

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)
ИНСТИТУ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.1.05

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Студент Б21-102

_____ Кузнецова К.М.

Научный руководитель

_____ Стасенко В.Д.

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ.....	2
1 ВВЕДЕНИЕ.....	3
2 ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ.....	5
3 ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ	6
3.1 ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ.....	6
3.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ	8
3.3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ	10
3.4 ОСТАНОВКА РОСТА ГАЛО	12
4 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ С ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ	15
5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	17
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	18

1 ВВЕДЕНИЕ

Почти во всех современных космологических моделях галактики, скопления и все крупномасштабные структуры развивается в результате гравитационной неустойчивости, возникающей из-за флуктуаций плотности с малой амплитудой. В большинстве этих моделей холодная скрытая масса является важной составляющей общей плотности массы Вселенной. Существует два основных типа флуктуаций плотности зародыша — кривизна и изокруглость, и в целом ожидается, что оба они возникнут в ранней Вселенной. По определению, общая плотность энергии при флуктуации изокруглости постоянна; флуктуация заключается в относительном вкладе в общую плотность энергии различных компонентов многокомпонентной системы. Важными примерами этого типа являются флуктуации, вызванные в барионах каким либо диссипативным процессом во Вселенной, содержащей как барионы, так и темную материю, а также топологические или нетопологические конфигурации полей, такие как космические струны или текстуры. В то время как амплитуда любого типа флуктуаций на больших масштабах сильно ограничена анизотропией микроволнового фона, амплитуда мелкомасштабных флуктуаций может быть большой, даже нелинейной, в эпоху последнего рассеяния. Спектр мелкомасштабных флуктуаций не обязательно должен отражать форму спектра мощности первичных флуктуаций, генерируемых в инфляционную эпоху, поскольку мелкомасштабные флуктуации вполне могут генерироваться позже, например, во время различных космологических фазовых переходов.

В данной работе нас интересуют флуктуации изокруглости, которые достигают горизонта перед температурой равных плотностей энергии вещества и излучения, $T_{EQ} = 5.5\Omega_0 h^2 eV$ [1]. Мы будем рассматривать масштабы, намного меньшие, чем горизонт, поэтому плотность энергии излучения должна быть однородной.

Хорошо известно [2], что рост изотермических флуктуаций малой амплитуды подавляются космологическим расширением, и флуктуации не рас-

тут до тех пор, пока не закончится эпоха равенства. Однако это верно только в линейной теории. Из-за собственной гравитации большой амплитуды нелинейные флуктуации могут стать важными до TEQ, и, следовательно, они прекращаются раньше. Поэтому они способны создавать очень плотные объекты после того, как они отделяются от общего расширения и вириализуются.

Мы называем эти изотермические флуктуации “сгустками”. Давайте определим плотность сгустка темной материи следующим образом:

$$\Phi = \frac{\delta\rho_{DM}}{\rho_{DM}}. \quad (1)$$

2 ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В ранней Вселенной некоторые флуктуации плотности могли коллапсировать, производя определенное количество черных дыр, называемых первичными. Эти ПЧД обладают следующими свойствами: они являются нерелятивистскими и имеют размеры (гравитационный радиус) порядка 10^{-8} см ($m_{\text{ПЧД}}/10^{20}\text{г}$), что делает их практически бесстолкновительными объектами. Основопологающей работой по ПЧД считается статья Зельдовича и Новикова 1966 года [3], в которой было впервые выдвинуто предположение о существовании объектов, которые сегодня называют ПЧД. В следующие несколько лет, в начале 1970-х годов, вышли работы за авторством Хокинга и Карра, а также их совместная статья [4].

3 ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Для описания эволюции гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры, воспользуемся одномерной сферической моделью, позволяющей получить информацию о физических параметрах гало [5].

3.1 ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сферическую область радиуса r , содержащую избыток материи, не оказывающей давления, в расширяющейся Вселенной. В пространственно-плоской Вселенной любая область, содержащая избыток плотности, в конечном итоге достигает максимального размера и коллапсирует. Полная масса материи внутри области радиуса r , M_{TOT} , во время расширения вычисляется через интеграл движения. Поскольку мы рассматриваем масштабы, которые намного меньше, чем радиус Хаббла, излучение можем считать однородным, а его временная эволюция определяется общим расширением Вселенной, а не локальными условиями.

