

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ
РАБОТЕ
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЕЙТМАНА

Научный руководитель
ассистент каф.40



_____ Д. В. Попов

Студент группы Б22-102

_____ Э. А. Фахрутдинов

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Теоретическая часть	6
1.1 Рождение реакторных антинейтрино	6
1.2 Система уравнений Бэйтмана	8
1.3 Методы численного решения систем дифференциальных уравнений	10
1.3.1 Явный метод Эйлера	11
1.3.2 Явные методы Рунге-Кутты	12
2 Практическая часть	14
2.1 Теоретический расчёт активностей для трёх изотопов	14
2.2 Реализация и анализ собственного алгоритма	16
Заключение	23

ВВЕДЕНИЕ

На данный момент основополагающей теоретической конструкцией в физике является Стандартная модель, позволяющая описывать электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия. Её формирование завершилось в 2012 после экспериментального подтверждения существования бозона Хиггса. Однако в теории, которую предполагает Стандартная модель, присутствует множество недостатков. Например, согласно теории, нейтрино должно быть строго безмассовым, в то время как экспериментально было доказано, что нейтрино обладают массой, хоть и крайне малой[1]. Эта трудность, наряду с другими проблемами Стандартной модели, наводит на мысли о проведении новых экспериментов, которые позволят расширить Стандартную модель и открыть новую физику.

Существование нейтрино было предложено Паули в 1930 году, чтобы разрешить проблему несохранения энергии и углового момента при бета-распаде ядра. Тем не менее, доказательства того, что нейтрино действительно существуют, пришлось ждать до 1953-1959 годов, когда Райнес и Коуэн [2] обнаружили электронные антинейтрино, испускаемые ядерным реактором. Этот фундаментальный эксперимент положил начало исследованию нейтрино с использованием реакторных антинейтрино.

Исследование нейтрино предполагает широкий спектр вариантов их прикладного использования. Так, например одно из перспективных направлений использования нейтрино — это нейтринная астрономия. Также активно разрабатывается технология мониторинга состава ядерного топлива внутри реактора и, соответственно, его мощности по изменению энергетических спектров антинейтрино с течением времени [3]. На ряду с этим есть и множество фун-

даментальных проблем в области нейтринной физики, требующих решения, например дефицит событий при измерении энергетического спектра электронных антинейтрино от ядерного реактора. Таким образом, изучение этого типа частиц в последние годы приобретает всё большую **актуальность**.

На настоящий момент выделяют три основных группы нейтрино, которые регистрируют на Земле: космические, природные (β активные нуклиды, находящиеся в земной коре) и нейтрино от ускорителей и ядерных реакторов. Основным преимуществом проведения экспериментов именно с реакторными антинейтрино является тот факт, что ядерный реактор является самым высокоинтенсивным источником антинейтрино на планете (поток на расстоянии 10 м от активной зоны реактора составляет $10^{13} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-2}$), что в свою очередь упрощает проведение экспериментов по регистрации нейтрино.

Рождение антинейтрино в ядерном реакторе происходит из-за процессов β распада фрагментов деления ядерного топлива. При каждом делении составляющих ядерного топлива (в основном в качестве топлива используются изотопы: ^{235}U , ^{239}Pu) рождение того, или иного осколка является вероятностным процессом. Вместе с этим энергетический спектр антинейтрино будет разным для разных β распадчиков, активность которых меняется вместе с числом изотопов в зависимости от времени. Таким образом, для того, чтобы выполнить оценку зависимости энергетических спектров антинейтрино ядерного реактора от времени, необходимо учесть изменение активности в цепочке соответствующих β распадов. Математической моделью, описывающей данные изменения активностей в цепочке распадов, является система уравнений Бейтмана.

Цель данной работы заключается в разработке универсального алгоритма численного решения системы уравнений Бейтмана для описания зави-

симости активности в цепочке β^- распадов для дальнейшего учёта в расчёте энергетических спектров антинейтрино от ядерного реактора.

Задачи

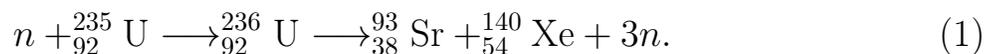
- Изучить методику расчёта активностей радиоактивных изотопов;
- Проанализировать различные численные методы для решения систем дифференциальных уравнений;
- Написать собственную программу для решения системы уравнений Бейтмана в простейшем приближении и сравнить алгоритм со встроенным системным.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. РОЖДЕНИЕ РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО

Как было отмечено выше, наиболее интенсивным источником антинейтрино на Земле служит ядерный реактор. Принцип работы ядерного реактора основан на самоподдерживающейся, цепной реакции деления тяжелых ядер, сопровождающейся выделением энергии. Реакторы на тепловых нейтронах вырабатывают энергию за счет процесса деления изотопа урана ^{235}U . В природе в основном распространен ^{238}U , и только 0.72% из естественной смеси изотопов приходится на ^{235}U , который используется в качестве реакторного топлива. Под действием нейтронов ^{235}U делится на осколки с испусканием вторичных нейтронов. При этом за один акт деления выделяется энергия около 200 МэВ. Вторичные нейтроны, после замедления, в свою очередь, могут вызвать деление следующих ядер урана.

В результате деления ядра ^{235}U могут образоваться 2 (или более) нестабильных осколка, например:



При этом образование того или иного продукта деления топлива носит вероятностный характер.

После деления образовавшиеся осколки претерпевают цепочку β^- – распадов до тех пор, пока соотношение нейтронов и протонов в образовавшемся ядре не придет в равновесие, т.е. до образования стабильных ядер. Для сложных ядер распад имеет вид:



При этом электрон и антинейтрино уносят большую долю энергии этого распада [4].

Полный энергетический спектр антинейтрино может быть выражен как сумма спектров доминирующих делящихся актиноидов [5]:

$$S(E_\nu) = \sum_i f_i \left(\frac{dN_i}{dE_i} \right), \quad (3)$$

где f_i - число делений актиноида i , $\frac{dN_i}{dE_i}$ - кумулятивный i -ый спектр, нормированный на деление.

