Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

Институт ядерной физики и технологий
Кафедра №40 «Физика элементарных частиц»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА ИНТЕГРИРУЕМОЙ O(4) СИГМА-МОДЕЛИ

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц., PhD. _______ М. Н. Алфимов

Студент _______ И. Д. Федоров

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному $(n-1)$-мерному многообразию.

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пионов и каонов, а также массы пионов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [1]. Так, QLLσM в первом порядке теории возмущений предсказывает зарядовые массы некоторых мезонов без введения дополнительных параметров [2]:

$$r_\pi = 0.63 \text{ fm}$$
$$r_K = 0.51 \text{ fm},$$

в то время как в χPT требуется параметр L_g, который находится из эксперимента:

$$r_\pi^2 = 12L_9/f_\pi^2.$$

Эксперимент показывает, что

$$r_\pi = (0.672 \pm 0.008) \text{ fm}$$
$$r_K = (0.560 \pm 0.031) \text{ fm},$$

то есть QLLσM согласуется с экспериментом. Также нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния [3], в частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [4].

В квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. Например, в сигма моделях наблюдается явление ассимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД [5].

Данная работа посвящена изучению нелинейной $O(4)$ сигма-модели.

Предпринимаются попытки по нахождению вида деформированной метрики в двупетлевом случае.

1. ДЕФОРМИРОВАННАЯ $O(n)$ СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как правило, в $O(n)$ сигма-моделях рассматриваются римановы многообразия. Действие записывается как

$$S\left[\mathbf{X}\right] = \frac{1}{4\pi}\int G_{ij}(\mathbf{X})\partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^n\sigma,$$

где $\mathbf{X}$ — координата на заданном многообразии, $G = \{G_{ij}\}$ — метрический тензор. Метрика такова, что при отсутствии деформации действие инвариантно относительно преобразований

$$X^i \to A^{ij} X^j$$

с любой $n \times n$ ортогональной матрицей A, или, говоря иначе, действие инвариантно относительно действия группы $O(n)$ ортогональных преобразований.

Чтобы проквантовать теорию, получить физически наблюдаемые величины, данные теории поля требуется перенормировать. Как известно, их можно описать при помощи уравнения ренормгруппы [6]. Уравнение ренормгруппы для метрики G выглядит следующим образом:

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}\left(G\right), \tag{1.1}$$

где $\dot{G}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} G_{ij}$ — производная метрического тензора по времени, V — некоторое векторное поле. В качестве t выступает некий параметр, непрерывно связанный с масштабом энергии.

В данной работе рассматривается $O(4)$ сигма-модель. Цель — найти метрику, удовлетворяющую RG-уравнению (1.1) хотя бы в первом порядке теории возмущений. При этом, в качестве малого параметра рассматривается $\hbar$ — некоторый аналог постоянной Планка. В данной работе возмущение метрики имеет вид

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \ldots, \tag{1.2}$$

где $G_{ij}^{(n)}$ имет размерную характеристику $\hbar^n$. Мы ограничиваемся $O(4)$-сигма-моделью, поскольку случай $n = 3$ уже тщательно изучен [7], а при $n \geq 5$ возникающие технические сложности значительно усложняют анализ, поэтому $n = 4$ является первым естественным шагом в рамках исследования.

2. ПОИСК ДЕФОРМИРОВАННОЙ МЕТРИКИ $O(4)$ СИГМА-МОДЕЛИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Если рассматривать первое приближение ($\hbar^0$), то уравнению ренормгруппы (1.1) удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right), \tag{2.1}$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Для данной метрики мы искали векторное поле в виде $V = \nabla\Psi$, где $\Psi = \frac{1}{2}\ln|1-\kappa^2 r^2|$ и нашли ограничения на параметры $\hbar$ и κ в виде дифференциальных уравнение

$$\begin{aligned} &\dot{\hbar} = 0; \\ &\dot{\kappa} = \hbar(\kappa^2 - 1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

то есть $\hbar = 0$ и $\kappa = \operatorname{arctg} \hbar t$.

Примечательно то, что при $\kappa = 0$ метрика (2.1) является метрикой трехмерной сферы, а при $\kappa = 1$ переходит в плоскость, то есть κ является параметром деформации модели.

2.2. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика (2.1) во втором приближении ($\hbar^1$) не удовлетворяет РГ уравнению (1.1). Попытки искать метрику в виде

$$G_{ij}^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

ни к чему не привели. Вероятно, другие компоненты в двупетлевом случае не равны нулю, но вычисления в этом случае очень сильно усложняются. Поэтому было решено использовать другой подход, рассмотрев ультрафиолетовый предел.

2.3. УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЙ ПРЕДЕЛ

Заметим, что преобразование координат, в которых в UV пределе метрика имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + e^{\alpha t}\left(A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_1}\right) + \ldots,$$

поможет найти следующую поправку по $\hbar$. Действительно, этот предел даст разложение по всем степеням $\hbar$ в пределе $t \to -\infty$, как показано в [8]. С другой стороны, исходная метрика допускает разложение по всем степеням t. Тогда, сравнивая нужные элементы разложения, мы можем получить элемент $G_{ij}^{(1)}$, что и требуется. Это схематично показано в Таблица 1.

