

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

Отчет о научно-исследовательской работе на тему:
Динамика двойных первичных черных дыр в
кластерах

Научный руководитель
ассисент

_____ В. Д. Стасенко

Выполнил
студент группы Б21-102

_____ К. М. Гордильо

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1	Введение	2
2	Формирование двойных ПЧД в ранней Вселенной	3
3	Дальние сближения с другими ПЧД	6
4	Метод исследования	8
5	Результаты	9
6	Заключение	15
	Список использованных источников	16

1. ВВЕДЕНИЕ

После открытия гравитационных волн коллаборацией LIGO-Virgo, сливающиеся первичные черные дыры (ПЧД) активно рассматриваются как их возможный источник [1–4]. Также существует ряд других указаний на существование ПЧД: наблюдение сверхмассивных черных дыр на больших красных смещениях [5], при некоторых массовых диапазонах ПЧД возможно объяснение темной материи [6], недавно обнаружен стохастический гравитационно-волновой фон может объяснен либо формированием ПЧД [7], либо их слиянием [8].

На ПЧД наложены существенные наблюдательные ограничения на их вклад в состав темной материи $f = \Omega_{PBH}/\Omega_{DM}$ [6; 9]. В контексте данной работы в частности, вклад ПЧД с массами $\sim 10 M_{\odot}$ ограничен на уровне $f \lesssim 10^{-3}$ по наблюдению темпа слияний черных дыр таких масс коллаборацией LIGO-Virgo-KAGRA (LVK). Это ограничение предполагает, что двойные ПЧД формируются в ранней Вселенной на РД стадии, что соответствует времени $< t_{eq} \approx 70$ тыс. лет (индекс eq означает момент перехода от РД к МД стадии). Далее сформированные двойные постепенно закручиваются из-за излучения гравитационных волн и в конечном итоге сливаются. Если доля ПЧД будет $f \gtrsim 10^{-3}$, то темп слияний ПЧД будет превышать наблюдения LVK. Однако эти ограничения не учитывают возможное разрушение двойных от момента ее формирования глубоко в ранней Вселенной до современного момента $t_0 = 13.8$ млрд. лет. В работах [10; 11] было показано, что при больших долях ПЧД $f \gtrsim 0.01$ активно происходит кластеризация ПЧД при красных смещениях $z > 10$. В таких кластерах ПЧД активно рассеиваются друг на друге в результате чего возможно разрушение или возмущение параметров двойной системы, что ведет к ослаблению ограничений до $f \sim 0.1$. Также существует ряд моделей предсказывающих изначальную кластеризацию ПЧД [12; 13] для которых подобное ослабление ограничений также релевантно. Для получения количественных результатов относительно разрушения или возмущения параметров двойной ПЧД, в данной работе моделируется задача трех тел — рассеяние двойной системы ПЧД на третьей ПЧД в кластере.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ПЧД В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В этой главе дается обзор формирования двойных ПЧД в ранней Вселенной [1; 14; 15]. На качественном уровне идея формирования двойных ПЧД на РД стадии состоит в том, что плотность двух ПЧД в некоторый момент времени t_d (индекс d означает decouple) окажется больше, чем плотность излучения. Происходит это из-за того, что плотность излучения падает как $\rho_r \propto s^{-4}$, в то время как плотность вещества $\rho_M \propto s^{-3}$, где s — это масштабный фактор. Также считается, что ПЧД случайно распределены в пространстве, в результате чего локально плотность двух ПЧД может быть сильно повышенной, что ведет в момент t_d к формированию пары.

Оценим момент формирования пары t_d . Введем среднее расстояние между ПЧД на момент t_{eq}

$$\bar{x} = \left(\frac{M}{\rho_{PBH}} \right)^{1/3} = \frac{1}{s_{eq} f^{1/3}} \left(\frac{M}{\Omega_{DM} \rho_c} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

где $\rho_{PBH} = f \rho_{DM}$ — плотность ПЧД, а также полагается современный масштабный фактор нормирован на единицу $s_0 = 1$, $\rho_c = 127 M_\odot \text{ кпк}^{-3}$ — современная критическая плотность Вселенной и $\Omega_{DM} = \rho_{DM}/\rho_c = 0.25$ — доля темной материи в составе Вселенной. Пара ПЧД становится гравитационно-связанной в момент выполнения условия

$$\frac{M}{R^3} = \rho_r(t_d) = \rho_{r,eq} \left(\frac{s_{eq}}{s_d} \right)^4 \quad (2)$$

