Решение системы уравнений Бейтмана

Научный руководитель: Попов Д.В.
ассистент каф.40

Студент: Фахрутдинов Э.А
группа Б22-102

Москва, 2024

Введение

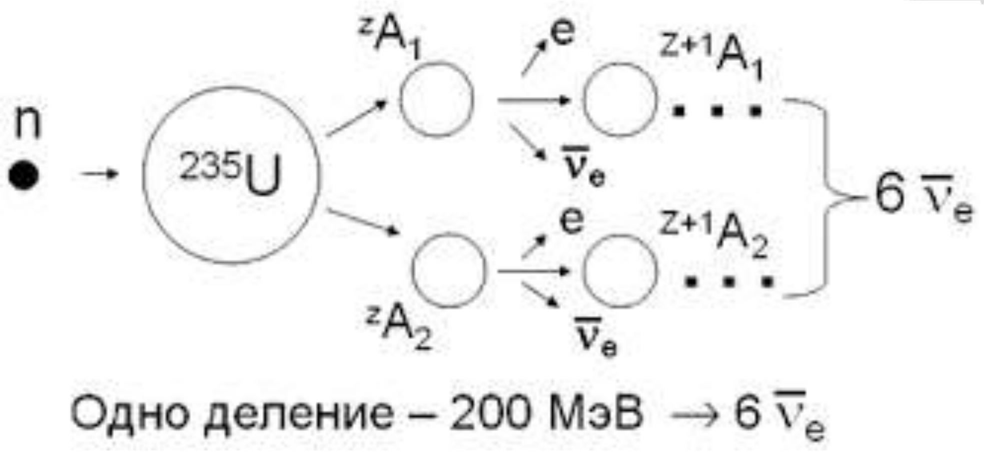
- **Зависимость энергетического спектра антинейтрино от времени**

$$\boxed{S(E,t) = \sum_i A_i(t) S_i(E)}$$

$A_i(t)$ - активность i-го изотопа

$S_i(E)$ - спектр электронного антинейтрино, родившегося в результате распада

$${}^{A}Z \longrightarrow {}^{A}(Z+1) + \beta^{-} + \tilde{\nu}_e$$



Реакция деления ядра топлива

Захват нейтрона ядром с последующим β-распадом

Введение

Цель данной работы заключается в разработке универсального алгоритма численного решения системы уравнений Бейтмана для описания зависимости активности в цепочке β^- распадов для дальнейшего учёта в расчёте энергетических спектров антинейтрино от ядерного реактора.

Задачи

•Изучить методику регистрации нейтрино и расчёта активностей радиоактивных изотопов.

• Проанализировать различные численные методы для решения систем дифференциальных уравнений.

• Написать собственную программу для решения системы уравнений Бейтмана в простейшем приближении и сравнить алгоритм со встроенным системным.

Система уравнений Бейтмана

$$\frac{dB_j(t)}{dt} = -\lambda_j B_j(t) - \bar{\sigma}_i^c \bar{\Phi} B_j(t) + \sum_{i=1}^{p} \bar{y}_{ij} \bar{\sigma}_i^f \bar{\Phi} U_i(t) + \sum_{m=1}^{j-1} \lambda_{mj} B_m(t) + \sum_{m=1}^{j-1} \sigma_{mj}^{\bar{c}} \bar{\Phi} B_m(t)$$

Распад изотопа

Ядерные реакции (n, γ), (n, 2n)

Наработка за счёт деления i-ого изотопа

Наработка за счёт распада предыдущих изотопов в цепочке

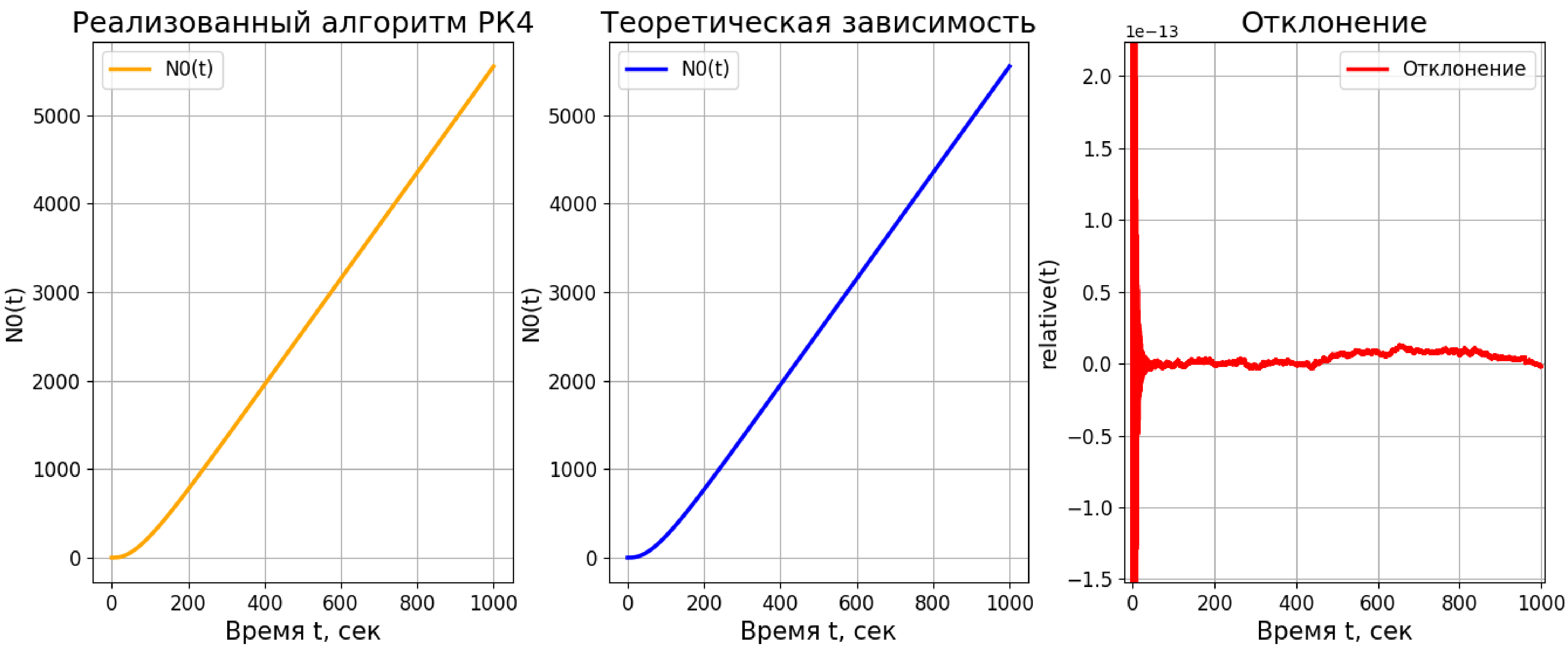
Наработка за счёт реакций (n, γ), (n, 2n) на предыдущих изотопах в цепочке