Таблица 1 - Разложение по степеням e^t, $\hbar$ в UV и исходной метрике

e^t \ $\hbar$	0	1
0	$+$	$+$
1	$+$	?

По аналогии с заменой координат в случае $O(6)$ сигма-модели, описанной в [9], было найдено следующее преобразование координат, которое преобразует метрику к нужному виду:

$$\begin{cases} r = 1 + a \cdot e^{-x_1}\tau \\ \theta = \frac{x_2}{2} + b \cdot e^{-x_1}\tau \\ \phi = \frac{x_3}{2} + c \cdot e^{x_1}\tau \end{cases}, \tag{2.4}$$

где a, b, c - константы, $\tau = e^t$. Тогда при разложении $\tau \to 0$ получим, что метрика имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\hbar}\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\hbar}e^t \left(A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_1}\right) + \ldots, \tag{2.5}$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \qquad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ -b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

После некоторых простых преобразований координат, метрику можно привести к виду

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{2}&\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \\ &+ e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 + \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_2\right) \\ &+ e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{-\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 - \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_3\right), \end{aligned}$$

то есть получить так называемые скрининг-заряды [9]. В случае рассматриваемой модели, скрининг-заряды определяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_1 = b\,\boldsymbol{E}_1 + i\beta\,\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = b\,\boldsymbol{E}_1 - i\beta\,\boldsymbol{e}_1, \\ &\boldsymbol{\alpha}_3 = -b\,\boldsymbol{E}_1 + i\beta\,\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = -b\,\boldsymbol{E}_1 - i\beta\,\boldsymbol{e}_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а β определяется выражением

$$\beta = \sqrt{1+b^2}. \tag{2.8}$$

Данные скрининг-заряды, следуя [9], схематично изображены на диаграмме Рисунок 1.

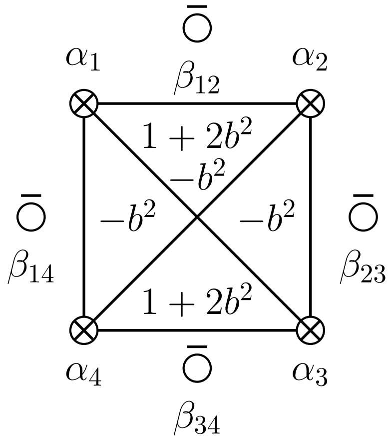

Рисунок 1 — Диаграмма скрининговых зарядов

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данном этапе научно-исследовательской работы было продолжено изучение $O(4)$-сигма модели в двупетлевом случае. Полученные ранее результаты не принесли ожидаемого результата, поэтому для нахождения поправки первого порядка по $\hbar$ к метрике было решено использовать другой подход, а именно, рассмотрение ультрафиолетового предела. Найдены координаты, в которых метрика имеет определенный вид. Получены скрининг-заряды. Дальнейшая работа заключается в непосредственном поиске первой поправки по малому параметру $\hbar$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [arXiv:hep-ph/0601196].

[2] M. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp and E. van Beveren, *Meson form factors and the quark-level linear σ model*, *Nuclear Physics A* **724** (2003) 391.

[3] S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, *GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1110.

[4] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.

[5] M.C. Abbott, Z. Bajnok, J. Balog, A. Hegedűs and S. Sadeghian, *Resurgence in the o(4) sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) .

[6] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [`arXiv:1804.03399`].

[7] M. Alfimov and A. Litvinov, *On loop corrections to integrable 2d sigma model backgrounds*, *Journal of High Energy Physics* **2022** (2022) .

[8] V. Fateev, *Integrable deformations of affine toda theories and duality*, *Nuclear Physics B* **479** (1996) 594.

[9] A.V. Litvinov and L.A. Spodyneiko, *On dual description of the deformed o(n) sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) 139.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Компоненты невозмущенного метрического тензора $O(4)$ сигма-модели в новых координатах (2.4):

$$G_{11} = \frac{a^2\left(1-\tau^2\right)\tau^2 e^{-2x_1}}{\hbar\left(\left(a\tau^2 e^{-x_1}+1\right)^2-1\right)\left(\left(\tau^2-1\right)^2\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2-1\right)} + \frac{b^2\left(1-\tau^2\right)\tau^2 e^{-2x_1}\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2}{\hbar} + \frac{c^2\tau^2 e^{2x_1}\left(-\left(1-\tau^2\right)\left(a\tau^2 e^{-x_1}+1\right)^2-\tau^4+1\right)}{\hbar-\hbar\left(\tau^4-1\right)^2\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2},$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{b\tau\left(1-\tau^2\right)e^{-x_1}\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2}{2\hbar},$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{c\tau e^{x_1}\left(-\left(1-\tau^2\right)\left(a\tau^2 e^{-x_1}+1\right)^2-\tau^4+1\right)}{2\left(\hbar-\hbar\left(\tau^4-1\right)^2\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2\right)},$$

$$G_{22} = \frac{\left(1-\tau^2\right)\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2}{4\hbar},$$

$$G_{23} = G_{32} = 0,$$

$$G_{33} = -\frac{\left(1-\tau^2\right)\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2+\tau^2-1}{4\left(\hbar-\hbar\left(\tau^2-1\right)^2\left(a\tau e^{-x_1}+1\right)^2\right)},$$