

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.1

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**ДИНАМИКА НЕСФЕРИЧЕСКИХ ДОМЕННЫХ
СТЕНОК**

Научный руководитель
(к.ф.-м.н., доцент)

_____ В. В. Никулин

Студент

_____ И. Д. Летягин

Москва 2024

Содержание

Введение	3
1 Основы дифференциальной геометрии	5
1.1 Мотивация	5
1.2 Необходимые математические понятия	5
1.3 Поиск скалярной кривизны	6
1.3.1 Метрика	6
1.3.2 Расчёты с помощью Wolfram Mathematica	6
2 Постановка задачи	7
3 Заключение	8
Приложение 1. Вычисление в Mathematica	9

Введение

Один из наиболее актуальных вопросов в современной космологии заключается в описании модели зарождения первичных чёрных дыр (ПЧД). Гипотезы о механизме формирования ПЧД в ранней Вселенной были предложены в работах [1, 2]. Исследования в этой области тесно связаны с проблемой тёмной материи. Предположительные способы зарождения ПЧД в ранней Вселенной:

1. Коллапс полевых доменных стенок [3], образованных в ходе нарушения калибровочной симметрии вследствие охлаждения Вселенной [4, 5]
2. Коллапс полевых доменных стенок, образованных из-за квантовых флуктуаций вакуума [6, 7].
3. Формирование из первичных неодородностей материи.

Изначально термин "доменная стенка" возник в области физики твёрдого тела, изучающей строение ферромагнетиков, но потом этот термин перешёл в космологию и стал использоваться для описания потенциального барьера между минимумами квантового поля.

Будем рассматривать систему с действием:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - V(\phi) \right) \quad (1)$$

В соседних областях вакуум может иметь различные знаки, что описывается ϕ^4 -потенциалом, с простейшим видом:

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (2)$$

Данный полиномиальный потенциал выделяется тем, что он имеет два минимума, то есть два классических вакуума $\phi^{vac} = \pm v$. Максимум между вакуумами и есть модель полевой доменной стенки.

Из принципа наименьшего действия получается уравнение поля - уравнение Клейна-Гордона:

$$\phi_{,\mu}{}^{,\mu} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (2) для потенциала (3) с условием, что $V(\phi) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, является простейший топологический солитон - кинк:

$$\phi(r) = v \operatorname{th} \left(\pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (r - r_0) \right) \quad (4)$$

Причём уравнение (4) верно, если доменная стенка имеет бесконечно малую толщину.

Наложим условие на это уравнение, то есть будем считать, что потенциал на поверхности тонкой доменной стенки нулевой:

$$\phi(t, 1, \sigma_1, \sigma_2) = 0 \quad (5)$$

В условии (5) под σ_1 и σ_2 понимаются ортогональные координаты, заданные на поверхности нашего многообразия.

Решением уравнения (4) с условием (5) будет солитон [8], эволюция которого может привести к его коллапсу, формирующему ПЧД.

Цель данной работы заключается в изучении основных понятий, используемых в современной теории гравитации, а также в нахождении способа задания координатной сетки на поверхности риманова многообразия, описывающего полевую доменную стенку, с целью дальнейшего математического моделирования и создания спектра масс ПЧД.

1 Основы дифференциальной геометрии

1.1 Мотивация

Основной теорией, описывающей гравитационное взаимодействие тел, является общая теория относительности (ОТО), сформулированная Альбертом Эйнштейном в 1915-ом году. "Языком" ОТО является дифференциальная геометрия и тензорная алгебра внешних дифференциальных форм (алгебра Грассмана). Данные математические области выделяются высоким уровнем абстракции и сложностью. С целью ознакомления с простейшими понятиями дифференциальной геометрии была поставлена задача: определить значение скалярной кривизны тороида, образованного вращением произвольного достаточно гладкого контура.

