Исследование ренорм-группового потока интегрируемой O(4) сигма-модели

Федоров Иван Денисович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц., PhD. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе

Москва, 6 мая 2025 г.

Мотивировка

Нелинейная сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному $(n-1)$-мерному многообразию.

Сигма-модели находят множество применений в физике:

1. Описание спиновых цепочек [S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, 1989]
2. Описание квантового эффекта Холла [P. Fendley, 2000]
3. Асимптотическая свобода и интегрируемость позволяет им выступать как игрушечная модель КХД [M.C. Abbott, Z. Bajnok and Balog, 2021]
4. Механизм спонтанного нарушения хиральной симметрии и генерации динамической массы кварков m_{dyn} без введения множества свободных параметров [M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, 2006]

Мотивировка. КХД

QLLσM в первом порядке теории возмущений предсказывает зарядовые радиусы мезонов без введения дополнительных параметров:

$$r_\pi = 0.63 \text{ fm}$$
$$r_K = 0.51 \text{ fm}$$

в то время как в χPT требуется параметр L_g, который находится из эксперимента:

$$r_\pi^2 = 12 L_9 / f_\pi^2$$

Эксперимент показывает, что

$$r_\pi = (0.672 \pm 0.008) \text{ fm}$$
$$r_K = (0.560 \pm 0.031) \text{ fm}$$

[M. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp and E. van Beveren, 2003]

Деформированная нелинейная $O(n)$ сигма-модель

В нелинейных $O(n)$ сигма-моделях поле описывается как точечная частица, движущуюся по $(n-1)$-мерной сфере. Действие данной модели

$$S\left[\mathbf{X}\right] = \frac{1}{4\pi}\int G_{ij}(\mathbf{X})\partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^2\sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, который должен удовлетворять уравнению ренорм-группы (РГ)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)$$

Нелинейные $O(n)$ сигма-модели

1. Обладают асимптотической свободой при $n \geq 3$
2. Интегрируемые
3. Непрерывные деформации, сохраняющие интегрируемость
4. $O(3)$ изучена вплоть до 4й петли [M. Alfimov and A. Litvinov, 2022]

$O(4)$ сигма-модель. Однопетлевое уравнение ренормгруппы

Исходная метрика, дающая решение в лидирующем порядке

$$G_{ij} = \frac{2\kappa}{\hbar} \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Разложение метрики по степеням $\hbar$:

$$\widetilde{G}_{ij} = G_{ij} + G^{(0)}_{ij} + G^{(1)}_{ij} + G^{(2)}_{ij} + G^{(3)}_{ij} + \dots,$$

где $G^{(n)}_{ij}$ имет размерную характеристику $\hbar^n$.

Двухпетлевой случай. Специальный вид поправки

Искали в виде

$$G^{(0)}_{ij} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили

$$2f(r)\hbar(\kappa^2 r^4 - 1) = \beta^{(1)}_{22}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1}\beta^{(1)}_{11}(G^{(0)}),$$

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V^{(1)}_r + 2V^{(1)}_r \Gamma^r_{rr}{}^{(0)} + 2V^{(0)}_r \Gamma^r_{rr}{}^{(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)},$$

но система не совместна.

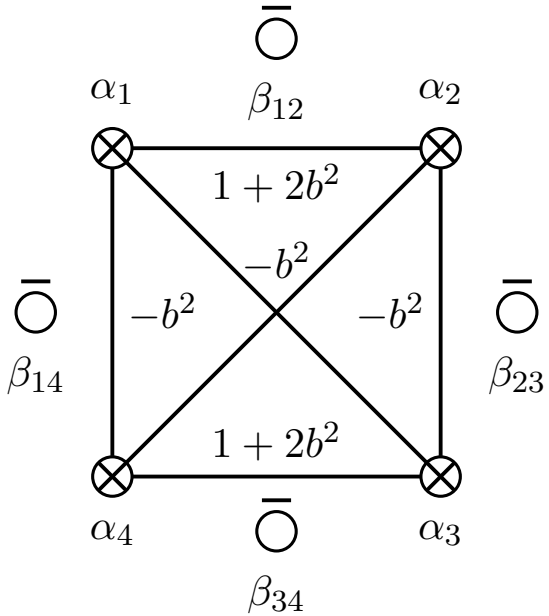
Скрининг-заряды $O(4)$ сигма-модели

Следуя [V. Fateev, 1996], приведем метрику к виду

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 + \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_2\right)^2$$

$$+ e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{-\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 - \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_3\right)^2 + O\left(e^{2t}\right),$$

где $b = b(\hbar)$. Диаграмма скрининговых зарядов:



Двухпетлевой случай. Ультрафиолетовый предел

Координаты (x_1, x_2, x_3), где метрика в UV имеет данный вид:

$$\begin{cases} r = 1 + a \cdot e^{-x_1} e^t \\ \theta = \frac{x_2}{2} + b \cdot e^{-x_1} e^t \\ \phi = \frac{x_3}{2} + c \cdot e^{x_1} e^t \end{cases},$$

где a, b, c - константы. Исходная метрика раскладывается по степеням e^t в UV пределе ($t \to -\infty$), метрика со скининг-зарядами - по степеням $\hbar$ [V. Fateev, 1996]

e^t \ $\hbar$	0	1
0	+	+
1	+	?

Это дает возможность найти вторую поправку по $\hbar$

Результаты и дальнейшие цели

В данной работе изучалась деформированная нелинейная $O(4)$ сигма-модель. Найдена метрика, дающая решение в однопетлевом случае. Для нахождения решения в двухпетлевом случае найдена соответсвующая система координат, метрика в которой раскладывается по всем степеням $\hbar$.
Дальнейшая работа заключается в подсчете соответствующих поправок.

Спасибо за внимание!

Вид метрики $O(4)$ сигма-модели в UV

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\hbar}\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\hbar}e^{t}\left(A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_1}\right) + \ldots,$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \qquad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ -b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$