где $R = x s_d / s_{eq}$, где x — расстояние между двумя ПЧД на момент t_{eq} , если бы они продолжили расширяться вместе со Вселенной (собственное расстояние). Отметим, что в рассматриваемом предположении x меняется в пределах от 0 до $\bar{x}$. Тогда получим

$$\frac{s_{eq}}{s_d} = \frac{1 + z_d}{1 + z_{eq}} = f \left(\frac{\bar{x}}{x} \right)^3, \quad (3)$$

где $z_{eq} = 3400$ — красное смещение РД-МД перехода. Видно, что чем ближе пара (маленькие x) тем раньше она формируется (больше z_d). Также от-

метим, что в момент РД-МД перехода z_{eq} формируются пары для которых $x = f^{1/3}\bar{x}$.

После отцепления от расширения Вселенной две ПЧД будут иметь ненулевой момент импульса, который создается приливными силами от третьей ближайшей ПЧД, поэтому лобовое столкновение двух ПЧД не происходит. В случае $f < 0.01$ момент импульса будет уже создавать инфляционными адиабатическими возмущениями [15]. Перпендикулярную составляющую скорости на момент формирования пары можно оценить

$$v_{\perp} \sim F_t \tau, \quad (4)$$

где $F_t = GMR/d^3$ — приливная сила на единицу массу от третьей ПЧД и $d = ys_d/s_{eq}$ — расстояние до нее и y имеет тот же смысл что и переменная x . Поскольку расстояние до третьей ПЧД должно быть больше, чем расстояние между ПЧД формирующими пару, то $x < y$, также должны быть выполнено $y < \bar{x}$. Время в формуле (4) оценим как время действия приливной силы $\tau \sim H^{-1}$ — возраст Вселенной на момент формирования двойной $\tau \sim 1/\sqrt{G\rho_{r,d}}$. После формирования приливные силы "выключаются" и на динамику двойной не влияют. Тогда момент импульса будет

$$l \sim Rv_{\perp} \sim \left(\frac{R}{d}\right)^3 \sqrt{GMR}, \quad (5)$$

где мы учли $\rho_{r,d} = M/R^3$ на момент формирования пары. Введем безразмерный угловой момент $j = \sqrt{1-e^2}$, где e — эксцентриситет, тогда из результатов задачи Кеплера следует

$$j = \sqrt{\frac{|E|l^2}{M^3G^2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3, \quad (6)$$

где энергия была оценена как $E = -GM/R$. Большая полуось в свою очередь с помощью (2) оценивается как $a = R$

$$a = \frac{x}{f} \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^3. \quad (7)$$

Полученные результаты с точностью до множителя порядка единицы сов-

падают с численным исследованием формирования двойной [15; 16].

Вероятность того, что расстояние между двумя ПЧД будет $(x, x + dx)$ и расстояние до третьей ПЧД, которая создает угловой момент двойной, $(y, y + dy)$

$$dP = \frac{18}{\bar{x}^6} x^2 y^2 dx dy \quad (8)$$

где пределы $0 < x < \bar{x}$ и $x < y < \bar{x}$. Видно, что часть распределения по y преимущественно набирается при больших значения $y \lesssim \bar{x}$, а значит $j \ll 1$, что соответствует высокоэксцентричным эллипсам. Для того, чтобы это явно показать перейдем от пемеренных x, y в распределении (8) к a, j с помощью формул перехода (6) и (7)

$$dP = \frac{3}{2} \left(\frac{f}{\bar{x}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{a}}{j^2} da dj \quad (9)$$

где пределы $(af/\bar{x})^{3/4} < j < 1$ и $0 < a < \bar{x}/f$. В этой формуле более явно видно, что распределение по j сильнее при $j \ll 1$.

