Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО ИЗВЕСТНЫМ ПОЛЯМ

Научный руководитель
(должность, степень, звание) __________ И. О. Фамилия

Студент __________ И. О. Фамилия

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1 Определения

Солитонами называют определенные частные решения нелинейных волновых уравнений. Для начала рассмотрим решения простейшего из релятивистских волновых уравнений

$$\Box\phi = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi(x,t) = 0 \tag{1}$$

где $\phi(x,t)$ - действительное скалярное поле в одном пространственном и одном временном $(1+1)$ измерениях. Солитон в $(1+1)$ измерениях называется кинком. Решения данного уравнения обладают двумя интересными свойствами:

1. Сохранение формы и скорости отдельного решения

2. Сохранение формы и скорости нескольких решений после столкновения (сумма решений есть решение).

Нарушение однородности уравнения (1) ведет потере свойств 1 и 2 для большинства решений.

Рассмотрим скалярное поле $\phi(x,t)$, динамика которого задается лоренц-инвариантной плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\phi_t)^2 - \frac{1}{2}(\phi_x)^2 - V(\phi) \tag{2}$$

Где ϕ_{tt}, ϕ_{xx} частные производные по времени и координате соответственно $V(\phi)$ - любая неотрицательная функция от ϕ, достигающая минимума нуля конечном числе точек g_i, $i > 0$. Будем называть V - потенциалом, а ϕ - полем. Уравнения Эйлера-Лагранжа в нашем случае имеют вид:

$$\Box\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}(x,t) \tag{3}$$

Функционал энергии:

$$E[\phi] = \int\limits_{\mathbb{R}} dx[\frac{1}{2}(\phi_t)^2 + \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + V(\phi)] \tag{4}$$

Нас интересуют статические решения конечной энергией. Из требования конечности энергии получаем, что ϕ приближается к g_i при стремлеении x к $\pm\infty$. Стационарное уравнение (3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{5}$$

Это уравнение легко интегрируется, и для любого потенциала можно получить зависимость $x(\phi)$:

$$x - x_0 = \int\limits_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\zeta}{\sqrt{2V(\zeta)}} \tag{6}$$

Рассмотрим случай потенциала $V(\phi,\psi)$, зависящего от двух полей ϕ и ψ. Для них стационарные полевые уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & = & \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & = & \frac{\partial V}{\partial \psi} \end{cases} \tag{7}$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений, которую нельзя просто проинтегрировать. Как и прежде, ϕ и ψ должны стремиться к нулям V при стремлении x к $\pm\infty$. Отсюда получаем, что решение волнового уравнения задает некоторую кривую параметризованную $x \in \mathbb{R}$ на плоскости $O_{\phi\psi}$, соединяющую минимумы V. Эту кривую также называют орбитой.

1.2 Постановка задачи

Основной задачей теории является поиск кинковых решений для заданного потенциала. Предлагается рассмотреть обратную задачу: известны кинковые решения $\phi_i(x)$, необходимо найти потенциал V, в котором данные решения могут существовать. Случай одного скалярного поля позволяет получить связь $x(\phi)$ с потенциалом $V(\phi)$, поэтому задача сводится к задаче по поиску обратной функции. Рассмотрим случай двух полей $\phi(x)$ и $\psi(x)$. Эти поля задают некоторую кривую на плоскости. Из системы (7) известна связь кинков с частными производными искомого потенциала V на этой кривой. Предположим, что искомый потенциал есть гармоническая функция, т.е.:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0$$

тогда поведение частных производных на границе можно связать с задачей Неймана: Найти гармоническую функцию V в области Ω, если известна ее нормальная $\frac{\partial V}{\partial n}$ производная на границе области $\partial\Omega$. $V \in C^2(\Omega)\&V \in C^1(\overline{\Omega})$, граница кусочно-гладкая кривая. Также для разрешимости задачи Неймана должно выполняться условие:

$$\int\limits_{\partial\Omega} ds \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \tag{8}$$

Граница области есть замкнутая кривая. Пара кинков ϕ, ψ задает замкнутую кривую только тогда, когда $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ и $\psi(+\infty) = \psi(-\infty)$, в противном случае необходимо рассмотреть набор из нескольких пар кинков таких, что объединение их орбит будет давать замкнутую кривую.

