Radioprotection. — 2014. — СЕНТ. — Т. 49, № 4. — С. 269—273. — ISSN 1769-700X. — DOI: 10.1051/radiopro/2014017.
9. *Lanczos C.* A Precision Approximation of the Gamma Function // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis. — 1964. — Jan. — Vol. 1, no. 1. — P. 86–96. — ISSN 0887-459X. — DOI: 10.1137/0701008.