Решение на примере простейшей системы

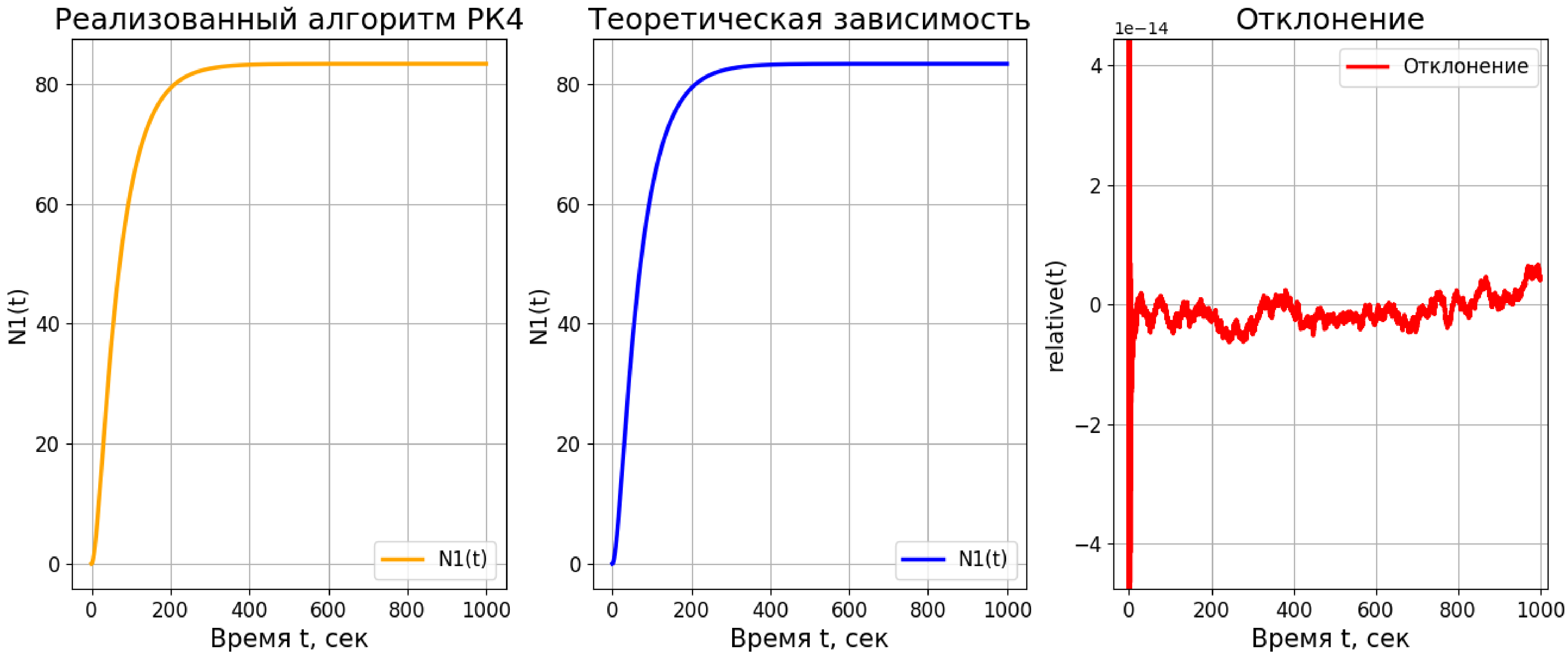
Рассматриваем систему, описывающую радиоактивные превращения в простейшем приближении

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = \lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + R_2 \end{cases}$$

