

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.1

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ДИНАМИКА НЕСФЕРИЧЕСКИХ ДОМЕННЫХ
СТЕНОК

Научный руководитель
(к.ф.-м.н., доцент)

_____ В. В. Никулин

Студент

_____ И. Д. Летягин

Москва 2025

Содержание

Введение	3
1 Мотивация	4
2 Описание доменных стенок	5
3 Постановка задачи и вариант её решения	7
3.1 Постановка задачи	7
3.2 Поверхностное описание динамики	7
4 Заключение	9
A Дополнительный вариант: Гидродинамический подход	10

Введение

Один из наиболее актуальных вопросов в современной космологии заключается в описании модели зарождения первичных чёрных дыр (ПЧД). Гипотезы о механизме формирования ПЧД в ранней Вселенной были предложены в работах [1, 2]. Исследования в этой области тесно связаны с проблемой тёмной материи. Предположительные способы зарождения ПЧД в ранней Вселенной:

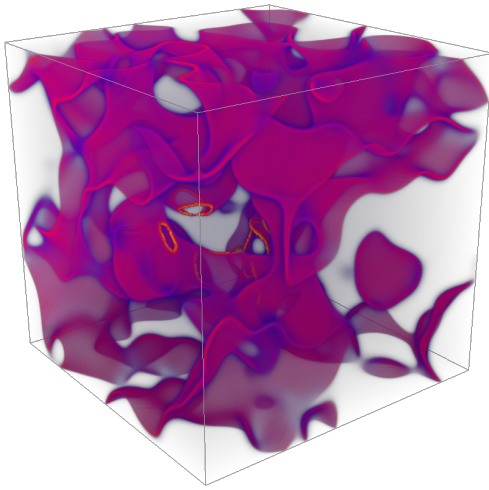
1. Коллапс полевых доменных стенок [3], образованных в ходе нарушения калибровочной симметрии вследствие охлаждения Вселенной [4, 5]
2. Коллапс полевых доменных стенок, образованных из-за квантовых флуктуаций вакуума [6, 7].
3. Формирование из первичных неодородностей материи.

Цель данной работы заключается в нахождении способа описания динамики доменной стенки, обладающей сложной геометрией, с целью дальнейшего математического моделирования процессов в ранней Вселенной и создания теоретического спектра масс ПЧД, который будет сравниваться с экспериментальными данными.

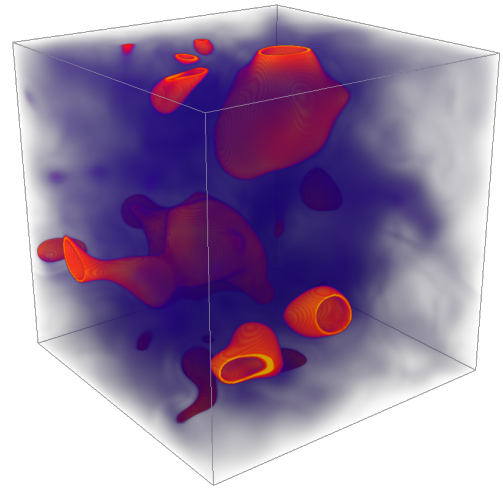
1 Мотивация

Одна из самых перспективных теорий, описывающих процесс образования ПЧД в ранней Вселенной, заключается в коллапсе массивных полевых доменных стенок. Обнаружение ПЧД и исследование их характеристик поможет получить ответы на ряд важнейших вопросов в современной теоретической физике, а именно обнаружить излучение Хокинга, пролить свет на процессы, происходившие во время формирования крупномасштабной структуры Вселенной, проверить теории о существовании дополнительных измерений [8, 9] и тёмной материи.

Главная проблема в описании динамики доменных стенок заключается в сложности работы с нетривиальными топологиями. В ранних исследованиях предполагалось, что стенки имеют сферическую структуру, которая позволяет достаточно просто описать эволюцию системы [10], но в процессе компьютерной симуляции получают стенки с геометрией, которая намного сложнее сферы [11]. Этот факт затрудняет расчёты динамики структуры численными методами. Научный интерес вызывает вопрос возможности коллапса заданной, например, во время моделирования, доменной конфигурации.



(а) Компьютерная модель «солитонной пены»



(б) Компьютерная модель «доменных пузырей»

Рис. 1: Результаты компьютерного моделирования

Будущие результаты исследования нужны для сравнения спектра масс чёрных дыр, предсказанного теорией в [6], с реальными данными, которые получают из современных детекторов гравитационных волн, например, в экспериментах LIGO, VIRGO, GEO600, TAMA 300 и LISA.

2 Описание доменных стенок

Будем рассматривать систему с действием:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (1)$$

В соседних областях вакуум может иметь различные знаки, что описывается ϕ^4 -потенциалом, с простейшим видом:

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (2)$$

Данный полиномиальный потенциал выделяется тем, что он имеет два минимума, то есть два классических вакуума $\phi^{vac} = \pm v$. Максимум между вакуумами и есть модель полевой доменной стенки.