Ещё одним важным источником нейтрино в ядерном реакторе являются радиоактивные изотопы в ядерном топливе, не принимающие участия в процессе деления. В результате захвата нейтрона изотопами ^{238}U происходит образование нестабильного изотопа ^{239}U ($T=23$ мин). В дальнейшем, также происходит цепочка бета-распадов с образованием трансурановых элементов:



Управление топливом, то есть рециркуляция топлива и перестановка топливных стержней в активной зоне реактора, весьма специфично для различных конструкций реактора. Например, реакторы CANDU предполагают частую рециркуляцию топлива, и состав топлива поддерживается близким к постоянному. С другой стороны, в стандартных ВВЭР - реакторах с водой под давлением, в течение каждого реакторного цикла, который обычно длится приблизительно 500 суток [5], состав топлива постоянно меняется: ^{235}U истощается, образуется ^{239}Pu , и доля деления ^{239}Pu увеличивается. В следствие этого со временем меняется и энергетический спектр антинейтрино.

1.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БЭЙТМАНА

Поскольку количественный состав изотопов, на которые делятся ядра ^{235}U меняется со временем, то энергетические спектры антинейтрино, рождаемых в результате β^- распадов этих осколков, также зависят от времени. Возникает необходимость учитывать временное изменение активностей изотопов, находящихся в цепочке β^- распадов, а соответственно и число тех или иных актиноидов. Для описания активности и содержания элементов в цепочке распадов, как функции времени, на основе скорости распада и начальных содержаний пользуются уравнениями Бейтмана. Модель была сформулирована Эрнестом Резерфордом в 1905 году, а аналитическое решение было представлено Гарри Бейтманом в 1910 году[6].

В общем случае для описания накопления того или иного j -ого продукта деления в выделенном объёме активной зоны реактора необходимо учитывать следующие основные факторы: сложный состав топлива (обогащение ^{235}U), образование и одновременное деление вторичного ядерного топлива (^{239}Pu , ^{240}Pu , ^{241}Pu), радиационный захват нейтронов продуктами деления (и ядрами ^{238}U) и естественный распад продуктов деления по цепочкам радиоактивных превращений. Таким образом, дифференциальные уравнения, описывающие изменение во времени концентрации j -ого нуклида имеют вид[7]:

$$\frac{dB_j(t)}{dt} = -\lambda_j B_j(t) - \bar{\sigma}_i^c \bar{\Phi} B_j(t) + \sum_{i=1}^p \bar{y}_{ij} \bar{\sigma}_i^f \bar{\Phi} U_i(t) + \sum_{m=1}^{j-1} \lambda_{mj} B_m(t) + \sum_{m=1}^{j-1} \sigma_{mj}^c \bar{\Phi} B_m(t), \quad (5)$$

при начальном заданном условии $B_j(0) = B_{0j}$.

Здесь $B_j(t)$ – число ядер j -ого нуклида в момент времени t , связанное с его активностью следующим образом: $A_j(t) = -\lambda_j B_j(t)$; $\bar{\Phi}$ – одногрупповая интегральная плотность потока нейтронов; индекс m принадлежит ядру предшественнику $m < j$; \bar{y}_{ij} – независимый выход j -ого нуклида при делении i -ого

компонента топлива, усреднённый по действующему спектру нейтронов; λ_{mj} – вероятность превращения m -ого нуклида в j -ый посредством β^- , β^+ – распадов, E-захвата и т.п., $\bar{\sigma}_i^f$ – одногрупповое сечение деления i -го делящегося актиноида; $\bar{\sigma}_i^c$ – одногрупповое сечение реакций (n, γ) , $(n, 2n)$, i -ого нуклида; $\bar{\sigma}_{mj}^c$ – одногрупповое сечение реакций (n, γ) , $(n, 2n)$ - на m -ом ядре с образованием j -го; $U_i(t)$ – концентрация i -ого делящегося актиноида; индекс i пробегает значения по всему числу возможных изотопов, образовавшихся в результате деления.

Данная система является системой из большого числа связанных между собой дифференциальных уравнений. В рамках данной работы мы будем заниматься разработкой алгоритма решения данной системы лишь в простейшем приближении, а именно, рассмотрим первое слагаемое в правой части уравнения (5).

1.3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задачи, содержащие линейные дифференциальные уравнения часто встречаются в предметной области ядерной физики. Будем рассматривать системы, в которых число неизвестных функций совпадает с числом уравнений, разрешенных относительно производных. Численные методы решения ОДУ делятся на одношаговые и многошаговые, которые в свою очередь можно разделить на явные и неявные. Явные одношаговые методы можно записать в виде:

$$y_{k+1} = y_k + h_k \Phi(x_k, y_k), \quad (6)$$

- где $h_k = h$ - приращение аргумента ($x_{k+1} = x_k + h_k$), y_k - приближённое решение в точке x_k . $y(x)$ - точное решение, в частности, $y(x_k)$ - точное решение в точке x_k . Для продвижения на один шаг одношаговые методы используют значения решения лишь в одной предыдущей точке. Явные многошаговые методы используют решение в нескольких предыдущих точках:

$$y_{k+1} = y_k + h_k \Phi(x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m}). \quad (7)$$

Любой численный метод обладает определённой неточностью, связанной с приближённым вычислением значения функции в точке. Данная неточность зависит от конкретного метода численного решения. Например для одношагового метода:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k \Phi(x_k, y(x_k)) + \delta_{k+1}, \quad (8)$$

- где величина δ_{k+1} - является погрешностью метода на k -ом шаге. В связи с этим вводят понятие порядка метода. Говорят, что метод имеет порядок p

($p > 0$), если $\delta_{k+1} = O(h^{p+1})$, то есть справедливо равенство $|\delta_{k+1}| \leq Ch^{p+1}$, C - произвольная независимая константа.

Помимо явных методов, существуют также неявные методы численного решения, основанные на вычислении значения функции в точке x_{k+1} . Данные методы сложнее, но они хорошо реализуются в отношении так называемых *жестких* систем ЛОДУ. Остановимся на двух основных методах: **метод Эйлера** и **метод Рунге-Кутты**[8].

1.3.1 Явный метод Эйлера

Рассмотрим задачу

$$y' = f(x, y), y(0) = y_0, \quad (9)$$

проинтегрируем по отрезку $[x_k; x_{k+1}]$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (10)$$

Используя метод левых прямоугольников получим для интеграла:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \delta_{k+1}, \quad (11)$$

- где δ_{k+1} - остаточное слагаемое, причём $\delta_{k+1} = O(h^2)$. Отбрасывая остаточное слагаемое получим вычислительную формулу метода:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

С учётом вида остаточного члена можно сделать вывод, что метод имеет первый порядок.