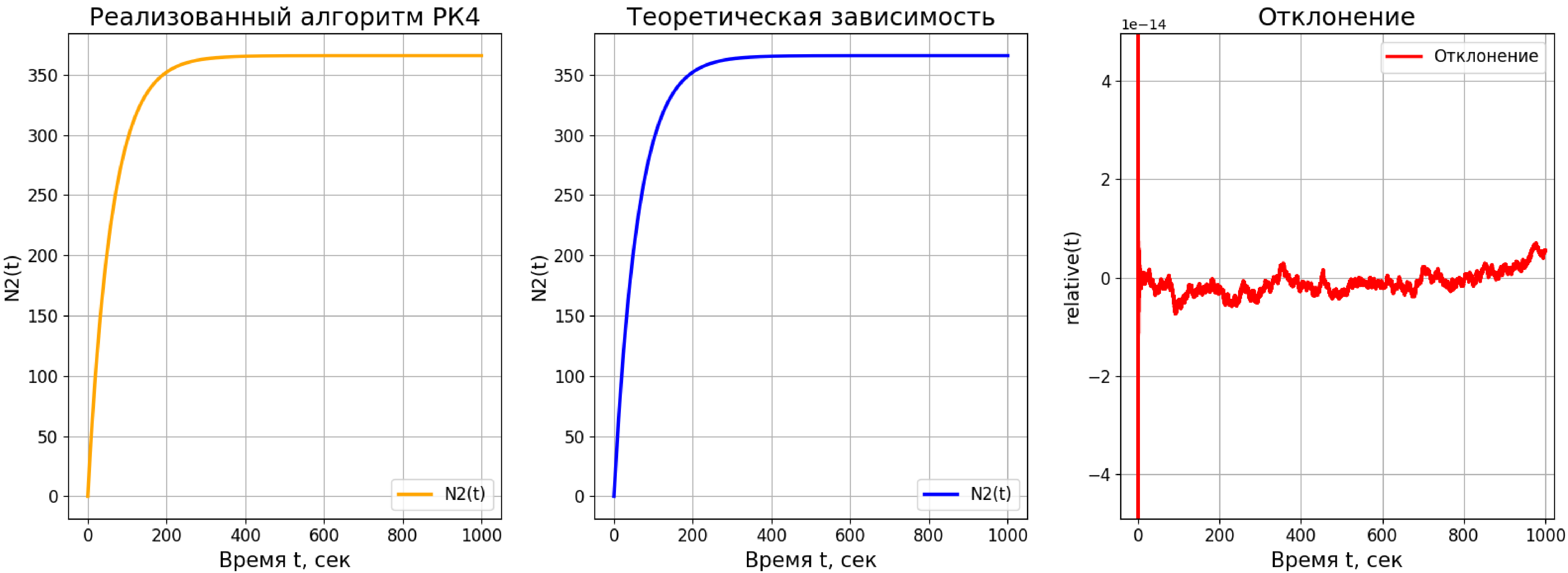
Реализация алгоритма и анализ



Реализация алгоритма и анализ



Реализация алгоритма и анализ



Заключение

В результате проделанной работы была изучена методика расчёта активностей радиоактивных изотопов. Был рассмотрен механизм рождения электронных антинейтрино в ядерном реакторе и схема расчёта зависимости энергетического спектра электронных антинейтрино от ядерного реактора от времени.

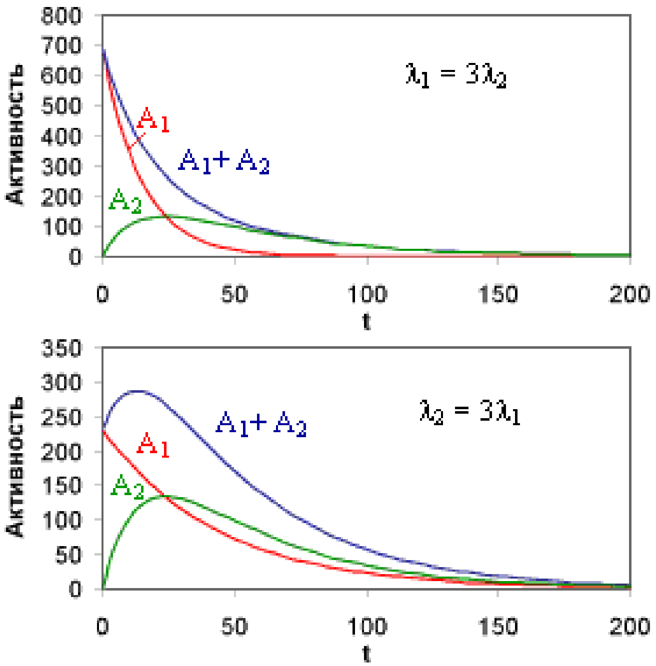
Реализован алгоритм Рунге-Кутты для решения системы уравнений Бейтмана в простейшем приближении и проведено сравнение реализованного алгоритма со встроенными. Выявлены особенности решения системы различными методами

Задачи, поставленные на данном этапе исследовательской работы достигнуты в полной мере. Дальнейшая работа будет заключаться в обобщении реализованного алгоритма на случай жёстких задач, а также планируется учесть первые слагаемые в неоднородности системы уравнений Бейтмана.

MEPhI
National Research
Nuclear University

Спасибо
за
внимание!

Вековое равновесие



$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_{1/2}^{(1)}}{T_{1/2}^{(2)}}$$

Вековое равновесие заключается в том, что число распадов (активность) всех изотопов цепочки равно друг другу, и если исходный изотоп имеет очень большое время жизни (постоянная активность), то никакого изменения активности и у дочерних радиоактивных элементов не наблюдается. С достаточной точностью можно считать, что вековое равновесие наступает за время, равное ***десятикратному периоду*** полураспада наиболее долгоживущего дочернего элемента:

Основные процессы протекающие в ядерном реакторе

- ***торий-урановый ЯТЦ*** – когда в качестве основного воспроизводящего (сырьевого) нуклида используется Th232

$$^{232}\mathrm{Th}(n,\gamma) \rightarrow {}^{233}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}\mathrm{U}$$

- ***Уран-плутониевый ЯТЦ*** – когда в качестве основного воспроизводящего нуклида используется U 238

$$^{238}\mathrm{U}(n,\gamma) \rightarrow {}^{239}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}\mathrm{Pu}$$

Численные методы

Методы

Одношаговые

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, ..., M$$

Метод Эйлера

Многошаговые

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_i$$
$$K_i = f(x_k + c_i h, y_k + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j)$$

Метод Рунге-Кутты

Явные

Неявные

Аналитическое решение простейшей системы

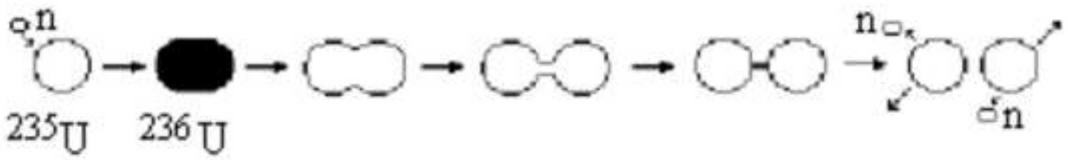
Решение:

$$\begin{cases} N_0(t) = -\frac{R\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-\lambda_2 t} + Rt - R(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})e^{-\lambda_1 t} - \frac{R\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} + R(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}) \\ N_1(t) = -\frac{R}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t} + \frac{R}{\lambda_1} + R(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = \frac{R}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