Время жизни двойной система за счет излучения гравитационных волн

$$t_{gw} = \frac{3c^5 a^4 j^7}{170 G^3 M^3}, \quad (10)$$

где c — скорость света. Оценим характерные начальные параметры двойной, сливающихся за время t_{gw} . Т.к. распределение (26) максимально при малых j , то будет считать, что характерное значение $j_* \sim (af/\bar{x})^{3/4}$ при заданной большой полуоси a , тогда

$$\begin{aligned} a_* &= \left(\frac{170 G^3 M^{19/4} t_{gw}}{3c^5 f^7 \rho_{DM,eq}} \right)^{4/37} \\ &\approx 137 f^{-28/37} \left(\frac{M}{10 M_\odot} \right)^{19/37} \left(\frac{t_{gw}}{10 \text{ Gyr}} \right)^{4/37} \text{ au} \end{aligned} \quad (11)$$

характерное значение больших полуосей для двойных, сливающихся в современную эпоху. Характерное значение углового момента в свою очередь

$$j_* \approx 0.014 f^{16/37} \left(\frac{M}{10 M_\odot} \right)^{5/37} \left(\frac{t_{gw}}{10 \text{ Gyr}} \right)^{3/37}, \quad (12)$$

как и ожидалось двойные имеют очень маленькие угловые моменты, что соответствует эксцентриситету $e \approx 0.9999$ для случая $f = 1$. Также отметим, что полученные зависимости от f и M и значения по порядку величины соответствуют более тщательному расчету [4].

Время жизни двойной определяется выражением:

$$j = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$t = \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 j^7 \times 10^{10}$$

где

$$a_0 = 2.0 \times 10^{11} \left(\frac{M_{BH}}{M_{\odot}}\right)^{\frac{3}{4}} \text{ см}$$

3. ДАЛЬНЫЕ СБЛИЖЕНИЯ С ДРУГИМИ ПЧД

Сближение считается дальним если расстояние наибольшего сближения между двойной системой и третьей ПЧД r_p превышает большой полуоси двойной a по крайней мере в несколько раз, и поэтому взаимодействие можно считать приливным.

Рассмотрим одиночную ПЧД, приближающуюся к двойной системе по гиперболической орбите с прицельным параметром b и относительной скоростью на бесконечности v . Сохранение энергии и момента импульса подразумевает следующие соотношения между b , v и r_p :

$$b^2 = r_p^2 + \frac{6Mr_p}{v^2} \quad (13)$$

$$r_p = \frac{b}{[1 + (\frac{3M}{bv^2})^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{3M}{bv^2}} \quad (14)$$

При сохранении углового момента скорость в перицентре равна $v_p = \frac{bv}{r_p}$.

Таким образом, характерное время взаимодействия определяется как

$$t_p \sim \frac{r_p}{v} = \frac{r_p^2}{bv} \quad (15)$$

Изменение удельного углового момента имеет порядок

$$\Delta l \sim \frac{M}{r_p^3} a^2 t_p = \frac{Ma^2}{r_p bv} \quad (16)$$

Изменение удельной энергии $\frac{E}{M}$ составляет не более порядка

$$\frac{\Delta E}{M} \sim \frac{M}{r_p^3} a \sqrt{\frac{M}{a}} t_p \sim \frac{M^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{r_p bv} \quad (17)$$

следовательно, дробное изменение большой полуоси составляет не более

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta E}{E} \sim \frac{M^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{r_p bv} \quad (18)$$

Таким образом

$$\Delta j = \frac{\Delta l}{\sqrt{2Ma}} - \frac{1}{2} j \frac{\Delta a}{a} \sim \frac{\Delta l}{\sqrt{Ma}} \sim \frac{M^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{r_p bv} \quad (19)$$

4. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для моделирования взаимодействия между двойной системой и третьим телом был использован код на Matlab, который в численном приближении решает и визуализирует задачу трех тел. Работа программы основана на методе Рунге-Кутты четвертого порядка, определяющий в каждом временном шаге положения и скорости каждой из тел. Максимальное время запуска кода и временной шаг можно регулировать

Начальные параметры двойной, то есть, эксцентриситет e и большая полуось a выбираются таким образом, чтобы начальное время жизни двойной t_{init} совпало, по порядку величины, с возрастом вселенной (хаббловским времени) $t_H = 1.37 \times 10^{10}$ лет.

$$e = 0.99$$

$$a = 20 \text{ а.е.}$$

$$t_{init} = 1.79 \times 10^{10} \text{ лет}$$

Выбор начальных условий для третьего тела, то есть, прицельного параметра b и относительной скорости в бесконечности v_{inf} , гарантирует дальнейшее рассеивание.