Уравнение движения для радиуса r имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{8\pi G}{3}\rho_R r - \frac{GM_{TOT}}{r^2}. \quad (2)$$

Для удобства перейдем к конформного времени $d\eta = dt/a(t)$, а затем перейдем в сопутствующую систему отсчета, $r = a(\eta)R_\xi(\eta)\xi$, где ξ — сопутствующий номер данной оболочки, а $R_\xi(\eta)$ измеряет отклонение движения оболочки от однородного Хаббловского потока во Вселенной Фридмана. В последующих выкладках мы опускаем индекс ξ в $R_\xi(\eta)$, но подразумевается, что существует отдельная эволюция для каждой оболочки.

Здесь предполагаем, что масштабный фактор $a(\eta)$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна для Вселенной, заполненной излучением и материей, не оказывающей давления

$$a'^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_R) a^4; \quad a'' = \frac{4\pi G}{3} \rho_M a^3, \quad (3)$$

где штрих обозначает производную по η . Параметризуем плотности излучения и скрытой массы как $\rho_R = \rho_{eq} (a_{eq}/a)^4$, $\rho_M = \rho_{eq} (a_{eq}/a)^3$ соответственно. Решение фоновых уравнений (3) есть

$$a(\eta) = a_{eq} \left[2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right) + \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где $\eta_*^{-2} = 2\pi G \rho_{eq} a_{eq}^2 / 3$.

С учетом перехода к конформному времени получим уравнение (2) в виде

$$aR'' + a'R' + \left(\frac{GM_{\text{TOT}}}{\xi^3 R^2} - \frac{4\pi G}{3} a^3 \rho_M R \right) = 0. \quad (5)$$

Плотность энергии излучения не входит в это уравнение явно, но ее эффект входит в эволюцию масштабного фактора. Параметризовав полную массу материи внутри оболочки в терминах превышения над однородным фоном, обозначаемого как $\Phi(\xi) = \delta\rho_M / \rho_M$, получим

$$M_{\text{TOT}} \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_{eq} a_{eq}^3 [1 + \Phi(\xi)] \xi^3. \quad (6)$$

Сделав замену переменных от η к $x \equiv a/a_{eq}$ в уравнении (5), придем к уравнению

$$x(1+x) \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{2} \right) \frac{dR}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\Phi}{R^2} - R \right) = 0. \quad (7)$$

3.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Для решения уравнения (7) численными методами был использован код на Matlab. Работа программы основана на методе Рунге-Кутты четвертого порядка, определяющем масштабный коэффициент x_{ta} и отклонение оболочки от Хаббловского потока R_{ta} в момент, когда флуктуация прекращает рост и останавливается. Время остановки, определяемое $\dot{r} = 0$, в координатах уравнения (7) является решением уравнения

$$R + x \frac{dR}{dx} = 0. \quad (8)$$

В качестве начальных условий было принято, что $R(x_0) = 1$ в некоторый ранний момент времени, $x_0 \ll 1$. Параметром уравнения (7) выступает

$$\Phi(\xi) \equiv \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{M_{PBH}}{M_{DM}}, \quad (9)$$

где M_{DM} — скрытая масса, содержащаяся в области радиуса r , а M_{PBH} — масса первичной черной дыры внутри этой области.

Регулируя значения скрытой массы M_{DM} и массы первичной черной дыры M_{PBH} , можно получить решение уравнения (7) для заданного параметра Φ . На основе полученных значений x_{ta} и R_{ta} код также вычисляет соответствующие параметры сферического слоя скрытой массы: радиус и плотность на момент остановки

$$\rho_{ta} = \left(\frac{1}{4\pi r^2} \right) \frac{dM}{dr}; \quad r = R_{ta} x_{ta} \xi. \quad (10)$$

На рисунке 1 изображен график зависимости плотности оболочки ρ_{ta} от ее радиуса r_{ta} .

Для более поздних времен предположение о сферической симметрии нарушается; однако, мы можем предположить, что радиус вириализованного гравитационно-связанного объекта будет составлять половину радиуса остановки, а плотность внутри объекта будет в восемь раз больше плотности на момент разворота.