1.2 Необходимые математические понятия

Скалярная кривизна определяется как след тензора Риччи [9]:

$$R = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \quad (6)$$

Понятие скалярной кривизны является краеугольным в ОТО, так как действие гравитационного поля выражается через интеграл от скалярной кривизны [10]:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (7)$$

Тензором Риччи римановой связности называется тензор $Ric_{\mu\nu} = R_{\mu,\gamma\nu}^\gamma$, то есть тензор, полученный свёрткой тензора Римана по паре индексов. Так как в ортогональных координатах метрический тензор диагонален [9], то имеет смысл упростить формулу (6):

$$R = g^{\mu\mu} Ric_{\mu\mu} \quad (8)$$

Формула для тензора Риччи в предположении о диагональности метрики:

$$R_{\mu\nu}^\nu = \partial_\nu \Gamma_{\mu\mu}^\nu - \partial_\mu \Gamma_{\nu\mu}^\nu + \Gamma_{\mu\mu}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \quad (9)$$

В формуле (9) используется правило Эйнштейна, то есть идёт суммирование по одинаковым индексам α , причём α равен размерности метрического тензора. Также считаем, что кручение аффинной связности нулевое, то есть $\Gamma_{\nu\mu}^\gamma = \Gamma_{\mu\nu}^\gamma$, а $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. $\Gamma_{\nu\mu}^\gamma$ - аффинная связность, также именуемая символом Кристоффеля, которая характеризует изменение компонент вектора при параллельном переносе. Аффинная связность определяется через метрический тензор по формуле:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{g^{\gamma\gamma}}{2} (\partial_\nu g_{\mu\gamma} + \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}) \quad (10)$$

Метрический тензор задаёт скалярное произведение в касательном пространстве и определяется через билинейную форму:

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle \quad (11)$$

Метрический тензор используется для поднятия и опускания индексов у тензоров, то есть

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad (12)$$

$$g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu \quad (13)$$

1.3 Поиск скалярной кривизны

Разберём простейший пример вычислений в дифференциальной геометрии: поиск скалярной кривизны тороида, образованного вращением произвольного непрерывного контура.

1.3.1 Метрика

Начнём с поиска метрики на нашем теле. Будем задавать координаты на торе через полярный угол θ и азимутальный угол ϕ . Полярный угол задаётся в плоскости вращаемого контура и определяет функцию $r = r(\theta)$, которая указывает расстояние от центра фигуры до точки на кривой. Найдём квадрат элемента дуги контура ds_θ^2 :

$$ds_\theta^2 = r^2(\theta) + r^2(\theta + d\theta) - 2r(\theta)r(\theta + d\theta)\cos(d\theta) \quad (14)$$

Учтя слагаемые второго порядка малости, получим выражение для элемента полярной дуги:

$$ds_\theta^2 = (r'(\theta)^2 + r(\theta)^2) d\theta^2 \quad (15)$$

Далее ищем квадрат элемента азимутальной дуги ds_ϕ^2 . Считаем, что центр вращаемой фигуры лежит на расстоянии R^1 от оси вращения. Из-за того, что R является постоянной величиной, выражение для ds_ϕ^2 будет выглядеть проще:

$$ds_\phi^2 = (R + r(\theta)\cos\theta)^2 d\phi^2 \quad (16)$$

В итоге получаем, что квадрат элемента дуги ds^2 равен:

$$ds^2 = ds_\theta^2 + ds_\phi^2 = (r'(\theta)^2 + r(\theta)^2) d\theta^2 + (R + r(\theta)\cos\theta)^2 d\phi^2 \quad (17)$$

Из определения (11) находим выражение для метрического тензора g_{ij} :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r'^2 + r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\theta)^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

1.3.2 Расчёты с помощью Wolfram Mathematica

Так как дальнейшие расчёты символов Кристоффеля, тензора Римана и тензора Риччи являются чередой последовательных взятий производных и суммирования, то эта часть вычисления была проведена с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica (код, с помощью которого производилось вычисление, см. в Приложении 1.).