$b \gg a$ (исследовалось несколько значений прицельного параметра)

$$v_{inf} = 1 \text{ км/с}$$

На основе этих значений, код вычисляет начальную кинетическую энергию и момент импульса системы двойная-третьего тело как будто двойная была точечной.

Для каждого прицельного параметра были исследованы разные ориентации двойной вокруг оси OZ (от 0 до π по интервалам $\frac{\pi}{5}$) и разные ориентации рассеивающейся черной дыры вокруг оси OX (от 0 до 2π по интервалам $\frac{\pi}{5}$). В каждом случае было рассчитано новое время жизни двойной системы, определено ее новыми параметрами.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Как результат моделирования, для каждого прицельного параметра был получен набор новых значений времени жизни и построены следующие графики:

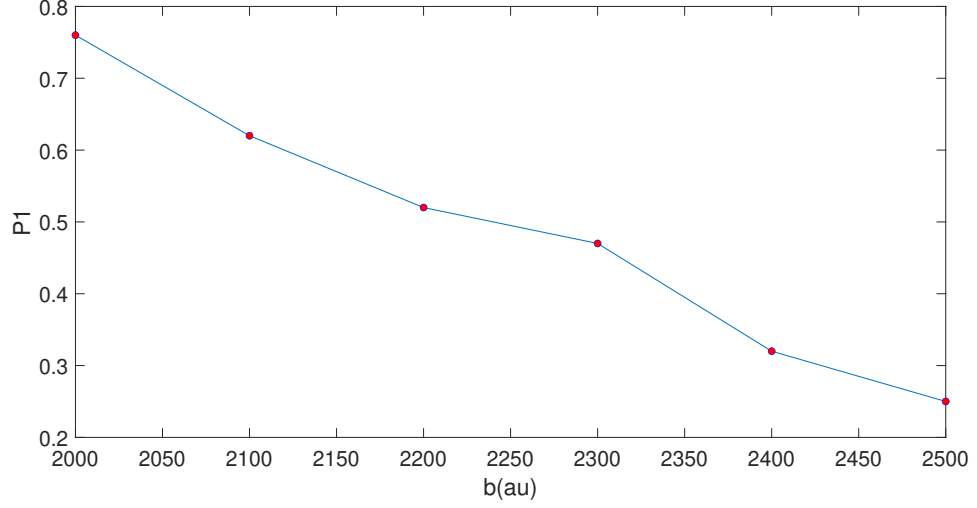


Рисунок 1 — Вероятность того, что время жизни двойной в результате рассеяния увеличится так $\frac{t}{t_0} \geq 10$

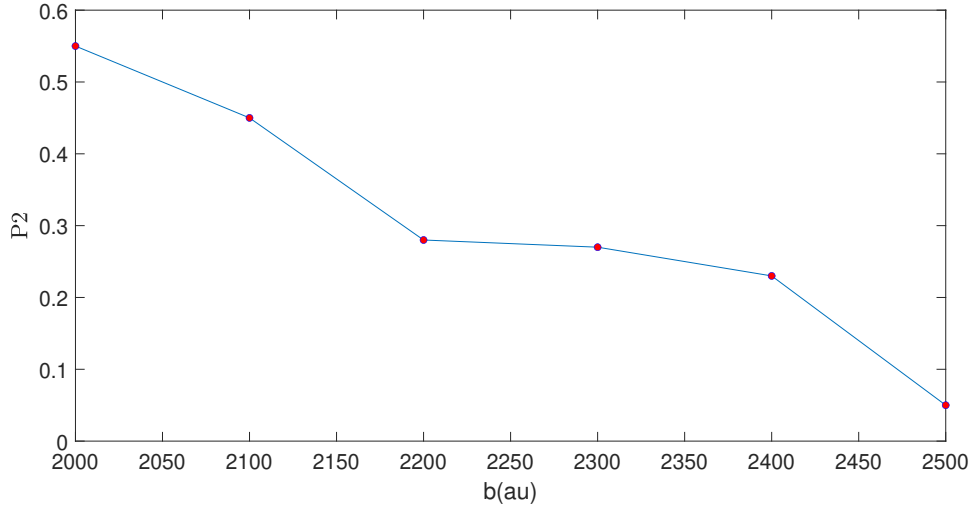


Рисунок 2 — Вероятность того, что время жизни двойной в результате рассеяния увеличится так $\frac{t}{t_0} \geq 100$