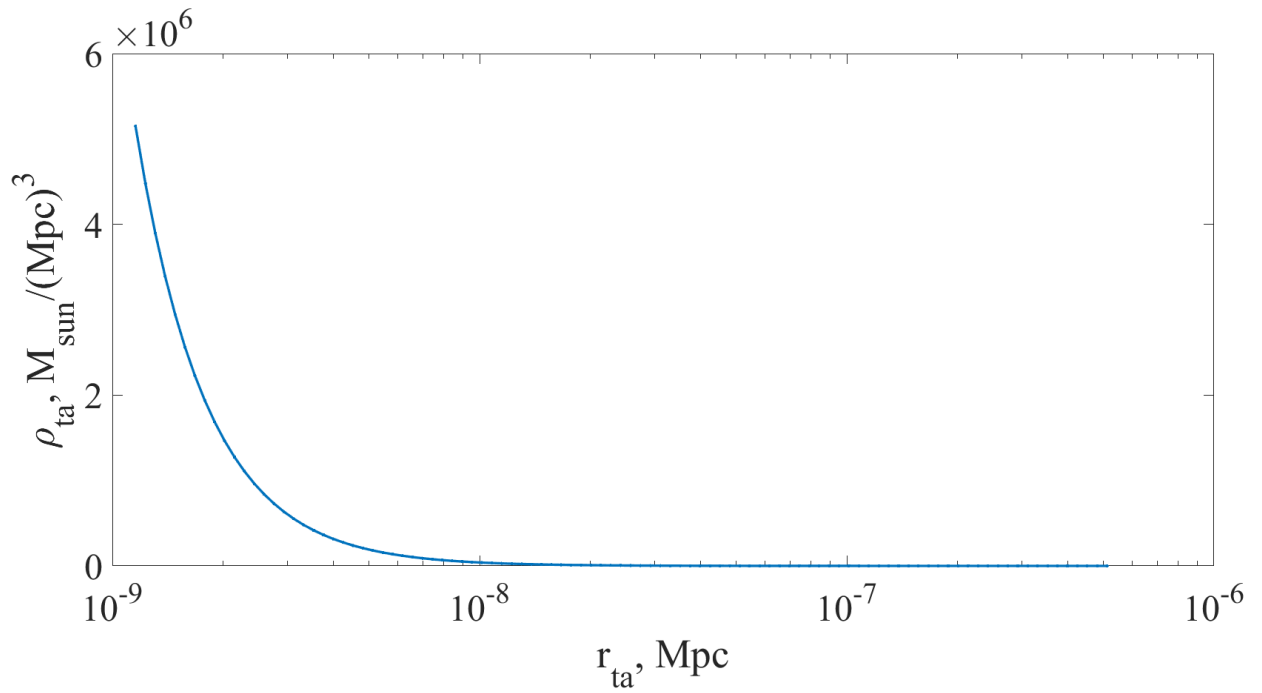


Рисунок 1 — График зависимости плотности сферической оболочки скрытой массы от радиуса остановки.

До порядка $\mathcal{O}(x^2)$ функция R зависит только от произведения Φx , поэтому для этого порядка по x масштабный коэффициент на момент остановки будет задан как $x_{ta} = C_x / \Phi$, где $C_x \equiv \text{const}$, и для того же порядка по x , $R_{ta} = \text{const}$.

