Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

УДК 530.182

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНИМ И НЕСКОЛЬКИМИ СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Научный руководитель ________ В.А.Гани

Студент ________ С.Д.Франк-Каменецкая

Москва 2024

CONTENTS

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоны были экспериментально обнаружены еще в 19ом веке, как структурно устойчивый вид волны, распространяющийся на поверхности воды[0]. В настоящее время солитоны были обнаружены во многих областях, помимо гидродинамики.[0] Например, в рамках космологических моделей доменные стенки (полевые конфигурации с кинковой структурой в направлении перпендикулярном плоскости стенки) могут возникать в ранней Вселенной при спонтанном нарушении дискретной симметрии [0][0][**i**]. Кинковое решение нелинейного уравнения Клейна–Гордона является примером топологического солитона, устойчивость которого обеспечивается его топологической нетривиальностью[0].

Основной целью научно исследовательской работы в данном семестре являлось ознакомление с кинковыми решениями и моделями, в которых они могут возникать: модели с одним полем и с Z_2 симметрией (потенциал ϕ^4), модели с двумя и более полями, в которых возможно образование доменных стенок с внутренней структурой и т.д.; а также изучить методы получения таких решений.

2. СЛУЧАЙ ОДНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

2.1 Кинки

Простейший кинк — топологический солитон, возникающий в модели с одним действительным скалярным полем в (1+1)-мерном пространстве-времени. Рассматривается скалярное поле , динамика которого задается лоренцинвариантной плотностью лагранжиана

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - V(\phi), \tag{1}$$

Функция $V(\phi)$ называется потенциалом данной модели. Из лагранжиана (1) получается уравнение движения

$$\Box\phi = -\frac{dV}{d\phi} \tag{2}$$

и функционал полной энергии

$$E[\phi(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\phi_t^2 + V(\phi)\right)dx \tag{3}$$

2.2 Потенциал Двойной-синус-Гордон

Рассмотрим процесс получения кинкового решения для потенциала Двойной-синус-Гордон[0]:

$$V(\phi) = \tanh^2 R\,(1-\cos\phi) + \frac{4}{\cosh^2 R}\left(1+\cos\frac{\phi}{2}\right), \tag{4}$$

где $R \in [0, +\infty]$. Потенциал (4) — периодический, неотрицательный и имеет бесконечное число вырожденных минимумов (вакуумов) в точках $\phi = \pm 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. В статическом случае уравнение движения (уравнение Эйлера-Лагранжа) имеет следующий вид:

$$\phi_{xx} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \tag{5}$$

С учетом того, что мы ищем кинковое решение, соединяющее соседнии минимумы потенциала, можно понизить порядок дифференциального уравнения (5):

$$\frac{1}{2}\phi_x^2 = V(\phi). \tag{6}$$

Его кинковое решение имеет вид:

$$\phi_n(x) = 4\pi n \pm \arctan\left(\frac{\sinh(x-x_0)}{\cosh R}\right), \tag{7}$$