Оценим темп таких взаимодействий из «эн-сигма-вэ» соображений

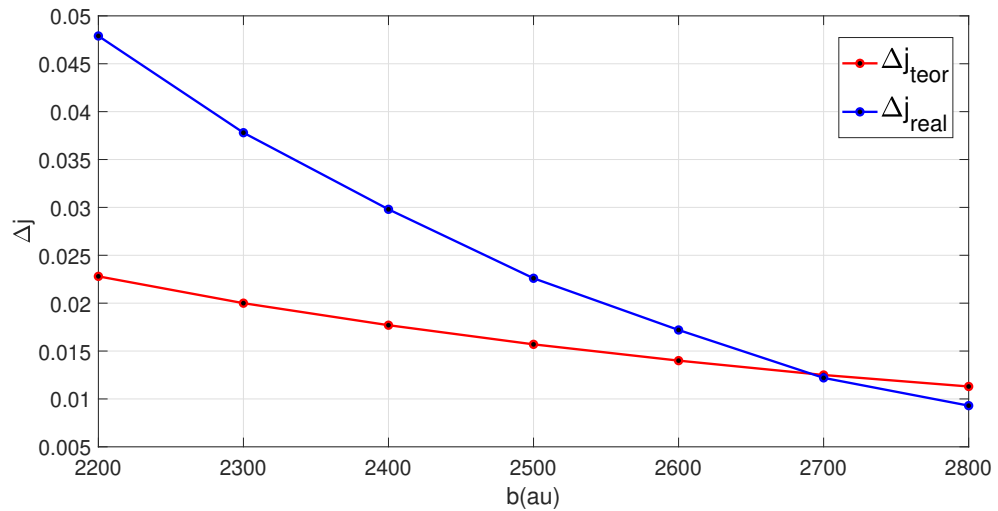
$$\Gamma \sim n\sigma v, \quad (20)$$

где n — концентрация ПЧД в кластере, $\sigma = \pi b^2$ — сечение рассеяния и v — относительная скорость на бесконечности. Характерное время между рассеяниями оценивается как $\tau \sim \Gamma^{-1}$

$$\tau \sim 30 \left(\frac{100 \text{ pc}^{-3}}{n} \right) \left(\frac{2000 \text{ au}}{b} \right)^2 \left(\frac{\text{km s}^{-1}}{v} \right) \text{ Myr} \quad (21)$$

видно, что характерное время между рассеяниями, ведущими к значительному увеличению времени жизни, значительно меньше в сравнение с возрастом Вселенной. Отметим, что не требуется большие значений локальной концентрации ПЧД. Можно ожидать, что к современному моменту регистрации событий слияний ПЧД, двойная успеет много раз возмутиться, что приведет к сильному времени жизни и ослаблению ограничений. Далее в работе планируется моделировать последовательность рассеяний каждое из которых будет случайным образом разыграно для того чтобы получить параметры двойных в современную эпоху.

С целью проверки справедливости теоритической оценкой 19 была измерена величина Δj при разных ориентациях двойной вокруг оси OZ и рассеивающейся ПЧД вокруг оси OX. Для каждого значения прицельного параметра b было найдено усредненное значение Δj . Сравнительный график приведен ниже.