1.3.2 Явные методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты в общем виде записываются следующим образом

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i, \\ K_i &= f(x_k + c_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j), \end{aligned} \quad (13)$$

- где s - называется числом стадий метода. Из вида выражения для коэффициентов K_i - можно последовательно вычислять K_1, K_2, \dots, K_S :

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + c_2 h, y_k + h a_{21} K_1) \\ &\dots\dots\dots \\ K_s &= f(x_k + c_s h, y_k + h a_{s1} K_1 + \dots + h a_{s,s-1} K_{s-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Простейший явный метод Рунге - Кутты - это явный метод Эйлера. Из схемы работы метода Рунге - Кутты можно получить выражение для модифицированного метода Эйлера: Проинтегрируем уравнение по отрезку $[x_k; x_{k+1}]$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx, \quad (15)$$

- где вычислим интеграл с помощью формулы средних прямоугольников

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}). \quad (16)$$

Вычислим $y_{k+1/2}$ по явному методу Эйлера:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k). \quad (17)$$

Вводя обозначения K_i полученные формулы можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h K_2, \\ K_1 &= f(x_k, y_k), \\ K_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + h \frac{K_1}{2}). \end{aligned} \quad (18)$$

Данный метод является двухстадийным (т.е. $s = 2$) и имеет степень точности $p = 2$.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ АКТИВНОСТЕЙ ДЛЯ ТРЁХ ИЗОТОПОВ

Зависимость энергетического спектра антинейтрино от времени может быть описана следующим образом:

$$S(E, t) = \sum_i A_i(t) S_i(E), \quad (19)$$

где $A_i(t)$ – активность изотопа, $S_i(E)$ – энергетический спектр антинейтрино от i -ого изотопа. Таким образом, для расчёта зависимости энергетического спектра антинейтрино от времени необходимо знать активности изотопов в конкретной цепочке β^- – распадов. Для простоты проведём расчёт зависимости числа ядер в цепочке от времени для трёх изотопов.

Рассмотри систему:

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = \lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + R_2, \end{cases} \quad (20)$$

где N_0, N_1, N_2 – число ядер соответствующего изотопа в момент времени t ; λ_1, λ_2 – постоянные распадов этих изотопов (вероятность распада в единицу времени); R_2 – скорость накопления 2-го изотопа (за счёт деления ядер топлива или распадов изотопов из другой цепочки). Будем считать, что первоначальное число изотопов нам известно. Требуется решить задачу Коши.

Пусть, для простоты, начальные условия будут однородными:

$$\begin{cases} N_0(0) = 0 \\ N_1(0) = 0 \\ N_2(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Физический смысл системы (20) заключается в следующем: изотоп N_2 распадается и одновременно нарабатывается за счёт внешнего источника; изотоп N_1 нарабатывается за счёт распада N_2 и в то же время сам претерпевает распад; изотоп N_0 является стабильным и накапливается в результате распада N_1 .

Аналитическое решение задачи Коши имеет вид

$$\begin{cases} N_0(t) = -\frac{R\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-\lambda_2 t} + Rt - R\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1 t} - \frac{R\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} + R\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \\ N_1(t) = -\frac{R}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t} + \frac{R}{\lambda_1} + R\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = \frac{R}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}). \end{cases} \quad (22)$$

Видно, что данное решение имеет особенность при $\lambda_1 = \lambda_2$. При устремлении

$\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ в численном решении происходит резкое возрастание погрешности вычислений и решение задачи явными методами не представляется возможным. Такие задачи в численных методах называются *жесткими* и требуют использования неявных методов для решения. Ограничимся рассмотрением случая $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ СОБСТВЕННОГО АЛГОРИТМА

Поскольку в будущем предстоит реализовать решение системы уравнений Бейтмана в самом общем виде с учётом всех слагаемых, необходимо создать алгоритм с минимальным накоплением погрешности в процессе решения. Для выбора правильного алгоритма требуется провести анализ точности численных методов решения систем дифференциальных уравнений на примере системы, имеющей аналитическое решение. В данной работе самостоятельно реализуется метод Рунге-Кутты 4 порядка по следующим расчётным формулам:

$$N_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{6}(K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i), \quad (23)$$

- где

$$\begin{cases} K_1^i = hf_i(t_i, N_n^{(1)}, \dots, N_n^{(m)}) \\ K_2^i = hf_i(t_i + \frac{h}{2}, N_n^{(1)} + \frac{K_1^{(1)}}{2}, \dots, N_n^{(m)} + \frac{K_1^{(m)}}{2}) \\ K_3^i = hf_i(t_i + \frac{h}{2}, N_n^{(1)} + \frac{K_2^{(1)}}{2}, \dots, N_n^{(m)} + \frac{K_2^{(m)}}{2}) \\ K_4^i = hf_i(t_i + \frac{h}{2}, N_n^{(1)} + \frac{K_3^{(1)}}{2}, \dots, N_n^{(m)} + \frac{K_3^{(m)}}{2}). \end{cases} \quad (24)$$

Здесь $i = \overline{1, m}$, где m - число уравнений системы; n - номер точки, в которой рассчитывается значение соответствующей функции.

Для сравнения были построены графики решения системы (20) встроенным явным методом Рунге-Кутты 5 порядка, а также встроенным неявным методом Рунге-Кутты 5-го порядка со встроенным алгоритмом контроля ошибки. Результаты решения системы данными методами и графики их относительного отклонения приведёт на рисунках (1-9)