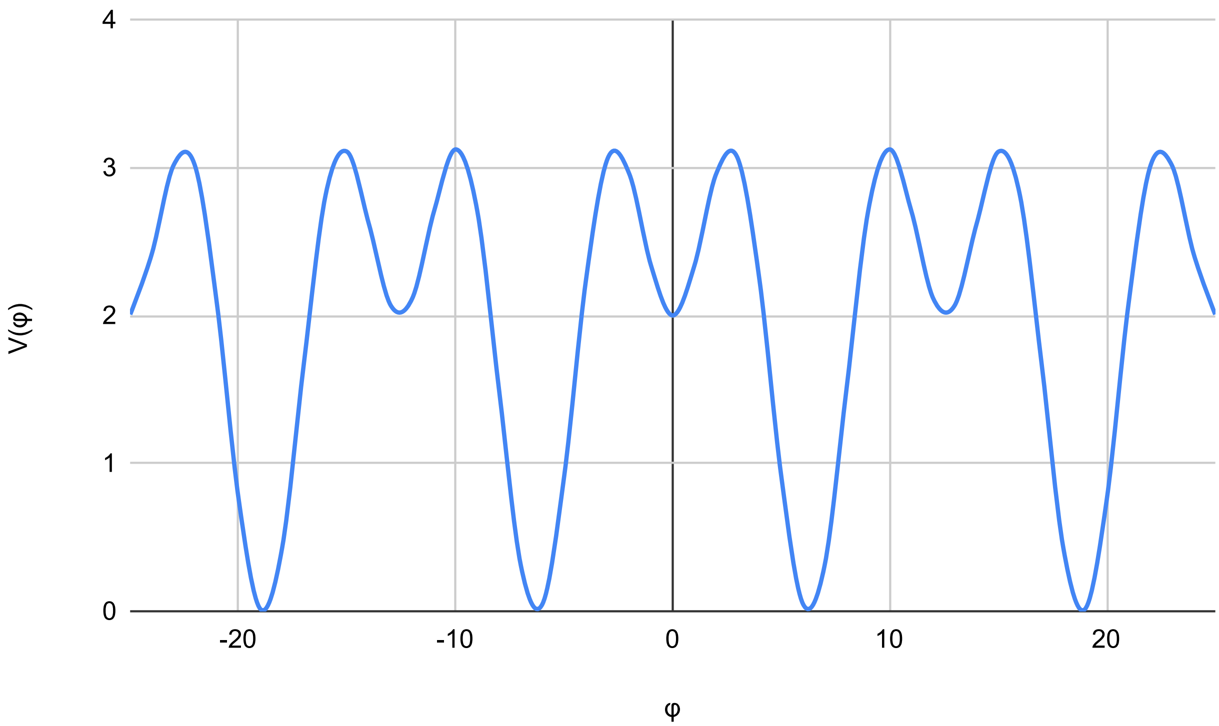


Рисунок 1 — Потенциал Двойной-синус-Гордон при R=1.

где x_0 — постоянная интегрирования, определяющая положение кинка на оси X. Формула (7) дает и кинк (знак "+"), и антикинк (знак "−").
При увеличении параметра R можно наблюдать, как кинк «расщепляется» на 2 «субкинка». Энергия статического решения (7) (т.е. его масса) равна

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\phi_x^2 + V(\phi)\right) dx = 16\left(1 + \frac{2R}{\sinh(2R)}\right). \tag{8}$$

Для получения выражения для движущегося кинка, в силу Лоренц-инвариантности рассматриваемой модели, нужно применить преобразование Лоренца к статическому кинку. Например в случае кинка модели двойной-синус-Гордон будет

$$\phi_n(x,t) = 4\pi n \pm arctan\left(\frac{1}{cosh(R)} sinh\left(\frac{(x-x_0)-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right), \tag{9}$$

где $v \in (-1;1)$ в планковской системе единиц.