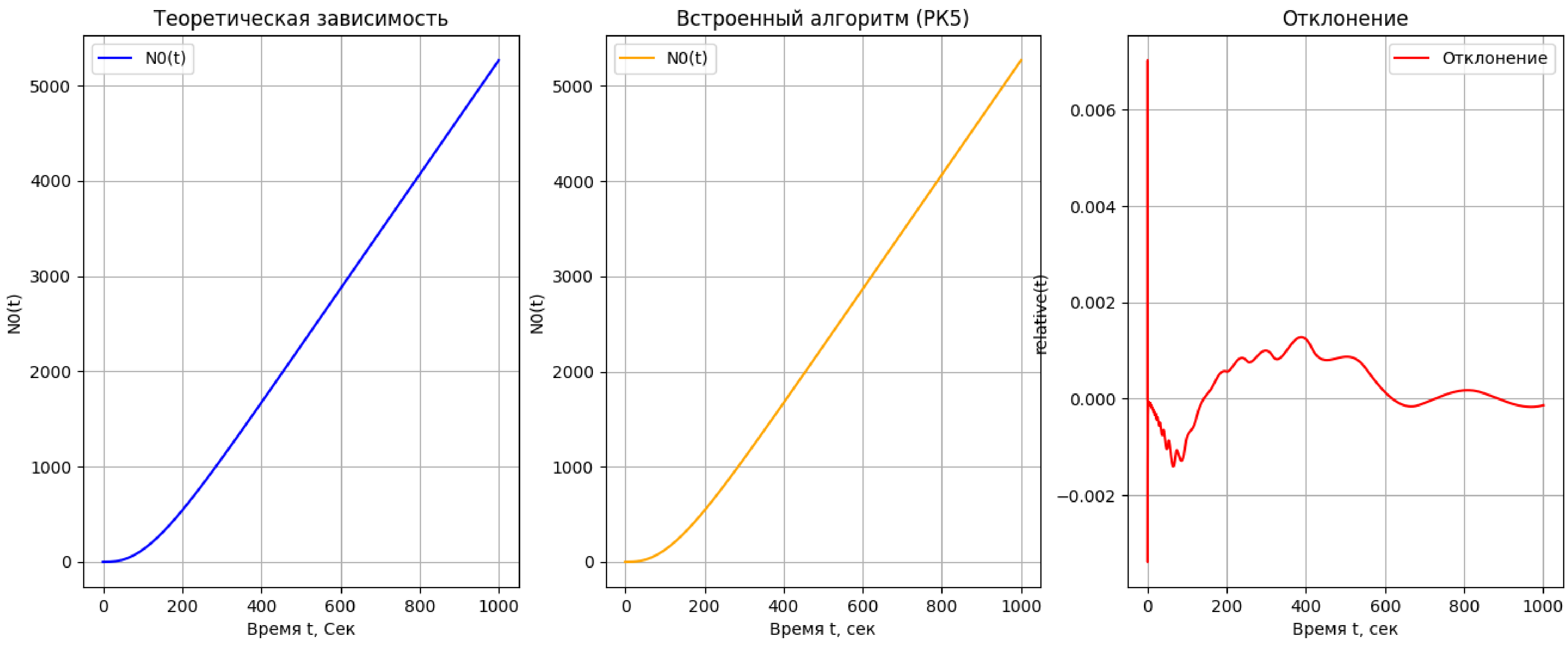
Основные процессы протекающие в ядерном реакторе

- Пример процесса деления топливного урана в ядерном реакторе

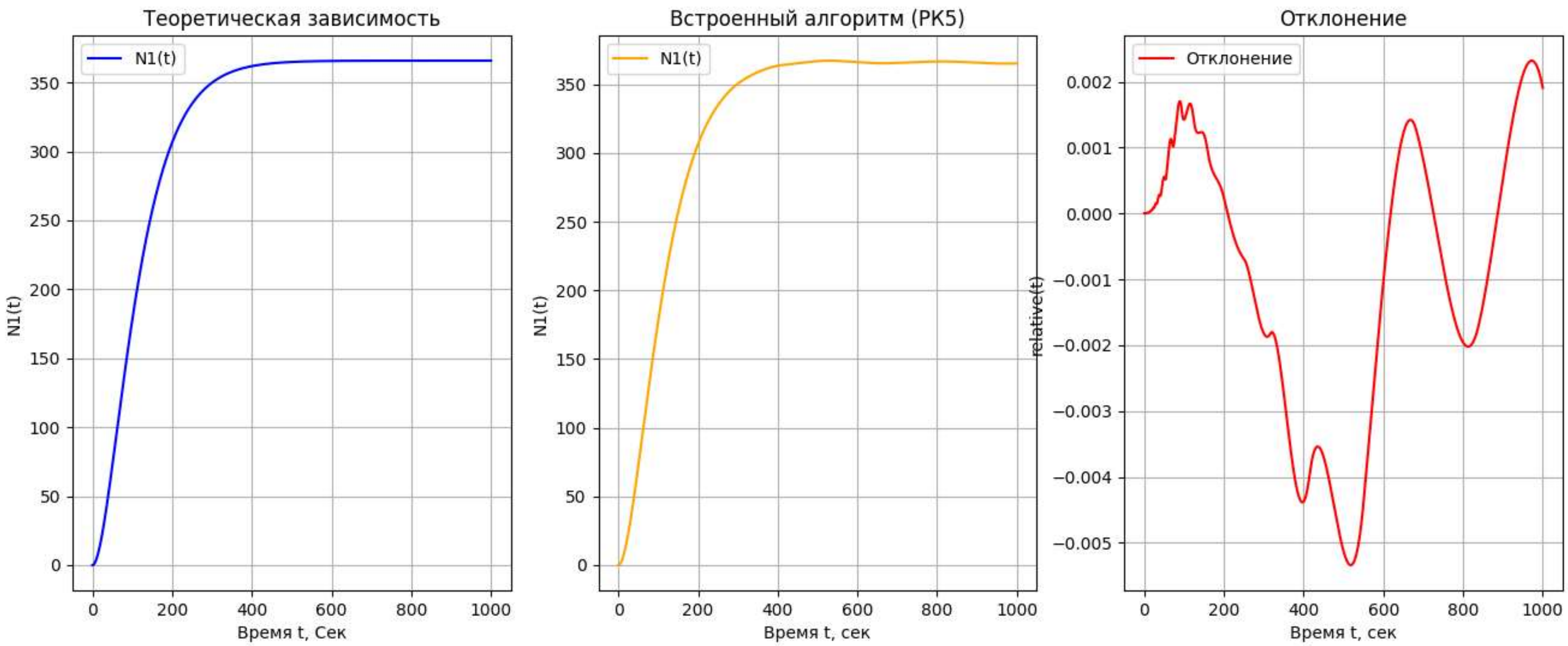
$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{236}U \rightarrow {}^{139}La + {}^{95}Mo + 2n$$