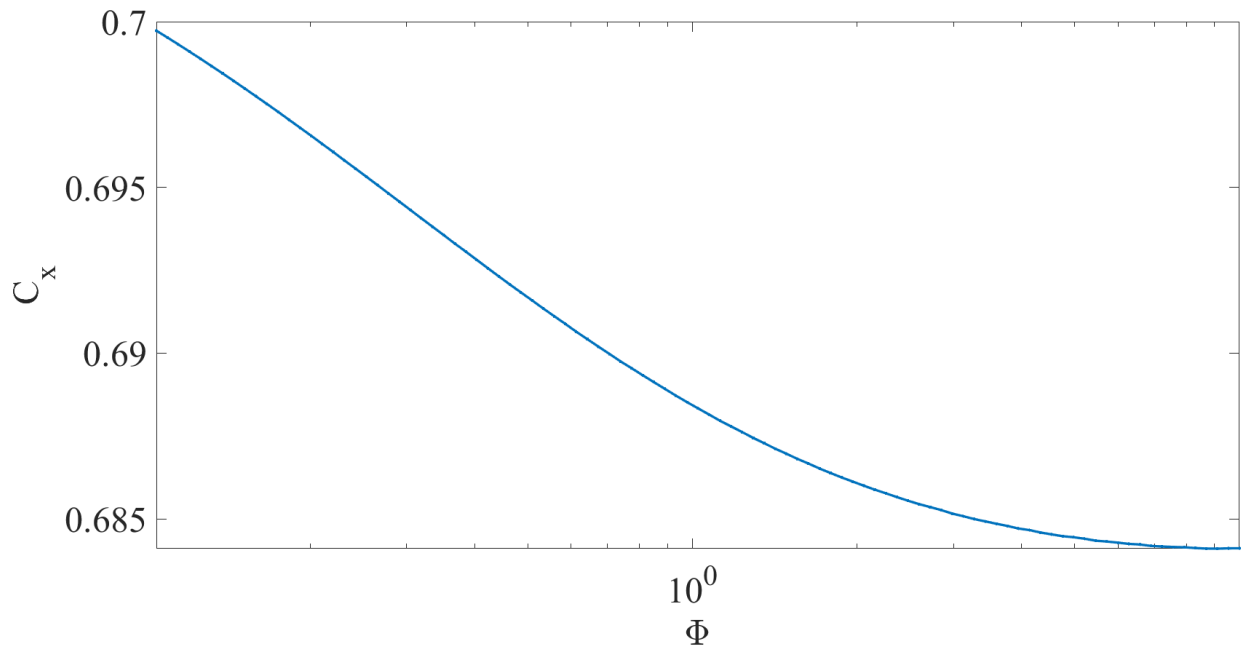


Рисунок 2 — График зависимости коэффициента C_x от параметра Φ .

3.3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аккреция скрытой массы на пылевидной стадии описывается уравнением (2) без учета давления излучения. Обозначим за r_{eq} радиус сферической оболочки слоя скрытой массы снаружи ПЧД на момент RD-MD перехода при $x = 1$. Внутри этой сферической оболочки ПЧД создает флуктуацию плотности $\delta_{eq} = 3M_{PBH}/4\pi\rho_{eq}r_{eq}^3$. Из предыдущей секции 3.2 (**численного решения**) радиус остановки сферического слоя скрытой массы связан с величиной флуктуации и его начальным радиусом как

$$r_{ta} \simeq \frac{2r_{eq}}{5\delta_{eq}} = \frac{8\pi\rho_{eq}r_{eq}^4}{15M_{PBH}}. \quad (11)$$

Масса сферического слоя скрытой массы радиусом r_{eq} и толщиной dr_{eq} будет $dM = 4\pi\rho_{eq}r_{eq}^2dr_{eq}$. После остановки слой вириализуется, в результате чего он сожмется в два раза $r = r_{ta}/2$, и его масса после соответствующих преобразований будет

$$dM = \left(\frac{15M_{PBH}}{4}\right)^{3/4} \left(\frac{\pi\rho_{eq}}{r}\right)^{1/4} dr. \quad (12)$$

Профиль плотности же определяется выражением $\rho(r) = dM/4\pi r^2 dr$

$$\rho(r) = \left(\frac{15M_{PBH}}{16\pi}\right)^{3/4} \left(\frac{\rho_{eq}}{4}\right)^{1/4} r^{-9/4}. \quad (13)$$

Поскольку единственный свободный параметр задачи — это масса ПЧД, то профиль плотности должен масштабироваться как $\rho(r/r_*)$, где $r_* = (M_{PBH}/\rho_{eq})^{1/3}$. Из выражения (13) легко видеть, что это действительно так

$$\rho \approx 0.29 \rho_{eq} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-9/4}. \quad (14)$$