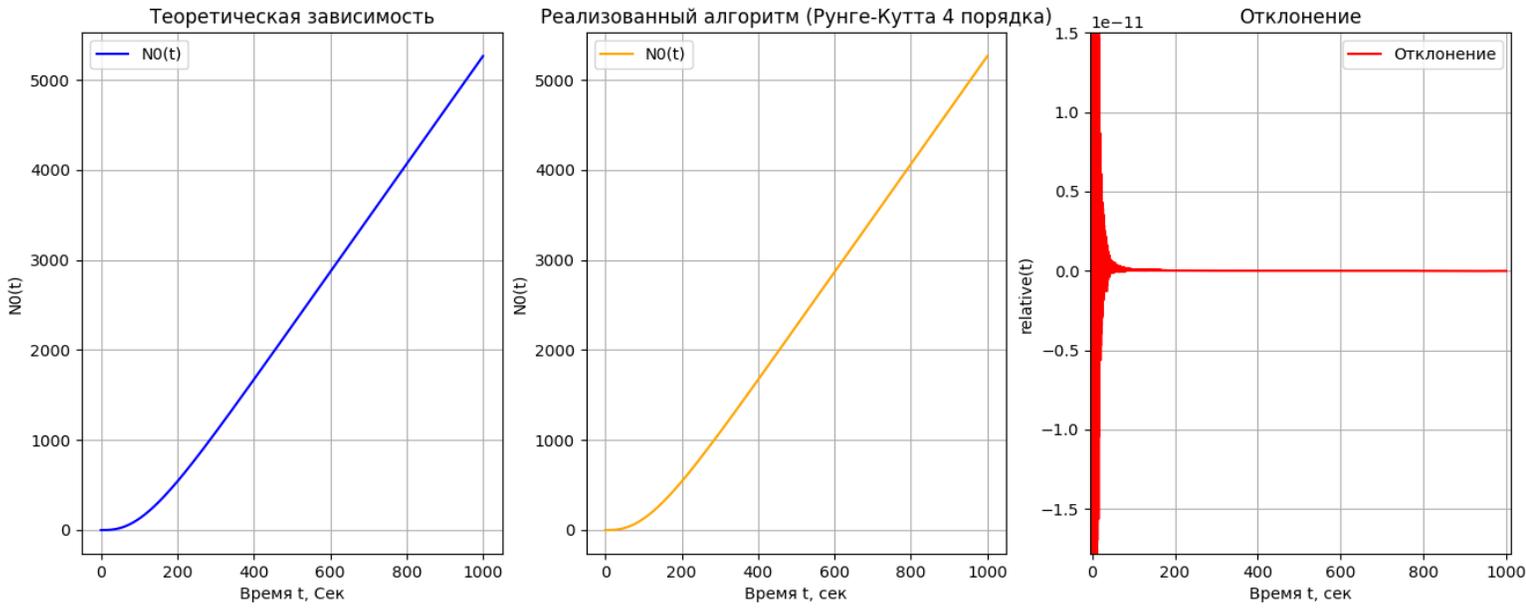


Рисунок 1 — Графики аналитического решения системы и решения с помощью реализованного алгоритма Рунге-Кутты 4 порядка для функции $N_0(t)$.

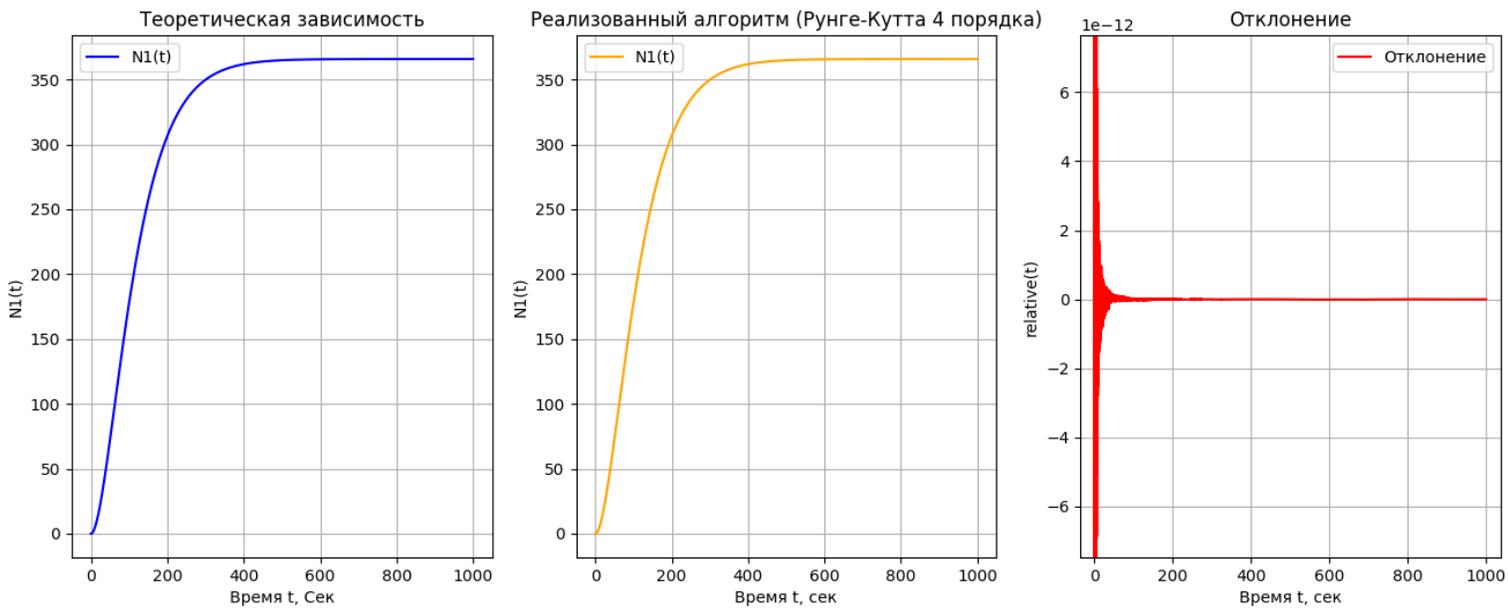


Рисунок 2 — Графики аналитического решения системы и решения с помощью реализованного алгоритма Рунге-Кутты 4 порядка для функции $N_1(t)$.