Скалярная кривизна тороида, образованного вращением контура:

$$R = 2 \frac{(r\cos\theta + r'\sin\theta)(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{(R + r\cos\theta)(r^2 + r'^2)^2} \quad (19)$$

Для анализа полученной формулы рассмотрим предельные случаи:

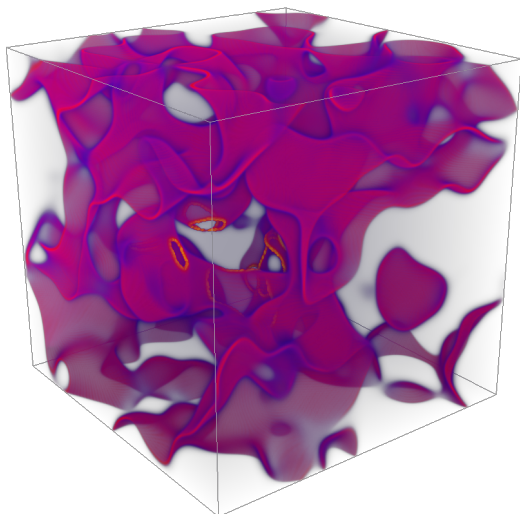
1. Сфера: для сферы верно, что $R \equiv 0$ и $r = \text{const}$. Тогда получаем, что $R = \frac{2}{r^2}$. Данный результат согласуется с известным значением.
2. Тороид: для тора уже $R \neq 0$, но $r = \text{const}$. Скалярная кривизна $R = \frac{2\cos\theta}{r(R + r\cos\theta)}$, что также совпадает с правильным значением.

¹Не следует путать с аналогичной в обозначениях скалярной кривизной R

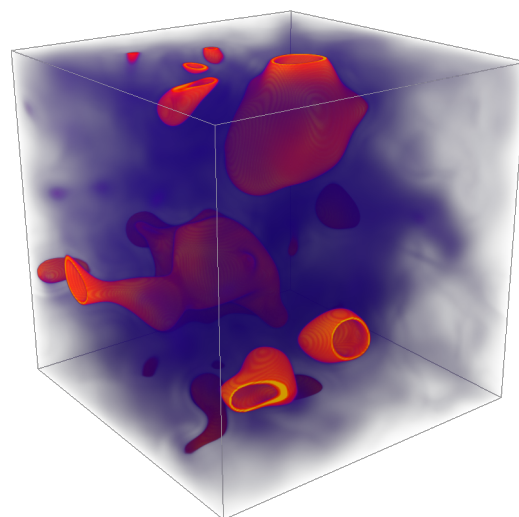
2 Постановка задачи

Одна из самых перспективных теорий, описывающих процесс образования ПЧД в ранней Вселенной, заключается в коллапсе массивных полевых доменных стенок. Обнаружение ПЧД и исследование их характеристик помогут получить ответы на ряд важнейших вопросов в современной теоретической физике, а именно обнаружить излучение Хокинга, пролить свет на процессы, происходившие во время формирования крупномасштабной структуры Вселенной, проверить теории о существовании дополнительных измерений [11, 12] и тёмной материи.

Главная проблема в описании динамики доменных стенок заключается в сложности работы с нетривиальными топологиями. В первых исследованиях предполагалось, что стенки имеют сферическую структуру, которая позволяет достаточно просто описать эволюцию системы [13], но в процессе компьютерной симуляции получают стенки с геометрией, которая намного сложнее сферы. Этот факт затрудняет расчёты динамики структуры численными методами. Научный интерес вызывает вопрос возможности коллапса заданной, например, во время моделирования, доменной конфигурации.