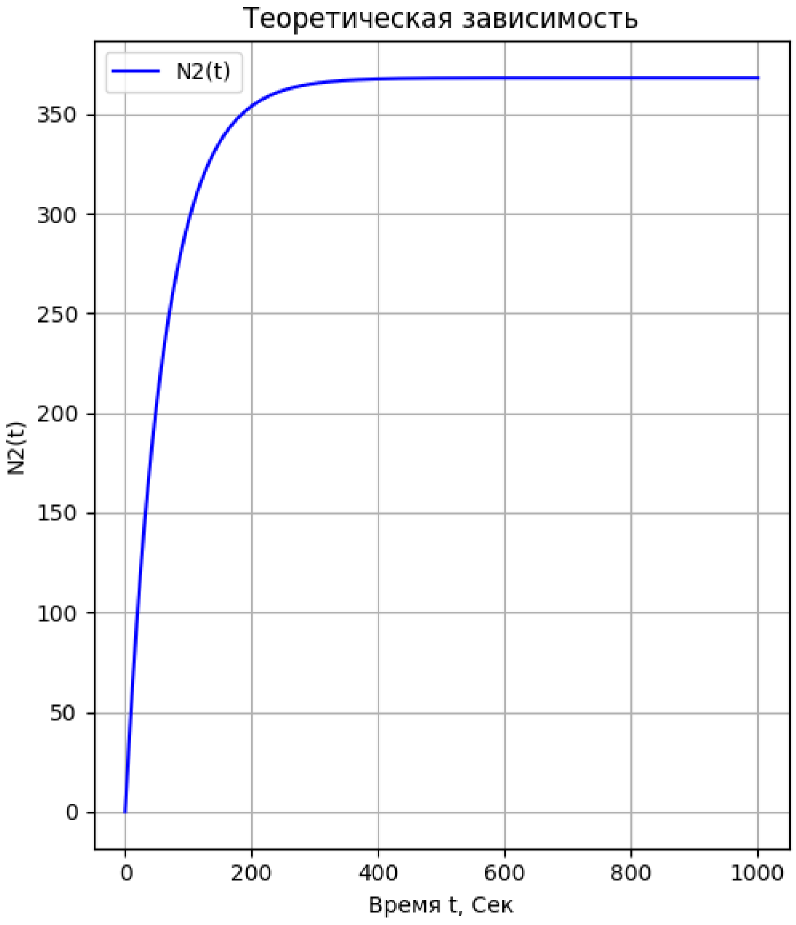
Реализация алгоритма и анализ

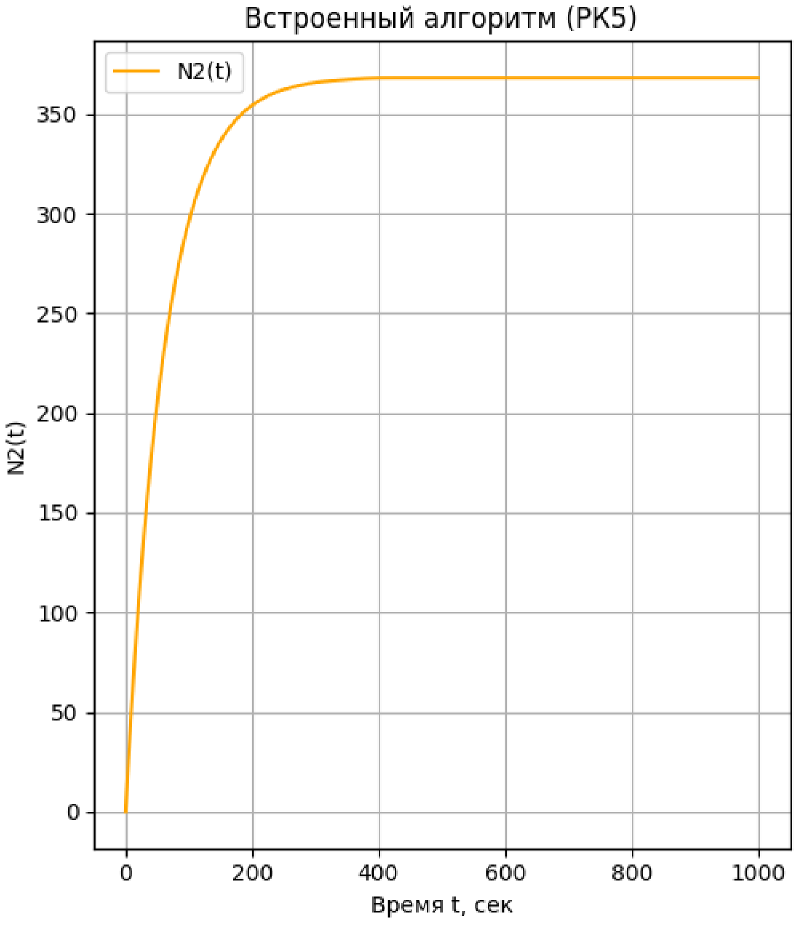


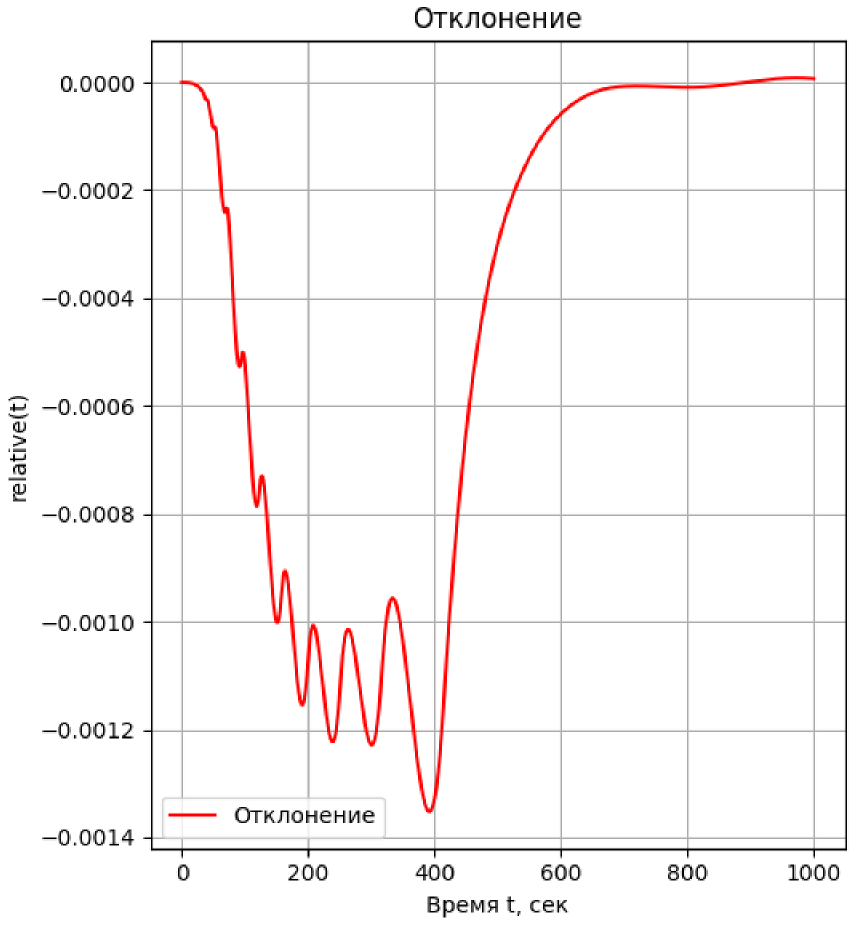
Реализация алгоритма и анализ



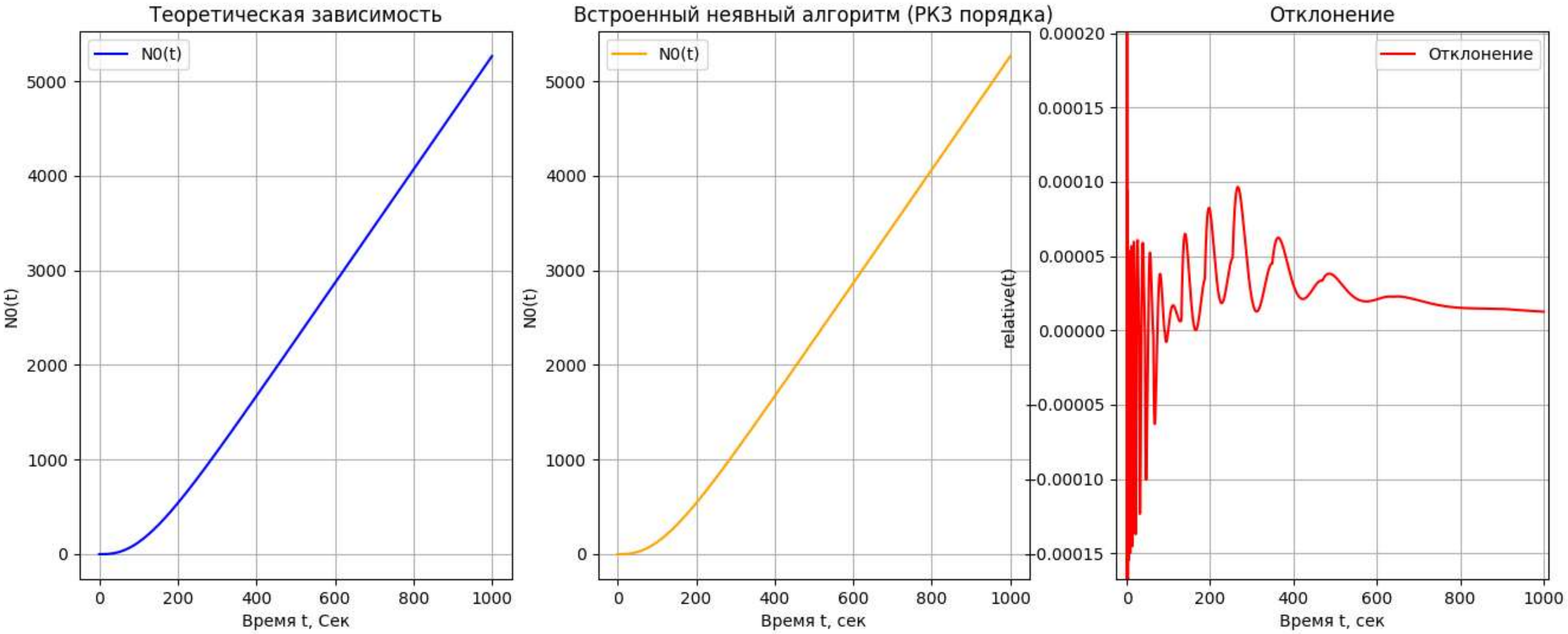