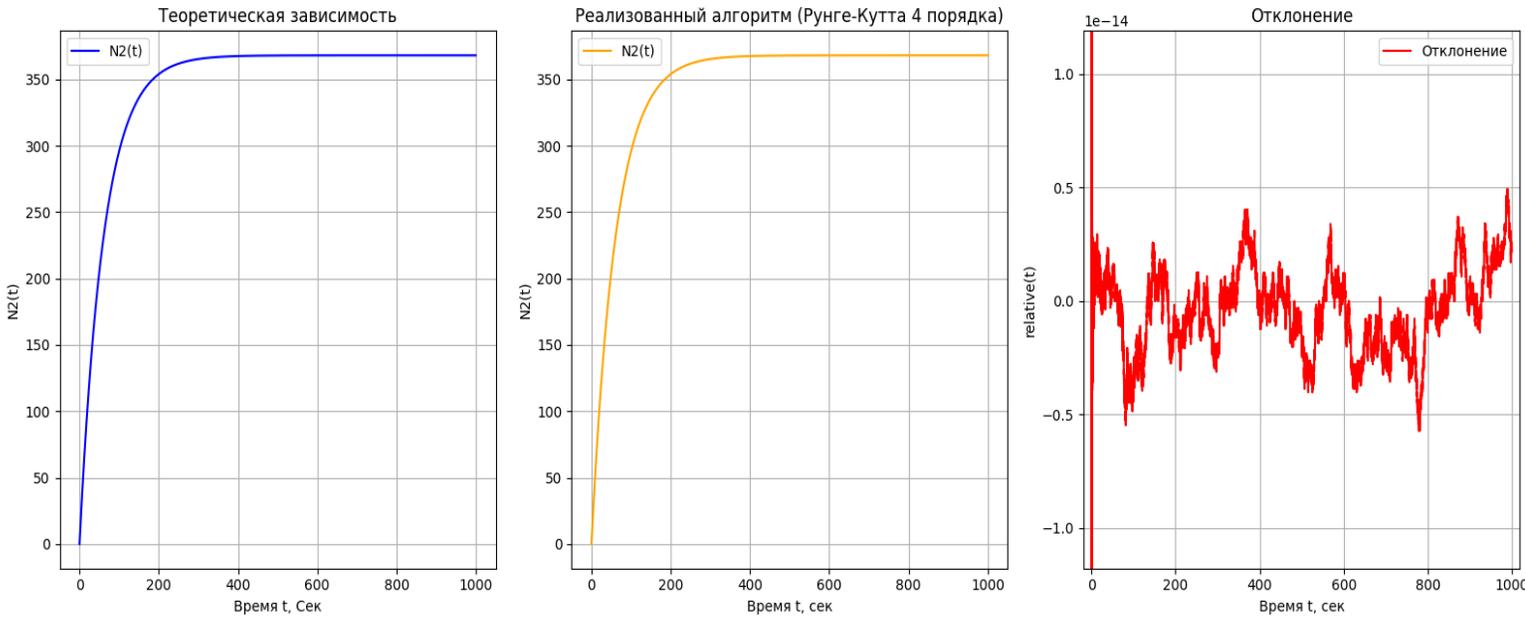


Рисунок 3 — Графики аналитического решения системы и решения с помощью реализованного алгоритма Рунге-Кутты 4 порядка для функции $N_2(t)$.

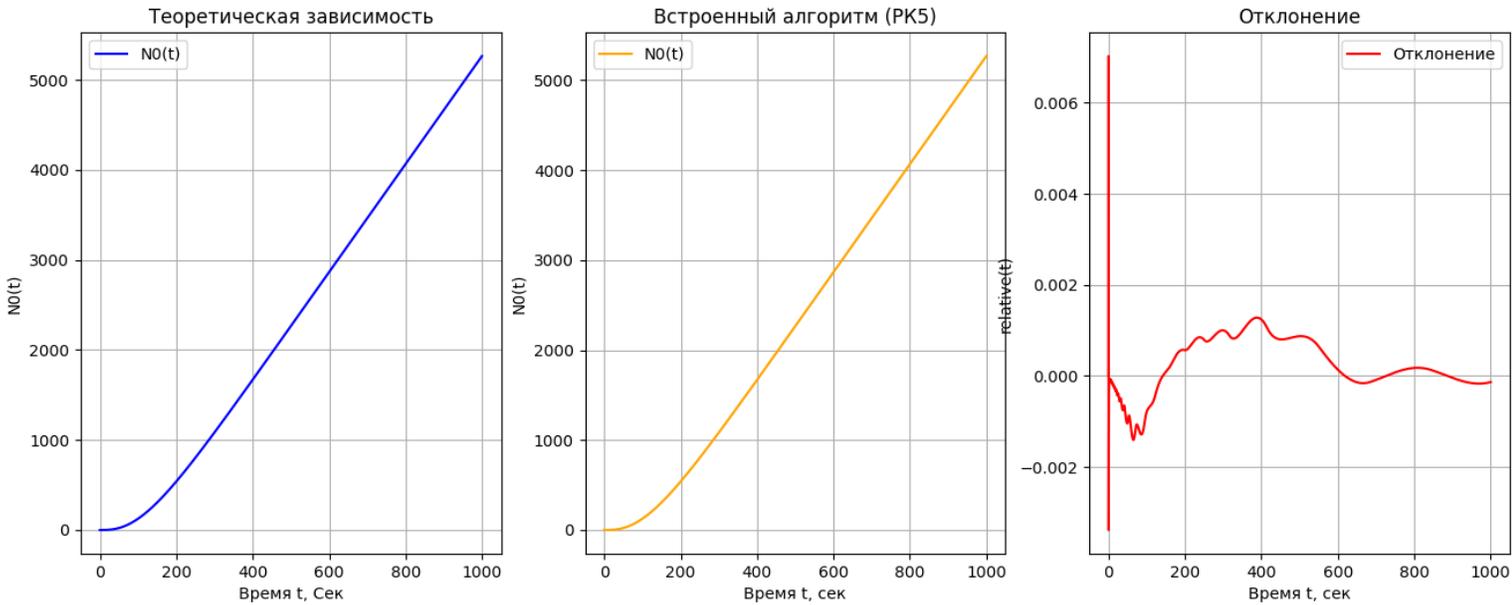


Рисунок 4 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным алгоритмом Рунге-Кутты 5 порядка для функции $N_0(t)$.