Для любой гармонической функции V существует сопряженная к ней гармоническая функция U такая, что $f = V + iU$ - голоморфная функция. Из условий Коши-Римана получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$$

Нормальная производная задается выражением:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \phi}\cos(\alpha) + \frac{\partial V}{\partial \psi}\sin(\alpha)$$

Подставив условия Коши-Римана получим:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial \psi}\cos(\alpha) - \frac{\partial U}{\partial \phi}\sin(\alpha) = \frac{\partial U}{\partial \psi}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) + \frac{\partial U}{\partial \phi}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \frac{\partial U}{\partial s}$$

Т.е:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial s}$$

Откуда непосредственным интегрированием получаем:

$$\widetilde{U}(\zeta) = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} ds \frac{\partial U}{\partial s} \tag{9}$$

Зная гармоническую функцию на границе области, легко восстановить функцию в области при помощи интеграла Пуассона:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt \cdot \widetilde{U}(w^{-1}(e^{it}))\frac{1-|w(z)|^2}{|e^{it}-w(z)|^2} \tag{10}$$

Где $z = \phi + i\psi$, $w(z)$ - конформное отображение заданной области Ω на единичный круг.

Зная $U(z)$ простым интегрированием найдем функцию $V(z)$:

$$V(\phi,\psi) = V(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial U}{\partial \phi}d\psi - \frac{\partial U}{\partial \psi}d\phi \tag{11}$$

Пример. Рассмотрим случай, когда область представляет из себя единичный круг. Выберем две пары кинков, соединяющих точки $(\pm 1, 0)$ вдоль дуг окружности:

$$(\phi_1(x),\psi_1(x)) = (\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) \tag{12}$$

$$(\phi_2(x),\psi_2(x)) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}) \tag{13}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Параметризовав точки, получим:

$$\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+1}} = \cos(\alpha) \tag{14}$$

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{x^2+1}} = \sin(\alpha) \tag{15}$$

$$\alpha \in (0, 2\pi)$$

Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial x^2} = \frac{\pm 3x}{(x^2+1)^{5/2}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial x^2} = \pm \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}} \tag{17}$$

Выразим производные через $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial x^2} = 3\cos(\alpha)\sin^4(\alpha) \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial x^2} = 2\cos^2(\alpha)\sin^3(\alpha) - \sin^5(\alpha) \tag{19}$$

Для случая единичного круга можно воспользоваться интегралом Шварца. Пусть искомая функция является вещественной частью голоморфной функции $f = V + iU$. Для круга имеем: $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial n}$ Производная голоморфной функции не зависит от направления, поэтому представим аргумент как $z = re^{it}$, тогда:

$$f' = \frac{1}{e^{it}}(\frac{\partial V}{\partial r} + i\frac{\partial V}{\partial r}) \tag{20}$$

$$\frac{z}{r}f' = (\frac{\partial V}{\partial r} + i\frac{\partial V}{\partial r}) \tag{21}$$

Подставляя в интеграл Шварца, получим:

$$zf' = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\partial V}{\partial n}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{22}$$

$$f = \frac{1}{\pi i}\int \frac{dz}{z}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\partial V}{\partial n}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{23}$$

Поменяв порядок интегрирования, с учетом (8):

$$f = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial n}(e^{i\alpha})\ln(e^{i\alpha} - z)d\alpha \tag{24}$$

$$V = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial n}(e^{i\alpha})\ln|e^{i\alpha} - z|d\alpha \tag{25}$$

$$V = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (5\cos^2(\alpha)\sin^4(\alpha) - \sin^6(\alpha))(e^{i\alpha})\ln|e^{i\alpha} - z|d\alpha + const \tag{26}$$

