Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИЗУЧЕНИЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ТЕМНОГО АТОМА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА ЯДРА

Научный руководитель
д.ф.-м.н, проф. ________ Хлопов М. Ю.

Научный консультант ________ Сопин Д. О.

Студент ________ Мвилима Д.

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Убедительные доказательства существования скрытой массы проявляются в поведении галактик, гравитационном линзировании и анизотропии космического микроволнового фонового излучения.Эти данные указывают на то, что скрытая масса не является барионной. Обсуждаются различные кандидатуры на ее роль.. К ним относятся слабо взаимодействующие массивные частицы (WIMPs), суперсимметричные частицы (SUSY) и другие подобные кандидаты. Отсутствие положительных результатов поиска WIMPs и суперсимметричных частиц на Большом адронном коллайдере (БАК) делают интересным вопрос о других возможных кандидатах на роль скрытой массы. В данной работе мы исследуем квантово-механическое описание структуры темных атомов.

Темный атом представляет собой связное состояние нового тяжелого лептона X^{-2n} и n ядрами ^{4}H [**1**]. Как показано в этой статье, модель может объяснить парадоксы поиска частиц скрытой массы в подземных экспериментах. Свойства темных атомов определяются их структурой, анализ которой и является целью настоящей работы.

Цель: В этой работе мы изучаем квантовое описание темного атома в случае OHe, принимая во внимание конечный размер ядра гелия. Атом OHe напоминает модель атома Бора с тяжелой O^{2-} частицей в центре и ядром гелия (He^{2+}), связанным в орбите вокруг этой O^{2-} частицы. Этот подход вдохновлен работой профессора Окса с альтернативной формой атомов водорода (AHA), в которой он рассматривал сингулярные решения атомов водорода и учитывал конечный размер ядра для получения нормируемого решения основного состояния атома водорода[**2**].

Задачи:

- Решить стационарное уравнение Шредингера для изолированного атома OHe с учетом конечного размера ядра гелия.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Известно, что существует два класса решений уравнения Шредингера, моделирующих движение в центрально-симметричном поле[**2**][**3**]. Эти два решения характеризуются различным поведением при малых r:

$$R(r) \approx r^l \qquad \text{обычное решение} \tag{1}$$

и

$$R(r) \approx \frac{1}{r^{l+1}} \tag{2}$$

интеграл нормализации которого $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr$ явно сходится для l = 0. Единственной причиной отказа от второго решения (2) является то, что его интеграл нормализации расходится для $x \to \infty$ Профессор Окс показал, что, Учитывая конечный размер нуклона и сопоставляя внутреннее решение с внешним сингулярным решением на границе нуклона, можно избавиться от этой проблемы нормализации. Кроме того, он привел два класса моделей потенциала взаимодействия внутри нуклона, использование которых позволяет обеспечить возможное совпадение решений на границе нуклона. Это:

$$\begin{cases} V(r) = -\left(\frac{Z\alpha}{R}\right) \exp\left[\frac{R-r}{b}\right], \quad 0 < b \ll R. \\ V(r) = -\left(\frac{Z\alpha}{R}\right) \frac{(R^m+b^m)}{(r^m+b^m)}, \quad m \geq 3, \quad 0 < b \ll R. \end{cases} \tag{3}$$

2. РАСЧЕТЫ

2.1 Постановка задачи

Уравнение Шредингера может быть записано в сферической системе координат с центром, совпадающим с положением частицы O^{2-} частица, для внешней области (r>R) и внутренней области (r<R) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{H}}_0\Psi_{\mathrm{I}}(r) = \mathrm{E}_{0(\mathrm{He})}\Psi_{\mathrm{I}}, & r > R, \\ \hat{\mathrm{H}}\Psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{E}_{0(\mathrm{He})}\Psi_{\mathrm{II}}, & r < R \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, R - радиус ядро гелия (He^{2+}), а гамильтонианы $\hat{H}_0$ и $\hat{H}$ имеют вид:

$$\hat{\mathrm{H}}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_{he}}\Delta - \frac{4e^2}{r}, \tag{5}$$

$$\hat{\mathrm{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m_{he}}\Delta - \frac{4\alpha}{\mathrm{R}}e^{\left(\frac{\mathrm{R-r}}{\mathrm{b}}\right)} \tag{6}$$

Вид потенциала взаимодействия в гамильтониане (6), указанный в (3). Случай с $r > R$ Аналогичен атому водорода и имеет свое радиальное уравнение[**3**]:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{4e^2}{r} + E\right)R(r) = 0. \tag{7}$$

Решение этого уравнения известно как:

$$R_{n,l}(r) = N_{n,l}\left(\frac{8}{n}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{n}\right)^l e^{-\frac{4r}{n}}L_{n-l-1}^{(2l+1)}\left(\frac{8r}{n}\right) \tag{8}$$

Теперь перейдем к решению уравнения для внутренней части ядра. Первая задача будет состоять в том, чтобы сопоставить это решение с обычным внешним решением (8) при $r < R$. Радиальное уравнение в этом случае после ряда преобразований имеет вид:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{4\alpha}{R}e^{\left(\frac{R-r}{b}\right)} + E\right)R(r) = 0. \tag{9}$$

Выполнив следующие замены,

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad \beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{4\alpha}{R}.$$

мы получим

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R(r) + \left(k^2 + \beta e^{\left(\frac{R-r}{b}\right)}\right)R(r) = 0. \tag{10}$$

Учитывая сложность дифференциального уравнения, мы попытаемся найти приближенные аналитические решения методами теории возмущений.

2.2 Подход теории возмущений

Я приведу в общем виде вероятный путь, по которому следует идти. Невозмущенное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R(r) + k^2R(r) = 0.$$

Общее решение этого уравнения задается сферическими функциями Бесселя первого и второго рода:

$$R_0(r) = Aj_\ell(kr) + By_\ell(kr), \tag{11}$$

где A и B - константы.

Предполагая, что решение $R(r)$ может быть записано в виде:

$$R(r) = R_0(r) + \beta R_1(r),$$

где $R_0(r)$ - невозмущенное решение, а $R_1(r)$ - поправка первого порядка. Исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2R_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_1(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_1(r) + k^2R_1(r) = -\varepsilon e^{-\frac{r}{b}}R_0(r). \qquad (12)$$

Далее придется использовать метод Грина для решения этого уравнения.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данный момент соответствующая теоретическая база для изучения этой проблемы была изучена и продолжает изучаться. Это включает в себя статьи, представленные в списке литературы. Были поставлены две математические задачи. Первая будет заключаться в нахождении внутреннего решения (для $r < R$), а вторая - в нахождении явной формы внешнего сингулярного решения. В процессе работы внешние и внутренние решения будут подвергнуты ограничениям на соответствие на границе ($r = R$). Этот подход позволит нам получить единое описание как боровских структур темного атома, так и структур, подобных Томпсону, без необходимости проводить различия между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beylin, V.A.; Bikbaev, T.E.; Khlopov, M.Y.; Mayorov, A.G.; Sopin, D.O. Dark Atoms of Nuclear Interacting Dark Matter. Universe 2024, 10, 368. https://doi.org/10.3390/universe10090368

2. Oks, E. 2001: High-energy tail of the linear momentum distribution in the ground state of hydrogen atoms or hydrogen-like ions. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 34, 2235-2243

3. Landau L D and Lifshitz E M 1965 Quantum Mechanics (Oxford: Pergamon)

4. M. Khlopov, What comes after the Standard Model?, Progress in Particle and Nuclear Physics, Volume 116, 2021, 103824, ISSN 0146-641

$$-\frac{2m}{\hbar^2}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$