(a) Компьютерная модель «солитонной пены»



(b) Компьютерная модель «доменных пузырей»

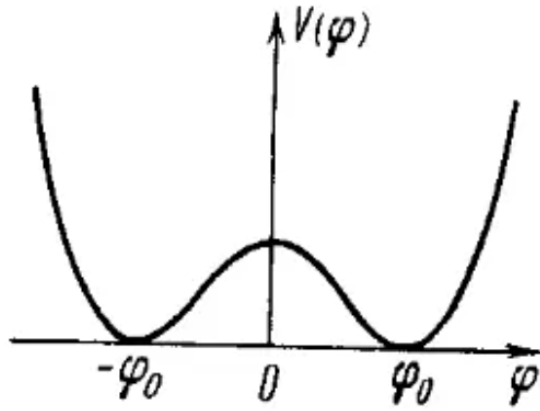
Рис. 1: Результаты компьютерного моделирования

Была выдвинута идея о необходимости первично описать доменную стенку как решение пологого уравнения (4) с ϕ^4 -потенциалом (2). Полученный результат может быть использован для упрощения моделирования или для отбора конфигураций, которые подвержены сжатию к радиусам, необходимым для образования чёрных дыр.

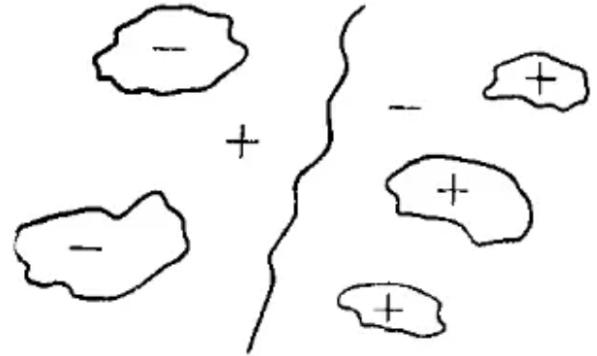
Сложность в теоретическом подходе связана с неординарностью координатной системы, которая сможет описывать геометрию доменных стенок. Текущая идея заключается во введении криволинейной системы 4-координат $X^\mu = (t, r, \sigma_1, \sigma_2)$, где r задаёт криволинейный радиус таким образом, чтобы он пересекал стенку под прямым углом, а σ_1 и σ_2 задают два "квазиугла" наподобие полярного и азимутального угла в сферической системе координат.

В качестве другой потенциальной модели для описания доменных пузырей может выступать система, описанная в статье [14], но из-за сложности используемых понятий из области тетрадной теории гравитации данный метод ещё не был рассмотрен. В лекциях [15] утверждается, что

тетрадная теория гравитации является перспективным методом описания эволюции сферических и несферических систем в приложении к численным моделям.



(a) График ϕ^4 -потенциала



(b) Вакуум разных знаков для ϕ^4 -потенциала

Рис. 2: Вакуумные домены ранней Вселенной

Будущие результаты исследования нужны для сравнения спектра масс чёрных дыр, предсказанного теорией в [6], с реальными данными, которые получаются из современных детекторов гравитационных волн, например, в экспериментах LIGO, VIRGO, GEO600, TAMA 300 и LISA.

3 Заключение

В течение семестра было проведено ознакомление с основами современной теории гравитации и базовыми математическими понятиями, используемыми в приложениях. Была поставлена задача на изучение в следующем семестре, а именно — исследование динамики полевых доменных стенок. Также были изучены статьи [14, 13, 8, 3].

В последующем будет проводиться решение поставленной задачи, улучшение алгоритмов расчёта динамики доменных пузырей и обработка полученных данных.