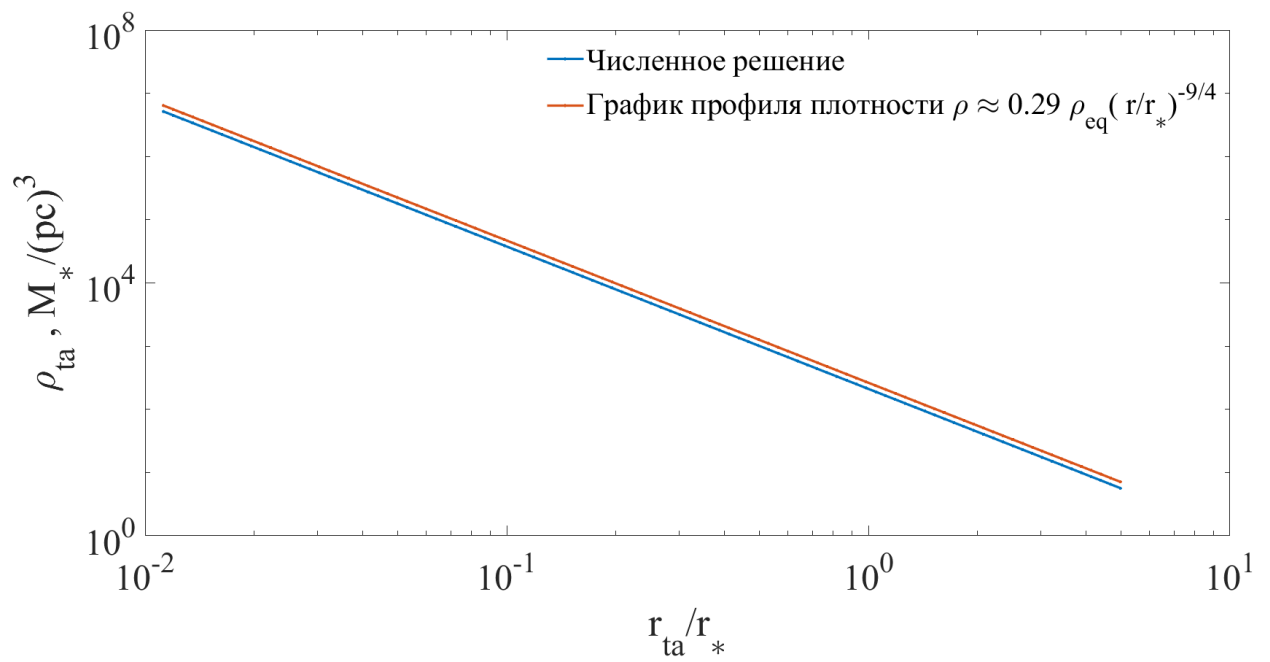


Рисунок 3 — Профиль плотности сферической оболочки материи, масштабированный как $\rho(r/r_*)$, где $r_* = (M_{PBH}/\rho_{\text{eq}})^{1/3}$. Синей пунктирной линией обозначена зависимость, полученная при численном решении 3.2, красной — зависимость, полученная при аналитическом решении.

3.4 ОСТАНОВКА РОСТА ГАЛО

Как неоднократно отмечалось ранее, первичная черная дыра на массовом масштабе M генерирует флуктуацию плотности $\delta \sim M_{PBH}/M$ [6], поэтому рост массы гало вокруг первичной черной дыры должен подчиняться стандартному закону роста флуктуаций на MD стадии $\delta \propto (1+z)^{-1}$

$$M_h \approx M_{PBH} \frac{1 + z_{eq}}{1 + z}. \quad (15)$$

С другой стороны гало скрытой массы также формируются из адиабатических инфляционных флуктуаций. При больших красных смещениях эти гало будут на много порядков легче, чем те, которые формируются вокруг первичных черных дыр. Однако современные галактики сформировались именно из инфляционных возмущений, что подтверждается анализом крупномасштабной структуры Вселенной. Из этих соображений становится ясно, что при некоторых красных смещениях рост гало вокруг ПЧД прекращается и гало начинают формироваться преимущественно из инфляционных возмущений. Момент перехода “механизма” формирования структур из одного режима в другой можно оценить с помощью аналитической теории Пресса-Шехтера [7], согласно которой доля материи в структурах с массой большей, чем M_h будет

$$P_{\text{inf}}(M > M_h) = 1 - \text{erf} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M_h)} \right), \quad (16)$$

где erf — функция ошибок, $\delta_c = 1.69$ — критическое значение флуктуации плотности, вычисленное в линейной теории, для сферического коллапса и $\sigma^2(M_h)$ — дисперсия флуктуации материи на массовом масштабе M_h

$$\sigma^2(M_h, z) = D^2(z) \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) W^2(kR), \quad (17)$$

где $P(k) = A T^2(k) k^{n_s}$ с $n_s = 0.96$ и $T(k)$ — спектр мощности и переходная функция для адиабатических инфляционных возмущений [8; 9], A — нормировочная константа, например, на данные СМВ, $D(z) = g(z)/[g(0)(1+z)]$ описывает линейный рост флуктуаций плотности и $W(kR)$ — сферическая оконная функция в импульсном пространстве

$$W(kR) = \frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3}, \quad (18)$$

и масштаб R с масштабом M_h связан соотношением $R = (3M/4\pi\rho_M)^{1/3}$ и ρ_M — современная плотность материи.