Также была смоделирована последовательность 10 рассеяний и получены следующие результаты:

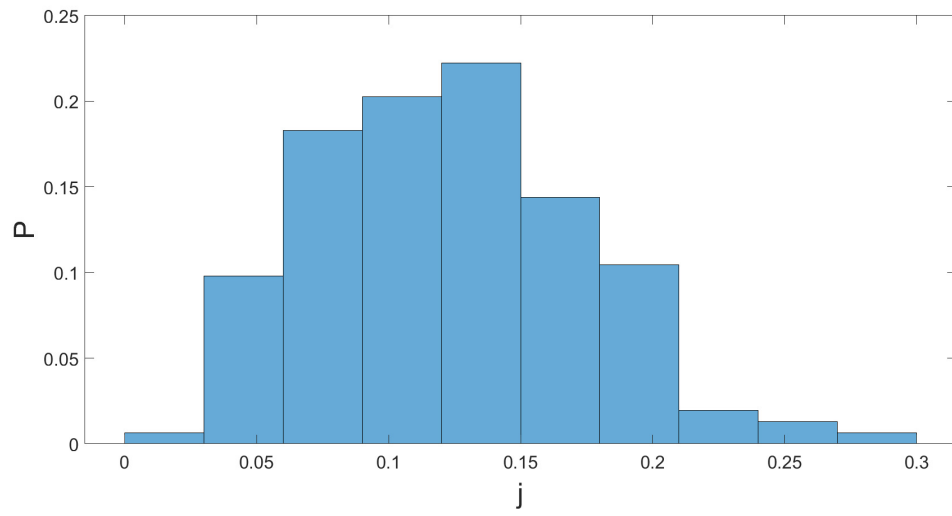


Рисунок 3 — Распределение j после последовательности 10 рассеяний в виде гистограммы ($b = 2200\text{au}$, $a=20\text{au}$, $j_0 = 0.0447$)

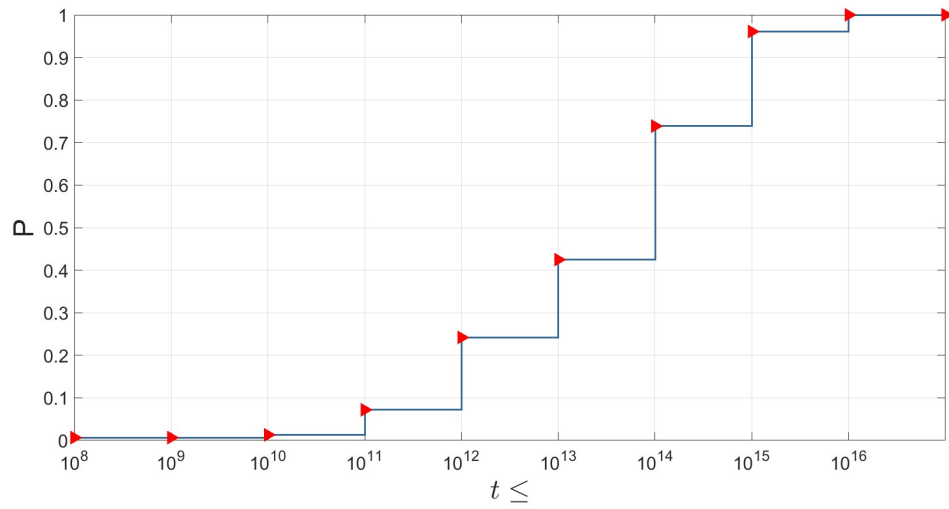


Рисунок 4 — Интегральная функция распределения t после последовательности 10 рассеяний ($b=2200\text{au}$, $a=20\text{au}$, $t_0=1.7942\text{e}+10$ лет)

При жестких рассеяниях, в которых прицельный параметр b достаточно маленький, начальная двойная может разрушаться и образуется новая система. Ниже показано распределение углового момента j при жестком рассеянии