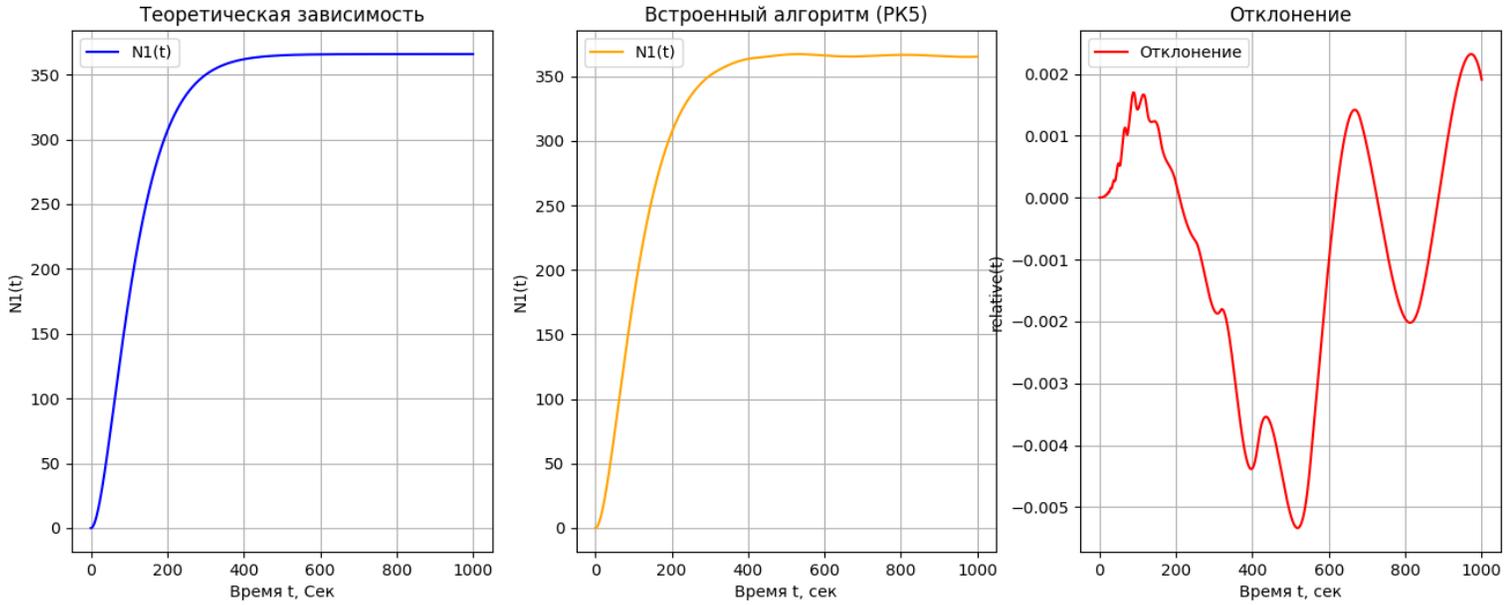


Рисунок 5 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным алгоритмом Рунге-Кутты 5 порядка для функции $N_1(t)$.

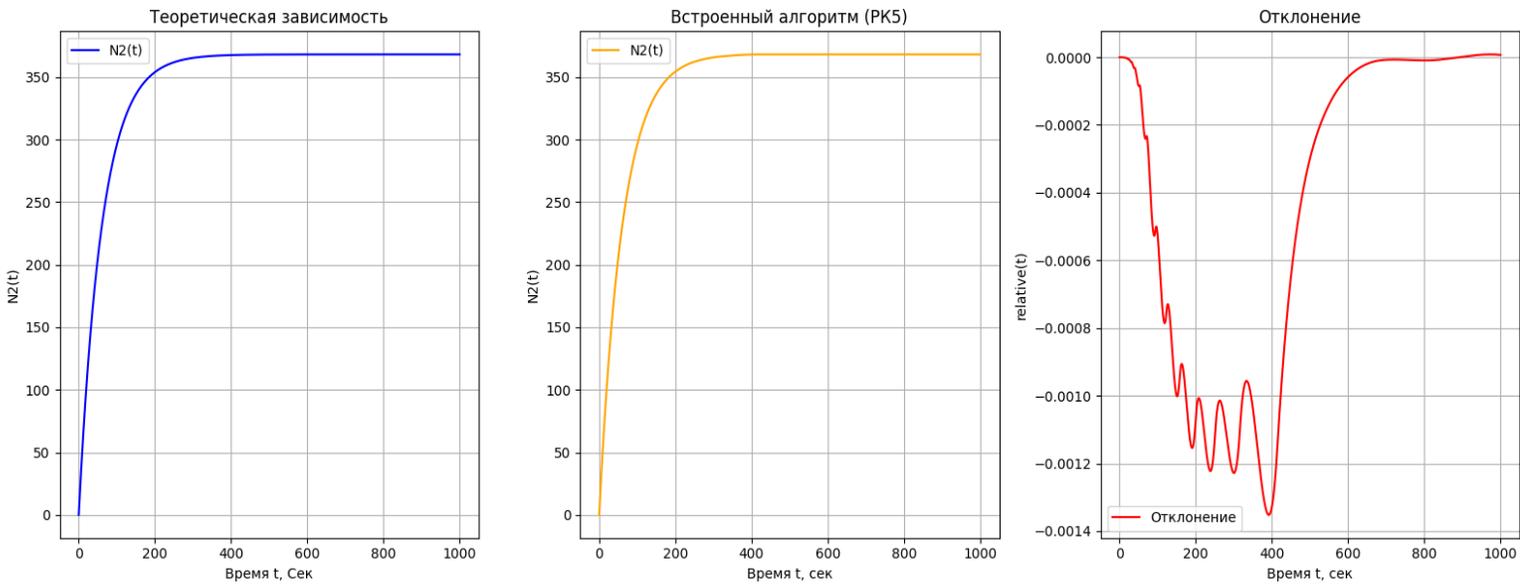


Рисунок 6 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным алгоритмом Рунге-Кутты 5 порядка для функции $N_2(t)$.