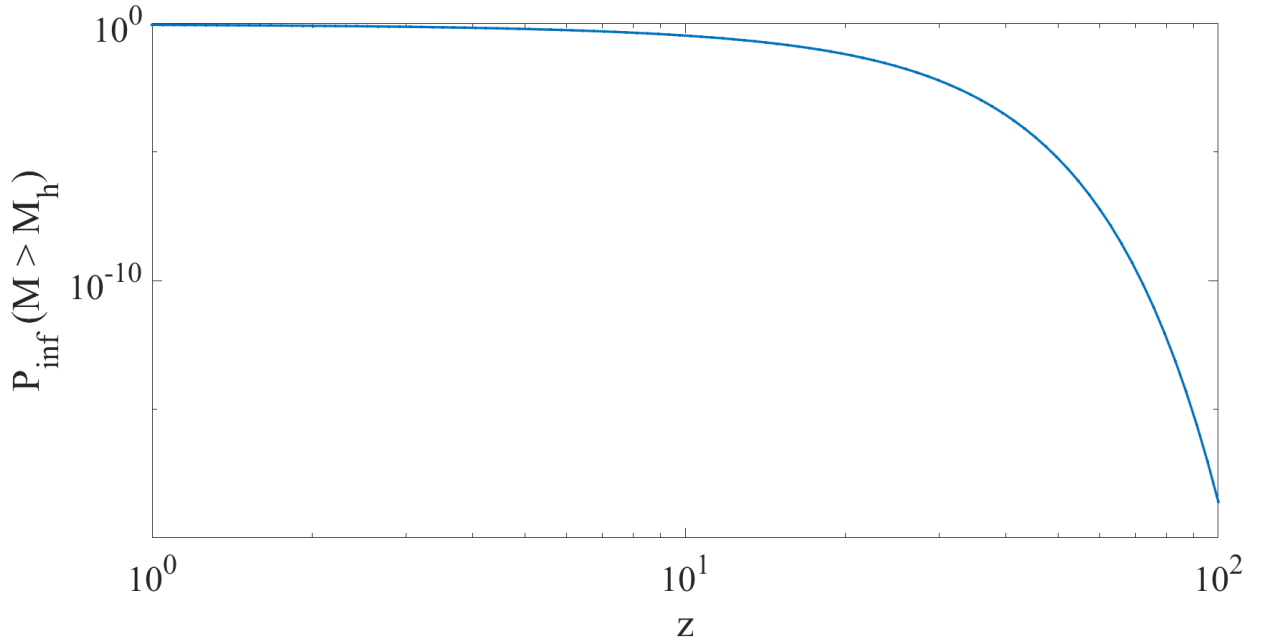


Рисунок 4 — График зависимости доли материи с массой большей, чем M_h , $P_{\text{inf}}(M > M_h)$ от красного смещения z .

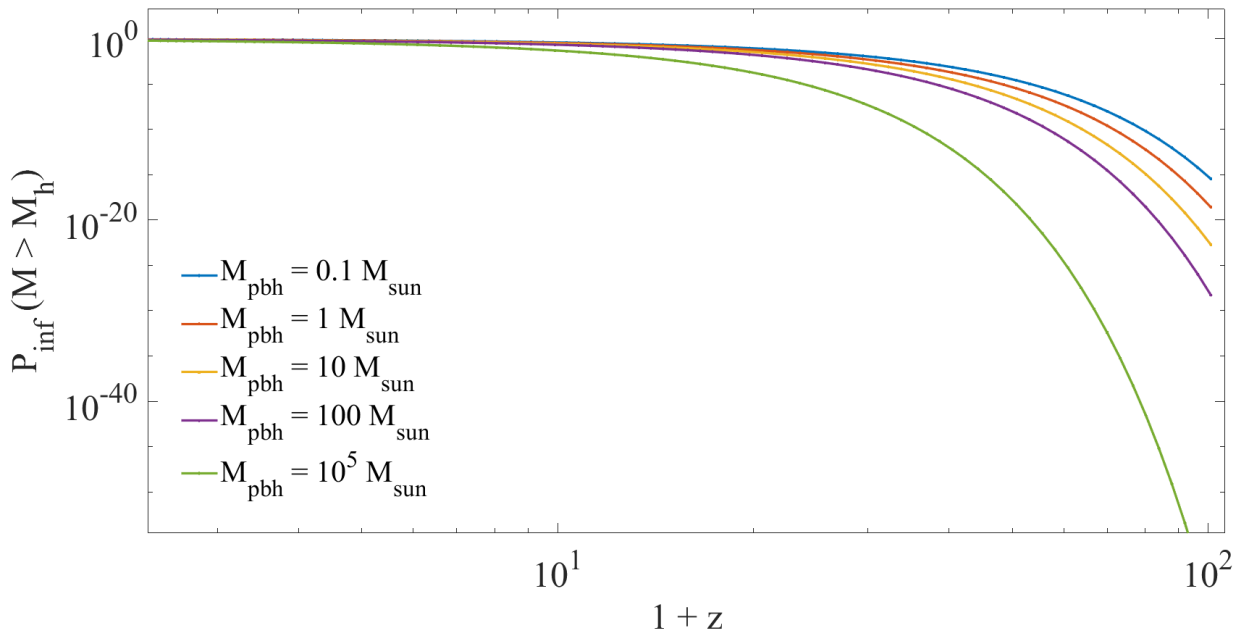


Рисунок 5 — Графики зависимости доли материи с массой большей, чем M_h , $P_{\text{inf}}(M > M_h)$ от красного смещения $1+z$ для различных масс M_{PBH} .