Приложение 1. Вычисление в Mathematica

```
vars = {\[Phi], \[Theta]};
Clear[r];
g = {{D[r\[Phi]], \[Phi]^2 + r\[Phi]^2, 0},
     {0, (R + r\[Phi] Cos\[Phi])^2}};
MatrixForm[g]; (*отображение метрического тензора в виде матрицы*)
ginv = Inverse[g]; (*обратный метрический тензор*)
Gamma[i_, j_, k_] :=
  1/2 Sum[ginv[[i, l]] (D[g[[j, l]], vars[[k]]] + D[g[[k, l]], vars[[j]]] -
    D[g[[j, k]], vars[[l]]]), {l, 1, Length[vars]}];
(*расчёт символов Кристоффеля*)
GammaMatrix =
  Table[Table[Gamma[i, j, k], {j, 1, Length[vars]}, {k, 1, Length[vars]}],
    {i, 1, Length[vars]}];
MatrixForm[GammaMatrix]; (*отображение символов Кристоффеля в виде "матрицы"*)
R[i_, j_, k_, l_] :=
  D[Gamma[i, j, l], vars[[k]]] - D[Gamma[i, j, k], vars[[l]]] +
  Sum[(Gamma[i, k, m] Gamma[m, j, l] - Gamma[i, l, m] Gamma[m, j, k]),
    {m, 1, Length[vars]}]; (*расчёт тензора Римана*)
Ric[i_, j_] :=
  Sum[R[l, i, l, j], {l, 1, Length[vars]}]; (*расчёт тензора Риччи*)
RCurve := Sum[(ginv[[i, j]]*Ric[i, j]), {i, 1, Length[vars]},
  {j, 1, Length[vars]}]; (*расчёт скалярной кривизны*)
G[i_, j_] := Ric[i, j] - g[[i, j]]*RCurve/2; (*расчёт тензора Эйнштейна*)
GMatrix =
  Table[Table[Simplify[G[i, j]], {j, 1, Length[vars]}],
    {i, 1, Length[vars]}];
MatrixForm[GMatrix]; (*отображение тензора Эйнштейна*)
Simplify[RCurve]
```

Список литературы

- [1] S. Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. Mon. Not. R. Astron. Soc., 168:399–416, 1974.
- [2] Y. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model. Sov. Astron., 10:602, 1967.
- [3] Jaume Garriga, Alexander Vilenkin, and Jun Zhang. Black holes and the multiverse. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016(02):064–064, February 2016.
- [4] A. D. Linde. Elementary particle physics and inflationary cosmology. Nauka, 1990.
- [5] Kohei Fujikura, Mairi Sakellariadou, Michiru Uwabo-Niibo, and Masahide Yamaguchi. Formation of defects associated with both spontaneous and explicit symmetry breaking, 2024.
- [6] S. G. Rubin, A. S. Sakharov, and M. Yu. Khlopov. The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 92(6):921–929, June 2001.
- [7] Konstantin M. Belotsky, Vyacheslav I. Dokuchaev, Yury N. Eroshenko, Ekaterina A. Esipova, Maxim Yu. Khlopov, Leonid A. Khromykh, Alexander A. Kirillov, Valeriy V. Nikulin, Sergey G. Rubin, and Igor V. Svadkovsky. Clusters of primordial black holes. The European Physical Journal C, 79(3), March 2019.
- [8] M. A. Lohe. Soliton structures in $p(\phi)_2$. Physical review D, 20(12), 1979.
- [9] A. S. Mischenko and A. T. Fomenko. Course of differential geometry and topology. Factorial Press, 2000.
- [10] S. V. Chervon N. A. Koshelev, A. V. Nikolaev. Basics of $f(R)$ theory of gravity. UIGPU named after I.N.Ulyanov, 2015.
- [11] Arkady A. Popov, Sergey G. Rubin, and Alexander S. Sakharov. Primordial black holes from spatially varying cosmological constant induced by field fluctuations in extra dimensions. Universe, 10(4):166, March 2024.
- [12] Valery V. Nikulin, Maxim A. Krasnov, and Sergey G. Rubin. Compact extra dimensions as the source of primordial black holes, 2022.
- [13] Jean-Guy Caputo, Tomasz Dobrowolski, Jacek Gatlík, and Panayotis G. Kevrekidis. Radial kinks in a schwarzschild-like geometry, 2024.
- [14] Andro Barnaveli and Merab Gogberashvili. Antigravitating bubbles, 1995.
- [15] Ericourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity, 2007.