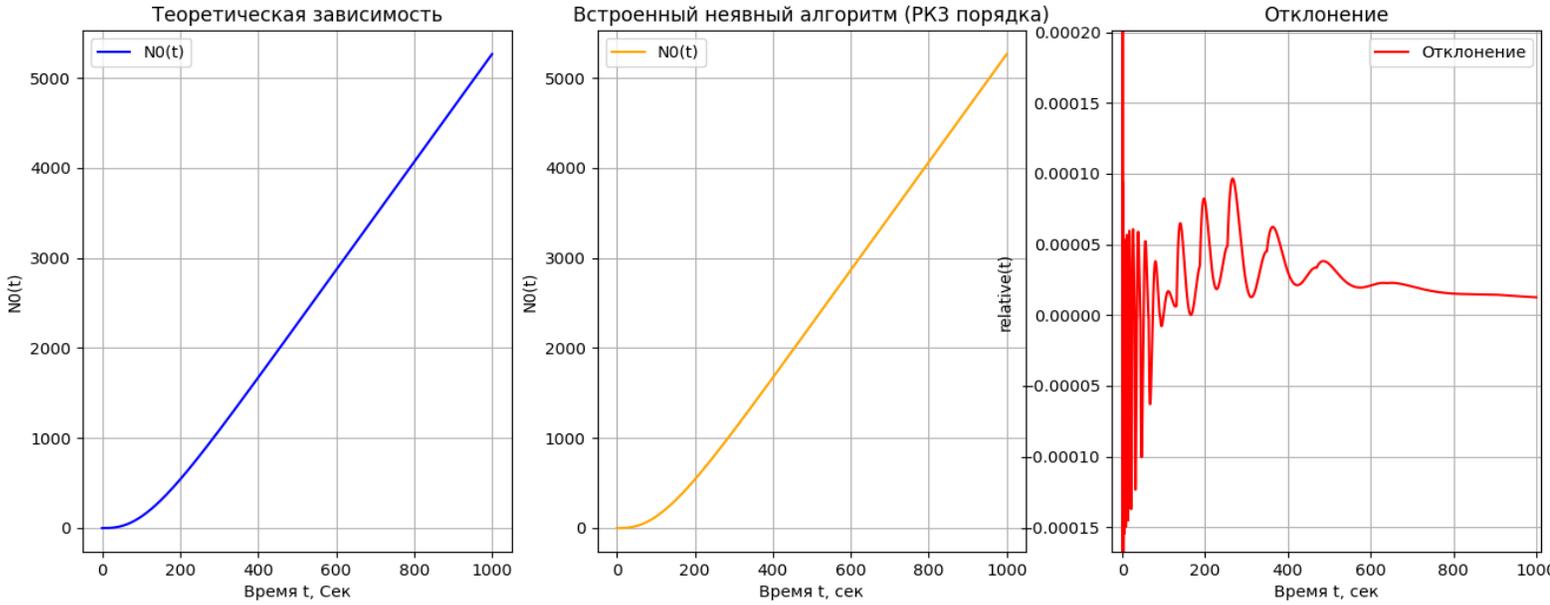


Рисунок 7 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным неявным алгоритмом Рунге-Кутты 3 порядка для функции $N_0(t)$.

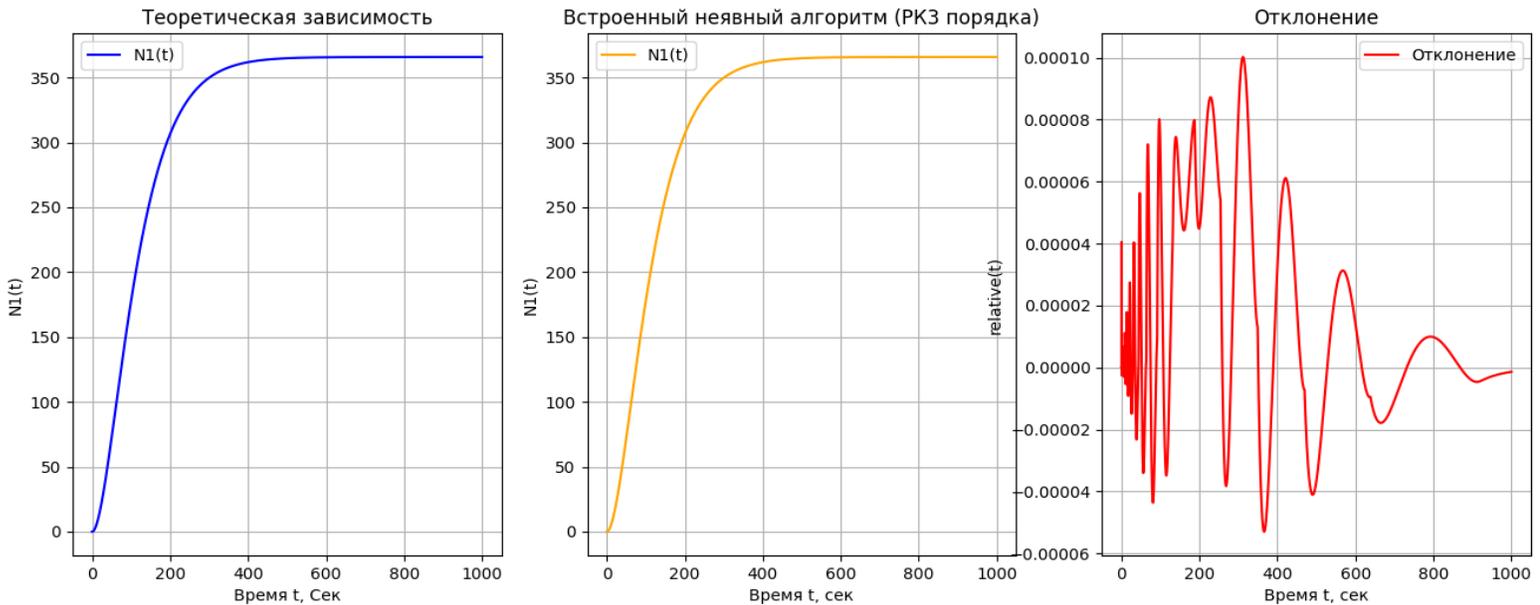


Рисунок 8 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным неявным алгоритмом Рунге-Кутты 3 порядка для функции $N_1(t)$.