Доля же массы, которая аккумулируется вокруг ПЧД, определяется выражением

$$P_{PBH} = \frac{M_h f_{PBH}}{M_{PBH}}. \quad (19)$$

Легко сообразить, что если $f_{PBH} = 0.01$, то к красному смещению $z \approx 30$ вокруг ПЧД будет собрана вся скрытая масса в пренебрежении вкладом гало от инфляционных возмущений. Определим момент остановки роста гало вокруг ПЧД как решение уравнения

$$P_{PBH}(M_h(z)) = P_{\text{inf}}(M_h(z)), \quad (20)$$

где M_h определяется выражением (15). Решение уравнения (20) было реализовано графическим способом, из которого получено, что момент остановки роста гало вокруг ПЧД составляет

- $z \approx 34$ при $f_{PBH} = 10^{-5}$,
- $z \approx 25$ при $f_{PBH} = 10^{-4}$,
- $z \approx 7$ при $f_{PBH} = 10^{-3}$.

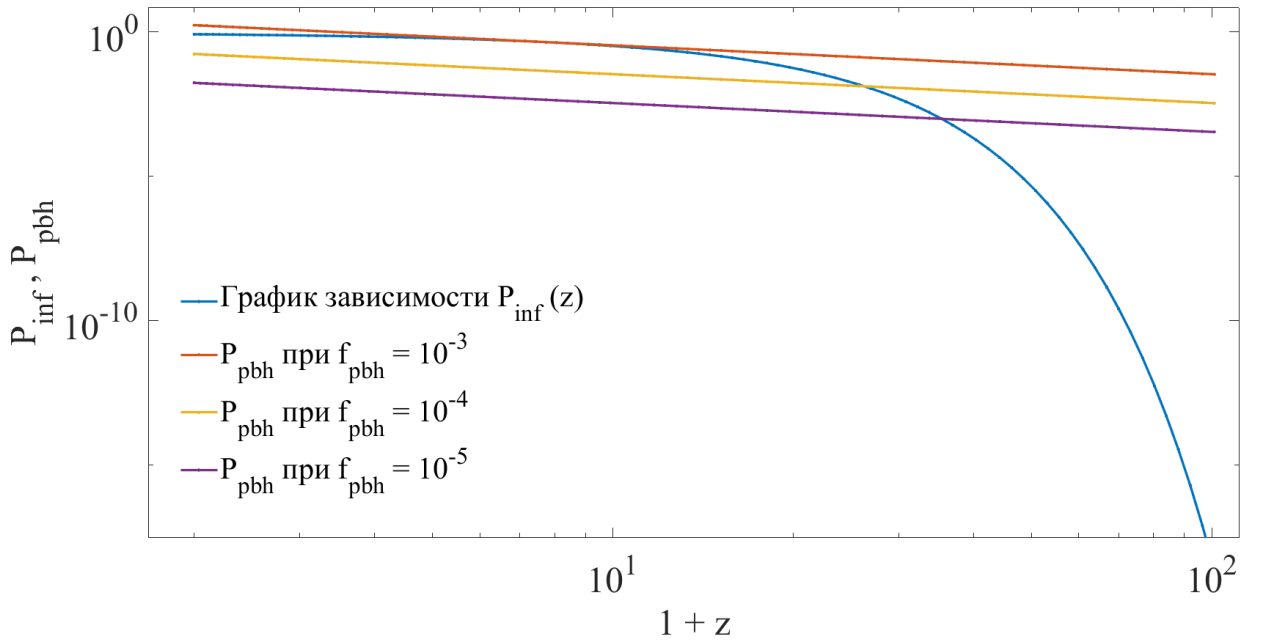


Рисунок 6 — Графическое решение уравнения (20). Точка пересечения синей и красной пунктирных линий показывает момент остановки роста гало вокруг первичной черной дыры при $f_{PBH} = 10^{-3}$; синей и желтой пунктирных линий — момент остановки роста гало при $f_{PBH} = 10^{-4}$; синей и фиолетовой — момент остановки роста гало при $f_{PBH} = 10^{-5}$.