Реализация алгоритма и анализ



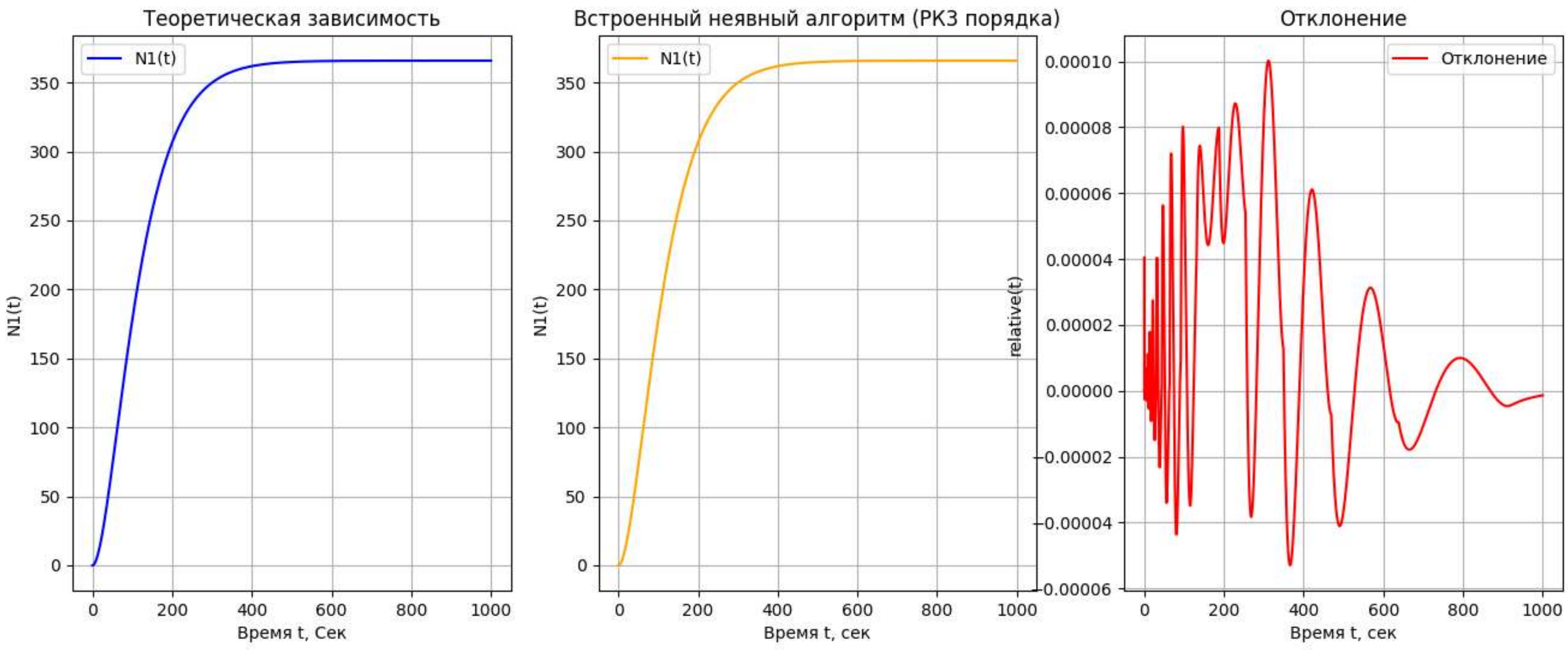




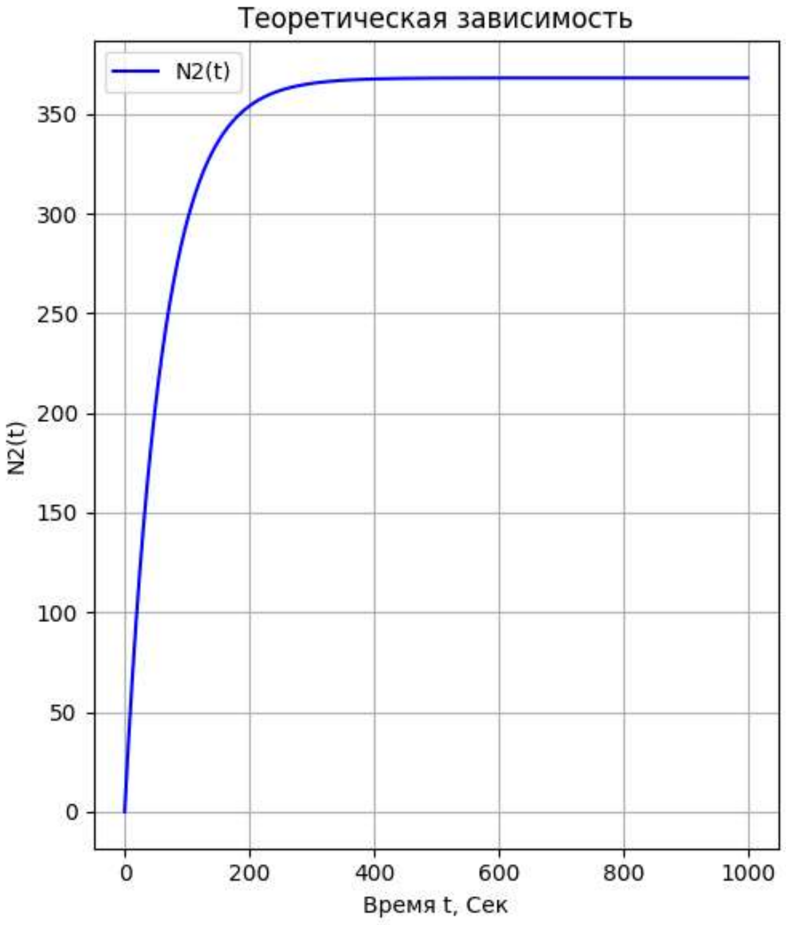
Реализация алгоритма и анализ

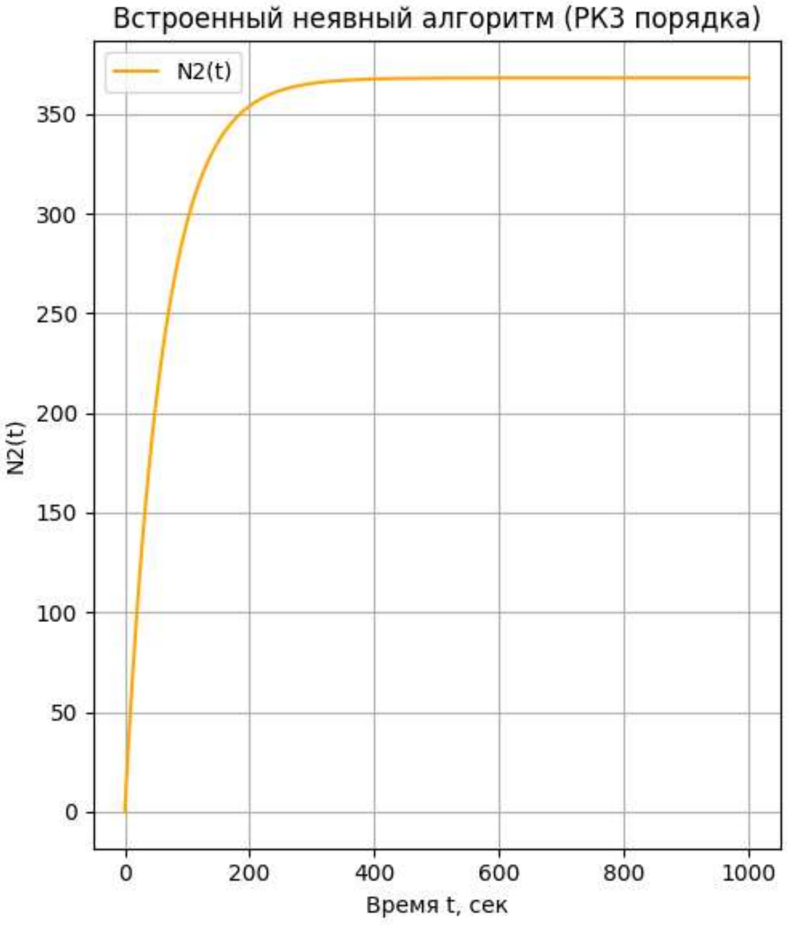


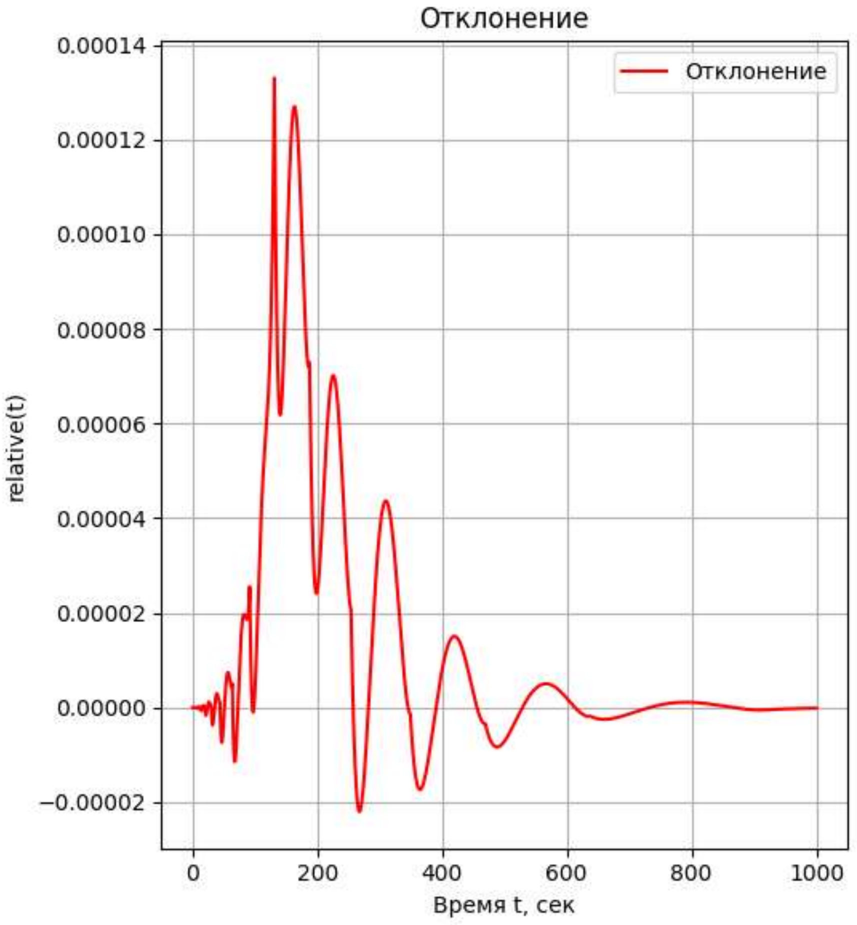
Реализация алгоритма и анализ



Реализация алгоритма и анализ







Анализ результатов

•Реализованный алгоритм описывает решение с наименьшим отклонением

•Встроенное решение неявным методом Рунге-Кутты является более точным, чем встроенное решение явным методом

•Аналитическое решение в «области жёсткости» задачи перестаёт точно описывать решение системы

•Наиболее точно в «области жёсткости» задачу описывает встроенный неявный метод Рунге-Кутты