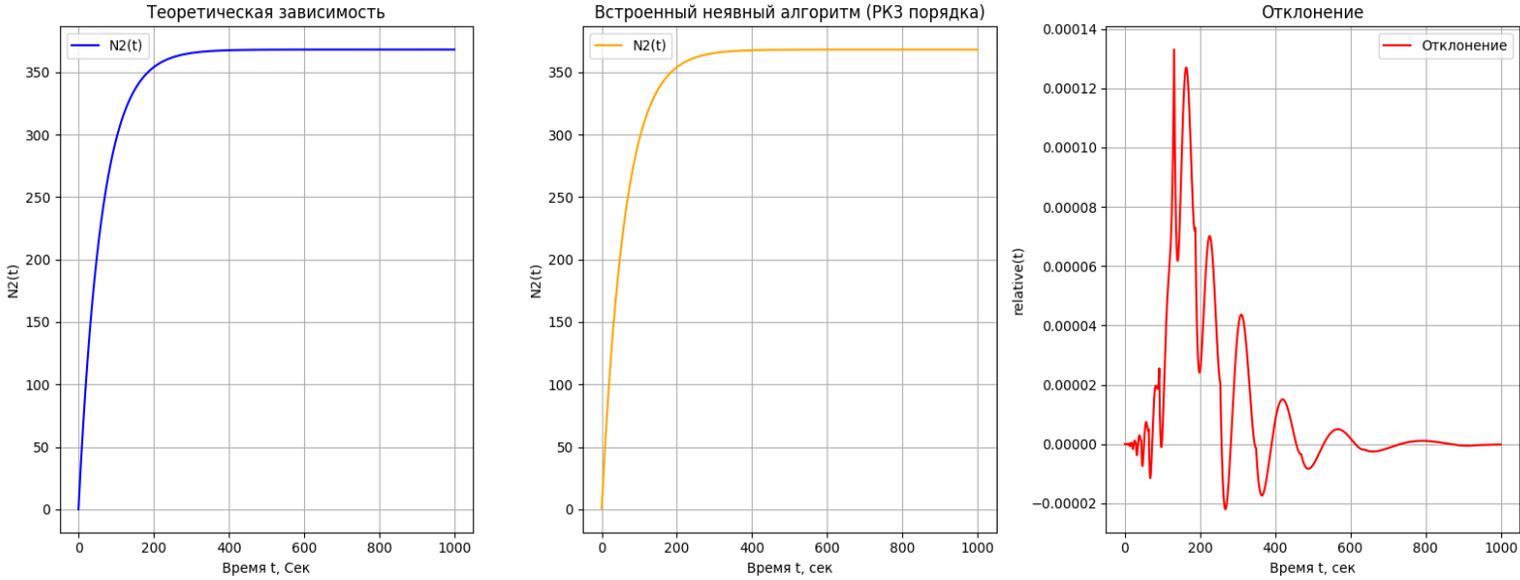
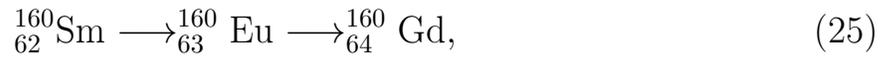


Рисунок 9 — Графики аналитического решения системы и решения встроенным неявным алгоритмом Рунге-Кутты 3 порядка для функции $N_2(t)$.

В качестве прототипа цепочки β распада выступала цепочка:



с постоянными распада $\lambda_1 = 0.072$ и $\lambda_2 = 0.0163$

Из приведённых выше графиков можно сделать следующие выводы: реализованный алгоритм Рунге-Кутта 4 го порядка наиболее точно описывает решение системы (20) с максимальным относительным отклонением порядка 10^{-11} , в то время как относительное отклонение встроенного решения явным методом Рунге-Кутта 5 порядка достигает $5 * 10^{-3}$. Максимальное относительное отклонение решения с помощью встроенного неявного метода Рунге 3 порядка составило $1,2 * 10^{-4}$. При устремлении $\lambda_1 \longrightarrow \lambda_2$ объём вычислений для реализации аналитического решения начинал резко увеличиваться и график не удавалось построить, в то время как неявный метод хорошо справлялся с поставленной задачей.

Большой скачок отклонений аналитических решений с численными в промежутке времени от 0 до 200 секунд можно объяснить тем, что в системе ещё не установилось вековое равновесие (то есть активности изотопов ещё не вышли на константу).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы была изучена методика расчёта активностей радиоактивных изотопов. Был рассмотрен механизм рождения электронных антинейтрино в ядерном реакторе и схема расчёта зависимости энергетического спектра электронных антинейтрино от ядерного реактора от времени.

Была изучен метод описания содержания радиоактивных изотопов в цепочке распадов как функции времени и рассмотрена система уравнений Бейтмана в общем виде, которую предстоит решить в дальнейшем.

Для численного решения систем дифференциальных уравнений были изучены различные численные методы. На основе полученных данных реализован алгоритм численного решения упрощённой системы уравнений Бейтмана. С целью анализа точности алгоритма и его развития в дальнейшем были построены графики решений системы уравнений (20) (рисунки 1-9). Из последующего анализа получено, что явный метод Рунге-Кутты 4 порядка строит решение системы с хорошей точностью. Максимальное относительное отклонение составило 10^{-11} , что намного меньше отклонения встроенных методов решений систем (рассматривался явный метод Рунге-Кутты 5 порядка, а также неявный метод Рунге-Кутты 3 порядка). Однако было выявлено, что неявные методы решения лучше описывают поведение системы при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ (т.е. в области, где задача становится *жесткой*).

Задачи, поставленные на данном этапе исследовательской работы достигнуты в полной мере. Дальнейшая работа будет заключаться в обобщении реализованного алгоритма на случай жестких задач, а также планируется учесть первые слагаемые в неоднородности системы уравнений Бейтмана (5).

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Formaggio J. A., Gouvêa A. L. C. de, Robertson R. H.* Direct measurements of neutrino mass // *Physics Reports*. — 2021. — Июнь. — Т. 914. — С. 1—54. — ISSN 0370-1573. — DOI: [10.1016/j.physrep.2021.02.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.02.002).
2. *Reines F., Cowan C. L.* Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons // *Phys. Rev.* — 1959. — ЯНВ. — Т. 113, вып. 1. — С. 273—279. — DOI: [10.1103/PhysRev.113.273](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.273).
3. Neutrino method remote measurement of reactor power and power output / *Y. V. Klimov [и др.]* // *Atomic Energy*. — 1994. — Февр. — Т. 76, № 2. — С. 123—127. — ISSN 1573-8205. — DOI: [10.1007/bf02414355](https://doi.org/10.1007/bf02414355).
4. *C. S. Wu S. M.* Beta-Decay // Атомиздат. Москва. — 1970. — С. 50—.
5. *Hayes A. C., Vogel P.* Reactor Neutrino Spectra // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. — 2016. — Окт. — Т. 66, № 1. — С. 219—244. — ISSN 1545-4134. — DOI: [10.1146/annurev-nucl-102115-044826](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044826).
6. *H B.* Solution of a System of Differential Equations Occurring in The Theory of Radio-Active Transformation // *University of Cambridge, Proc. Phil. Soc.* — 1910. — С. 423—427.
7. *В. Г. Алексанкин С. В. Родичев П. М. Р. и. д.* Бета- и антинейтринное излучение радиоактивных ядер : Справочник. — 1989.
8. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — 1978.