Данное решение

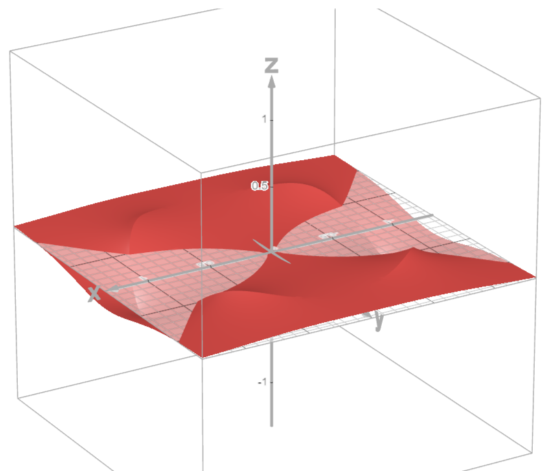

Рисунок 1

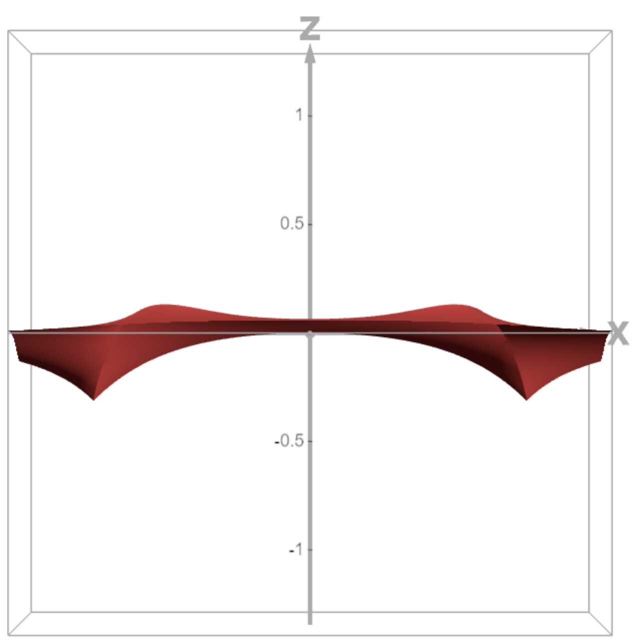

Рисунок 2

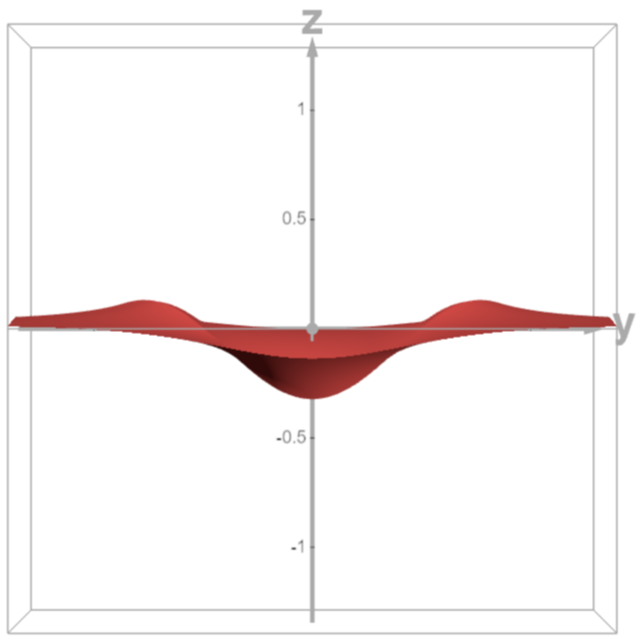

Рисунок 3

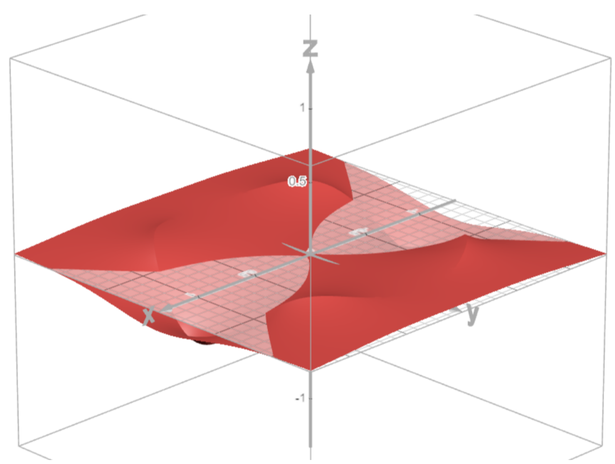

Рисунок 4

1.3 Заключение

Для случая двух полей был найден гармон
bibliography