4 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ С ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Звезды во Вселенной гравитационно связанные с первичной черной дырой двигаются по эллиптическим орбитам вокруг нее. Присутствие гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры будет приводить к отклонению полного ньютоновского гравитационного потенциала от потенциала точечной массы черной дыры $U = -\frac{GM_{PBH}}{r}$ [10]. В результате гравитационно связанные с первичной черной дырой орбиты звезд не будут замкнуты, а станут прецессировать.

При наличии малой поправки δU к ньютоновскому потенциалу первичной черной дыры угол прецессии орбиты звезды за время одного оборота равен

$$\delta\phi = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} \int_0^\pi r^2(\phi) \delta U d\phi \right), \quad (21)$$

где L — сохраняющийся угловой момент звезды с массой m . При интегрировании в этом выражении в качестве траектории частицы берется невозмущенная эллиптическая орбита

$$r(\phi) = \frac{p}{(1 + e \cos(\phi))}, \quad (22)$$

где e — эксцентриситет эллипса, $p = \frac{L^2}{GM_{PBH}m} = a(1 - e^2)$ — параметр орбиты, a — большая полуось.

Рассмотрим степенной профиль плотности вещества (14), полученный из аналитического решения 3.3, создающего поправку δU в дополнение к потенциалу первичной черной дыры. Соответствующая полная масса скрытой массы внутри сферы радиуса r равна

$$M_{DM}(r) = 4\pi \left(\frac{4}{3} \right) 0.29 \rho_{eq} r_*^3 \left[\left(\frac{r}{r_*} \right)^{3/4} - \left(\frac{R_{min}}{r_*} \right)^{3/4} \right], \quad (23)$$

где R_{min} — минимальный радиус, до которого дотянется профиль плотности (14).

Поправка к потенциалу в случае профиля плотности (14) составляет

$$\delta U = 4\pi G \left[\left(-\frac{16}{3} \right) 0.29 \rho_{eq} r_*^2 \left(\frac{r}{r_*} \right)^{-1/4} + \frac{C_1}{r} + C_2 \right], \quad (24)$$

где C_1, C_2 — константы.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было получено численное решение уравнения, описывающего эволюцию оболочки скрытой массы вокруг первичной черной дыры. Также была получена аналитическая формула профиля плотности сферической оболочки (14), которая отражает зависимость, полученную при численном решении 3.

Было получено графическое решение уравнения (20), определяющего момент остановки роста гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры. При массе первичной черной дыры $M_{PBH} = 1 \cdot M_{\odot}$ момент остановки роста гало составляет:

- $z \approx 34$ при $f_{PBH} = 10^{-5}$,
- $z \approx 25$ при $f_{PBH} = 10^{-4}$,
- $z \approx 7$ при $f_{PBH} = 10^{-3}$.

Также была найдена формула (24), описывающая поправку к потенциалу точечной массы первичной черной дыры в случае профиля плотности (14), возникающую в присутствии гало скрытой массы вокруг нее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolb E.W., Turner M.S.* The Early Universe. — Addison-Wesley, Redwood City, Ca., 1990.
2. *Meszaros P.* The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. // *Astronomy and Astrophysics*. — 1974. — Dec. — Vol. 37, no. 2. — P. 225–228.
3. *Zel'dovich Y. B. N.I.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Soviet Astronomy*. — 1966.
4. *Carr B.J., Hawking S.W.* Black holes in the early Universe // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 1974. — Vol. 168. — P. 399–415.
5. *Kolb E.W., Tkachev I.I.* Large-amplitude isothermal fluctuations and high-density dark-matter clumps // *Phys. Rev. D*. — 1994. — July. — Vol. 50, issue 2. — P. 769–773. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.769>.
6. *Carr B., Silk J.* Primordial Black Holes as Generators of Cosmic Structures // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 478, no. 3. — P. 3756–3775. — arXiv: [1801.00672 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1801.00672).
7. *Press W.H., Schechter P.* Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation // *Astrophys. J.* — 1974. — Feb. — Vol. 187. — P. 425–438.
8. *Bardeen J.M., Bond J.R., Kaiser N., Szalay A.S.* The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields // *Astrophys. J.* — 1986. — Vol. 304. — P. 15–61.
9. *Mo H.J., White S.D.M.* The Abundance and clustering of dark haloes in the standard lambda-CDM cosmogony // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2002. — Vol. 336. — P. 112. — arXiv: [astro-ph/0202393](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0202393).
10. *Dokuchaev V.* Взвешивание темной материи в центре Галактики // *JETP Letters*. — 2015. — Июнь. — Т. 101. — С. 875–880.