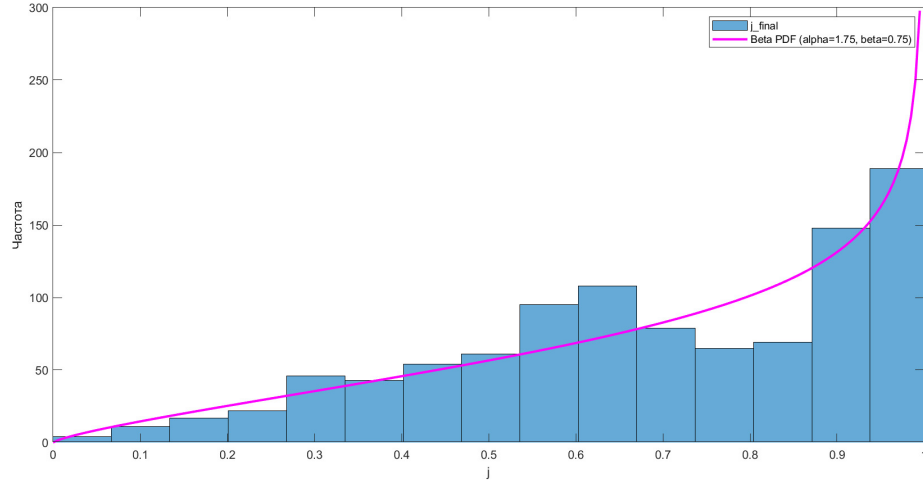


Рисунок 5 — распределение углового момента j при жестком рассеянии

На основе анализа гистограммы, представляющей распределение углового момента j при жестком рассеянии, была выполнена подгонка теоретического распределения вероятностей. В качестве подходящей модели было выбрано **Бета-распределение**, функция плотности вероятности (PDF) которого описывается формулой:

$$f(j) = \frac{j^{\alpha-1}(1-j)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

Параметры α и β этого распределения были оценены по данным. Полученные значения составили:

$$\alpha = 1.75$$

$$\beta = 0.75$$

Для этих значений параметров, значение Бета-функции равно:

$$B(1.75, 0.75) = 0.8442$$

В работе Sasaki 2016 был рассчитан темп слияний ПЧД на основе следующего распределения по большой полуоси a и угловому моменту j :

$$dP = \frac{3}{2} \left(\frac{f}{\bar{x}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{a}}{j^2} da dj \quad (22)$$

В данной работе рассматривается другое распределение, которое учитывает вклад рассеяний ПЧД друг на друге в модели кластеризации:

$$dP = \frac{3}{2} \left(\frac{f}{\bar{x}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{a}}{j^2} e^{-\frac{t}{\tau}} da dj \quad (23)$$

где

$$\tau \sim \frac{1}{n\sigma v} \quad (24)$$

$$n = \frac{1000 \left(\frac{M_{\odot}}{M_{bh}} \right)}{pc^3} \approx \frac{30}{pc^3} \quad (25)$$

$$\sigma = \pi a^2 \left(1 + \frac{6GM_{bh}}{av^2} \right) \quad (26)$$

В результате этих соображений, темп слияний подовляется из-за возмущений ПЧД.