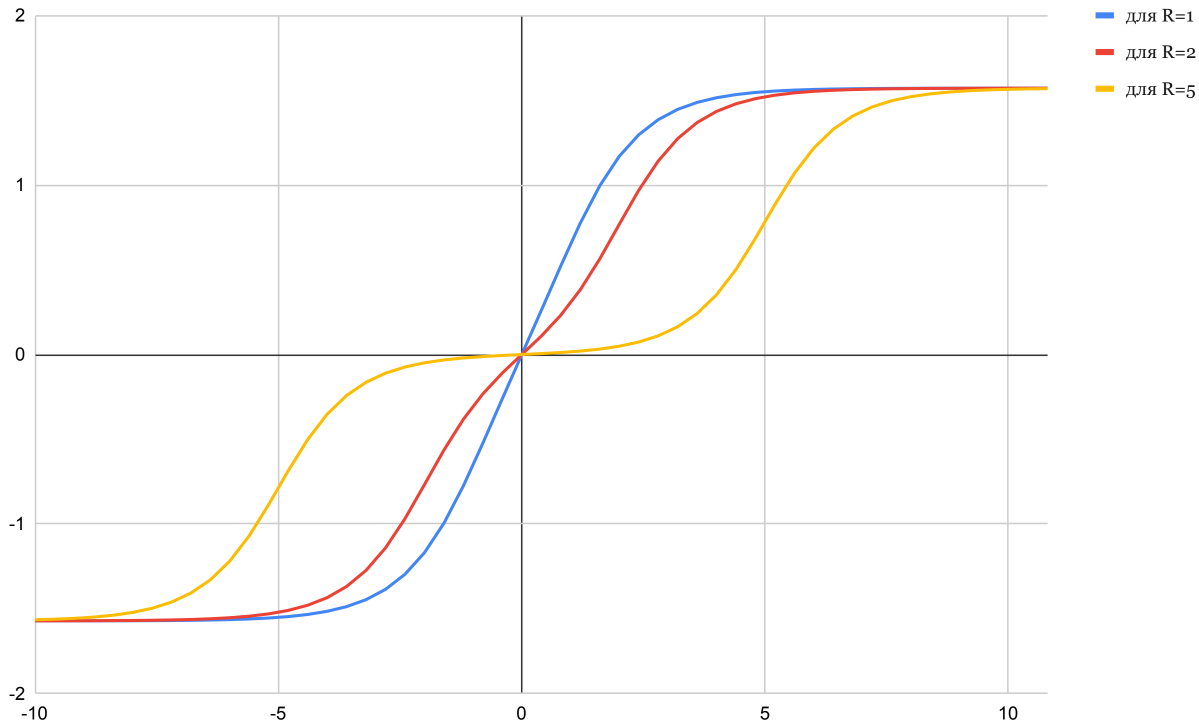


Рисунок 2 — Кинк модели двойной синус-Гордон при разных значениях параметра R.

2.3 Потенциал ϕ^4

Было получено кинковое решение для потенциала ϕ^4 - также неотрицательного потенциала с двумя вырожденными минимумами $\phi = \pm 1$:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(1 - \phi^2\right)^2. \tag{10}$$

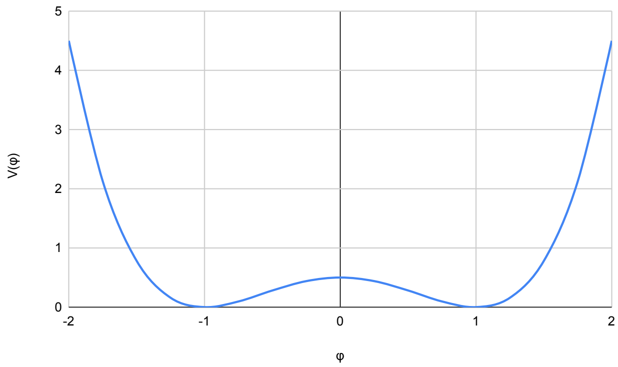
Аналогично случаю потенциала Двойной-синус-Гордона после понижения степени уравнения движения получаем:

$$\frac{1}{2}\phi_x^2 = V(\phi); \tag{11}$$

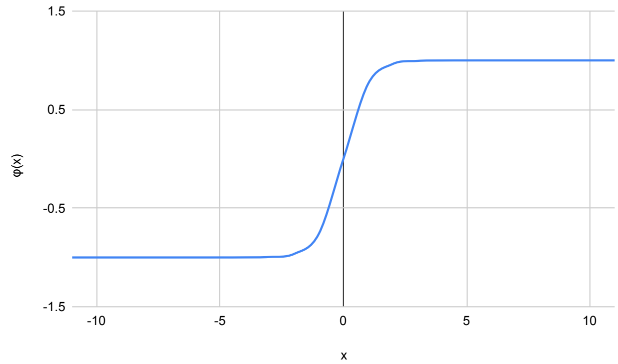
Из (11):

$$\phi = \tanh(x - x_0). \tag{12}$$

где x_0 — константа интегрирования.



(a) Потенциал ϕ^4



(b) Кинковое решение для потенциала ϕ^4

Рисунок 3 — Иллюстрации к разделу 2.3

3. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

3.1 Общие сведения

Следующий этап исследовательской работы заключался в обобщении случая одного скалярного действительного поля на N полей. Плотность лагранжиана для такой системы:

$$\mathscr{L} = \sum_i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t}\right)^2 - \sum_i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right)^2 - V(\phi_1, .., \phi_n), \tag{13}$$

Полевые уравнения имеют вид:

$$\Box \phi_i = -\frac{\partial V}{\partial \phi_i}. \tag{14}$$

3.2 Метод пробных орбит

Для поиска решений уравнений поля был изучен, освоен и применен метод пробных орбит. Он состоит из двух этапов: 1) поиска орбиты — одномерной кривой, определяемой $N-1$ соотношением между N координатами и 2) поиска зависимостей $\{\phi_i(x)\}$, соответствующих движению вдоль этой орбиты.