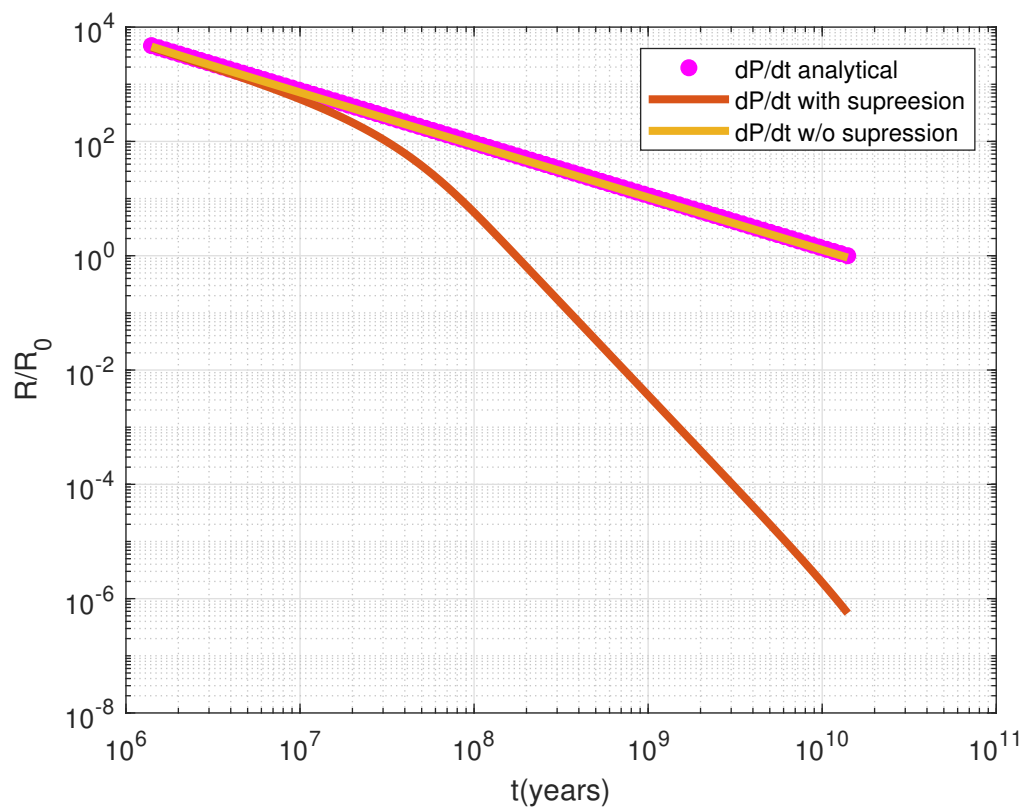


Рисунок 6 — Темп слияний ПЧД

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно ожидать, что к современному моменту регистрации событий слияний ПЧД, двойная успеет много раз возмутиться, что приведет к значительному увеличению времени жизни и ослаблению ограничений. Далее в работе планируется моделировать последовательность рассеяний каждое из которых будет случайным образом разыграно для того чтобы получить параметры двойных в современную эпоху.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 6. — P. 061101. — arXiv: 1603.08338 [astro-ph.CO] ; — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 121, 059901 (2018)].
2. Did LIGO detect dark matter? / S. Bird [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 20. — P. 201301. — arXiv: 1603.00464 [astro-ph.CO].
3. *Clesse S., García-Bellido J.* The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO // Phys. Dark Univ. — 2017. — Vol. 15. — P. 142–147. — arXiv: 1603.05234 [astro-ph.CO].
4. *Ali-Haïmoud Y., Kovetz E. D., Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96, no. 12. — P. 123523. — arXiv: 1709.06576 [astro-ph.CO].
5. A Luminous Quasar at Redshift 7.642 / F. Wang [et al.] // Astrophys. J. Lett. — 2021. — Vol. 907, no. 1. — P. L1. — arXiv: 2101.03179 [astro-ph.GA].
6. Observational Evidence for Primordial Black Holes: A Positivist Perspective / B. Carr [et al.]. — 2023. — arXiv: 2306.03903 [astro-ph.CO].
7. *De Luca V., Franciolini G., Riotto A.* NANOGrav Data Hints at Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Vol. 126, no. 4. — P. 041303. — arXiv: 2009.08268 [astro-ph.CO].
8. Do pulsar timing arrays observe merging primordial black holes? / P. F. Depta [et al.]. — 2023. — arXiv: 2306.17836 [astro-ph.CO].
9. *Carr B., Kuhnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Phys. Lect. Notes. — 2022. — Vol. 48. — P. 1. — arXiv: 2110.02821 [astro-ph.CO].

10. *Vaskonen V., Veermäe H.* Lower bound on the primordial black hole merger rate // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 101, no. 4. — P. 043015. — arXiv: 1908.09752 [astro-ph.CO].
11. *Stasenko V., Belotsky K.* Influence of early dark matter haloes on the primordial black holes merger rate // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2023. — Vol. 526, no. 3. — P. 4308–4314. — arXiv: 2307.12924 [astro-ph.CO].
12. Cosmic conundra explained by thermal history and primordial black holes / B. Carr [et al.] // *Phys. Dark Univ.* — 2021. — Vol. 31. — P. 100755. — arXiv: 1906.08217 [astro-ph.CO].
13. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [et al.] // *Eur. Phys. J. C.* — 2019. — Vol. 79, no. 3. — P. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].
14. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries / T. Nakamura [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 1997. — Vol. 487. — P. L139–L142. — arXiv: astro-ph/9708060.
15. *Eroshenko Y. N.* Gravitational waves from primordial black holes collisions in binary systems // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2018. — Vol. 1051, no. 1. — P. 012010. — arXiv: 1604.04932 [astro-ph.CO].
16. Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation / K. Ioka [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Vol. 58. — P. 063003. — arXiv: astro-ph/9807018.