Орбиты могут быть трех типов (в отличие от случая одного поля, где орбита может быть представлена только отрезком):

- тип A: Движение из одного минимума в другой
- тип B: Движение из минимума P к минимуму Q с последующим возвращением P
- тип C: Движение начинается и завершается движение в одном и том же минимуме

Топологическим солитонам соответствует только первый тип. Метод был применен к

$$V(\phi,\chi)=\frac{1}{4}(1-\phi^2)^2+\frac{1}{2}m^2\chi^2+\frac{1}{4}\lambda\chi^4+\frac{1}{2}\chi^2(\phi-1) \tag{15}$$

Данный неотрицательный потенциал имеет два вырожденных минимума — - в точках $(\pm1;0)$. В качестве орбиты было выбрано

$$F(\phi,\chi)=\chi^n+a\left(\phi^2-1\right)=0 \tag{16}$$

- множество кривых, соединяющих точки $(\pm\frac{M}{\sqrt{\lambda}};0)$ на плоскости (ϕ,χ). При дифференцировании орбиты получается

$$\frac{dF(\phi,\chi)}{dx}=F_\phi\phi_x+F_\chi\,\chi_x=0; \tag{17}$$

Откуда из () и ():

$$(F_\phi)^2\left(\int_1^\phi\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\phi}d\phi_1+C_1\right)=(F_\chi)^2\left(\int_0^\chi\frac{\partial V(\phi,\chi)}{\partial\chi}d\chi_1+C_2\right) \tag{18}$$

Постоянные интегрирования $C_1=0, C_2=0$, так как нижним пределом интегрирования в выражении () имеют абсолютные минимумы, где $\phi_x=0, \chi_x=0$. Из равенства (18) получается, что уравнение имеет решения при n=2 и $a = \frac{1-2m^2}{d}$ или n=1, $a = \frac{d-3}{2d}$. Тогда, подставляя уравнение орбиты в (15), задача сводится к двум одномерным аналогичным тем, что были получены ранее. В том числе для потенциала (15) были получены решения для n=2:

$$\phi(x) = \tanh(m(x - x_0)); \tag{19}$$

$$\chi(x) = \sqrt{\frac{1-2m^2}{d}} \frac{1}{ch(m(x - x_0))}; \tag{20}$$

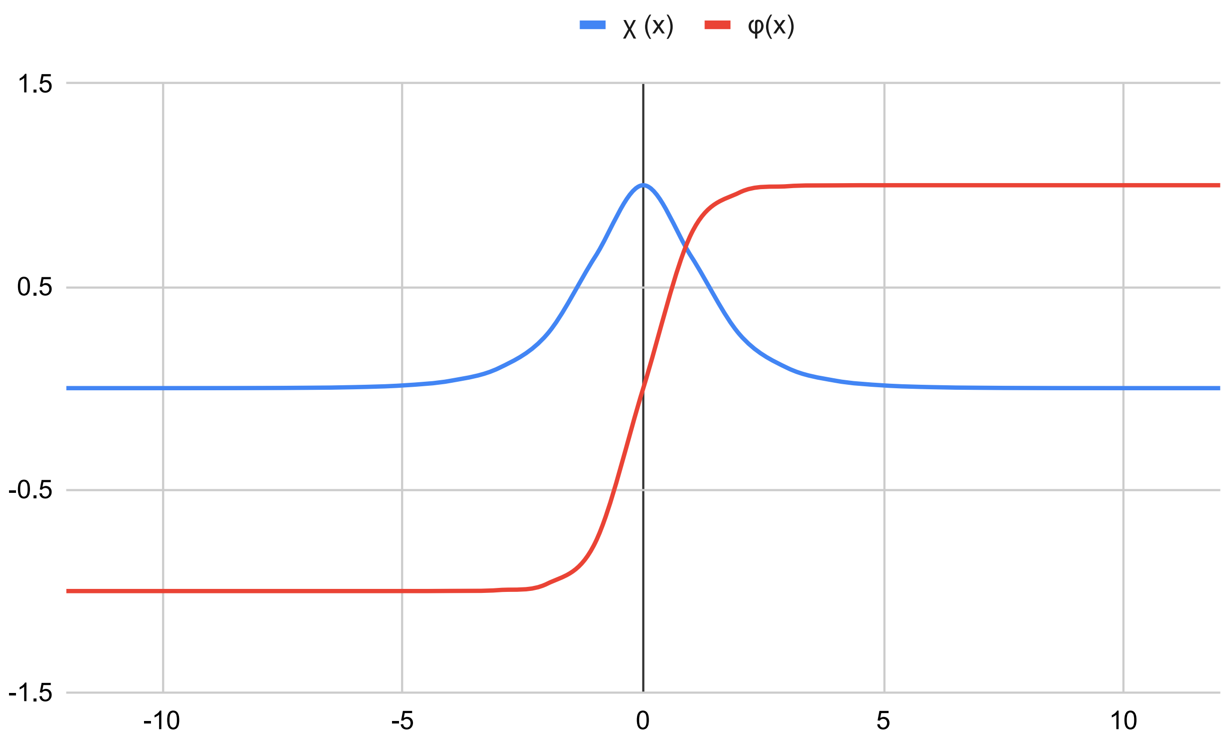


Рисунок 4 — Потенциал Двойной-синус-Гордон при R=1.

3.3 Метод пробных орбит для BPS-конфигурации

Снова рассматривается система с плотностью лагранжиана:

$$\mathscr{L} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t}\right)^2 - V(\phi_1, \phi_2) \tag{21}$$

Где $V(\phi_1, \phi_2)$ – представим через частные производные «суперпотенциала»[0] W:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(W_\phi)^2 + \frac{1}{2}(W_\chi)^2 \tag{22}$$

(Для удобства $\phi_1 = \phi; \phi_2 = \chi$)
Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \phi_{xx} = V_\phi \\ \chi_{xx} = V_\chi \end{cases} \tag{23}$$

Их можно свести к системе ОДУ, называемой уравнениями Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (BPS)[0]:

$$\begin{cases} \phi_x = W_\phi \\ \chi_x = w_\chi \end{cases} \tag{24}$$

Конфигурации удовлетворяющие этим уравнениям называют BPS-конфигурациями. Их характерной особенностью является минимизация полной энергии до $E_{BPS} = \Delta E_{ij} = W(\phi(+\infty), \chi(+\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty)) \neq 0$. При существовании у потенциала более двух минимумов, каждая их пара (i, j) образует топологический сектор[0], который является BPS-сектором при условии $W(\phi_i, \chi_i) \neq W(\phi_j, \chi_j)$. Таким образом, метод пробных орбит в случае BPS-конфигураций состоит из трех шагов:

- Выбирается пара минимумов потенциала $V(\phi, \chi)$ (стационарных точек $W(\phi, \chi)$), образующих БПС сектор
- выбирается траектория (орбита типа A), проходящая через выбранны минимумы
- проверяется удовлетворяет ли данная орбита диффереціальным уравнениям первого порядка

После чего интегрированием уравнений Богомольного-Прасада-Зоммерфельда получают решения $\phi(x), \chi(x)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения солитонного вида встречаются во всех областях физики от космологии до гидродинамики, поэтому изучение методов получения решений подобного вида и их свойств может крайне актуально. В ходе исследовательской научной работы была изучена литература, о солитонах в системах с одним и несколькими скалярными полями и их свойствах, а также изучен метод пробных орбит в общем случае, его применение к BPS-конфигурациям. Были получены точные решения и исследована эволюция кинка для модели Двойного синус Гордона, модели ϕ^4, также модели с двумя скалярными полеями, возникающей в гибридной модели инфляции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

0. *Nicholas Manton P. S.* Topological Solitons // Cambridge University Press. — 2004. — Vol. 519. — DOI: `https://doi.org/10.1017/CBO9780511617034`.

0. *V.A. R.* Классические калибровочные территории: бозонные поля. — КомКнига, 2005.

0. *Vachapati T.* Kins and Domain Walls. — Case Western Reserve University, Ohio, 2006.

0. *F. J. Buijnsters A. Fasolino M. I. K.* Motion of domain walls and the dynamics of kinks in the magnetic Peierls potential // Phys. RevLett. 113, 217202. — 0214.

0. *Rajaraman R.* Solitons ansnstantons. — North Holland Publishing company, 1982.

0. *V. A. Gani A. E. K.* Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies // Phys. Rev. E 60, 3305 – Published 1 September. — 1999.

0. *Bazeia D.* Topological defects and the trial orbit method // Mod.Phys.Lett. A17 (2002) 1945. — 2002.

0. *Богомольный Е. Б.* Устойчивость классических решений // Sov.J.Nucl.Phys. 24 (1976) 449, Yad.Fiz. 24 (1976) 861-870. — 1975.