Из принципа наименьшего действия получается уравнение поля – уравнение Клейна-Гордона:

$$\phi_{,\mu}{}^\mu + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3) для потенциала (2) с условиями, что $V(\phi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \pm\infty$ и $\dot{\phi} = 0$, является простейшим топологическим солитоном – кинком:

$$\phi(r) = v \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (r - r_0)\right) \quad (4)$$

Причём выражение (4) верно, если доменная стенка имеет бесконечно малую толщину (приближение тонкой стенки)¹.

Для дальнейшего вычислений полезно найти общий вид тензора энергии-импульса доменной стенки с действием (1). Общая формула для нахождения ТЭИ в симметризованном виде [12] задаётся как:

$$T_{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^i \phi)} \partial_k \phi - \mathcal{L} g_{ik} \quad (5)$$

ТЭИ для доменной стенки имеет вид:

$$T_{ik} = \partial_i \phi \partial_k \phi - g_{ik} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (6)$$

¹Далее рассматриваем доменную стенку только в приближении тонкой стенки и в тех временных интервалах, где оно применимо

Для тонкой сферической доменной стенки ТЭИ в явном виде имеет вид²:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad (7)$$

Из (7) следуют уравнения состояния (связь плотности энергии с давлениями):

$$p_{\parallel} = -\rho \quad (8)$$

$$p_{\perp} = 0 \quad (9)$$

Полученные соотношения примечательны тем, что нормальное давление нулевое, а касательные напряжения равны плотности энергии с обратным знаком. Для релятивистской идеальной несжимаемой жидкости уравнение состояния $p_{\parallel} = p_{\perp} = \rho/3$ отличается от онного для стенки наличием изотропии давлений жидкости.

²Здесь и далее рассматривается система координат, сопутствующая доменной стенке, то есть система координат, в которой стенка покоится

3 Постановка задачи и вариант её решения

3.1 Постановка задачи

Мы рассматриваем полевое уравнение (3) для ϕ^4 -потенциала. Так как нас интересует поведение доменной стенки, то поставим граничное условие $\phi = 0$, которое и задаёт расположение доменной стенки.

В ходе компьютерной симуляции инфляционных квантовых флуктуаций порождается первичная полевая конфигурация [11], которая *in silico* представляет собой набор точек, описывающихся набором координат. Мы хотим узнать эволюцию геометрии исходной конфигурации со временем.

Рассматриваемый ранее путь решения поставленной задачи – дискретизация полевого уравнения Клейна-Гордона (3) и последующее решение численными методами. Главная проблема данного подхода заключается в невероятно большом числе запоминаемой информации на каждом временном шаге симуляции, а вычислительные мощности ограничены доступным объёмом оперативной памяти. Поэтому возникают ограничения на размеры регионов для симуляции, которые не позволяют рассматривать космологически значимые области пространства.

3.2 Поверхностное описание динамики

Рассмотрим уравнение колебаний мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad (10)$$

где функция $u = u(x, y)$ означает смещение мембраны в направлении, перпендикулярном осям Ox и Oy , а Δ – оператор Лапласа.

Далее перейдём к описанию динамики поверхности в трёхмерном пространстве, описываемой радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Тогда волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = a^2 \Delta_N \vec{r} \quad (11)$$

где Δ_N – оператор Лапласа-Бельтрами, который является обобщением действия лапласиана на поверхности. Оператор Лапласа-Бельтрами в общем виде выглядит так:

$$\Delta_N f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right) \quad (12)$$

Для действия оператора Лапласа-Бельтрами существует теорема [13]:

Теорема 3.1 (Теорема Вейерштрасса). *Пусть задана вектор-функция ϕ на ориентированной поверхности. Тогда для оператора Лапласа-Бельтрами от этой функции верно, что*

$$\Delta_N \phi = 2H\vec{n} \quad (13)$$

С учётом теоремы, наше уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = 2H\vec{n} = \Delta_N \vec{r} \quad (14)$$

Для решения уравнения (14) аналитическими методами надо изначально провести триангуляцию исходного массива точек, например, с помощью Delaunay Triangulation [14] (триангуляции Делоне) или Ball Pivoting Algorithm [15]. Имея массив всех вершин треугольников (собственно, исходный массив) и массив всех граней из триангуляции, можно посчитать нормальную среднюю кривизну ($\vec{H} = \Delta \vec{r}/2$) в каждой вершине v_i по формуле котангенсов [16]:

$$\Delta \vec{r}(v_i) = \frac{1}{2S_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} (ctg \alpha_{ij} + ctg \beta_{ij})(\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_i)) \quad (15)$$

В формуле (15) S_i обозначает площадь смешанной клетки Вороного вокруг вершины v_i . Пусть вершина v_i лежит в нескольких треугольниках, тогда S_i можно найти по формуле:

$$S_i = \frac{1}{8} \sum_{v_i \in \Delta_{ijk}} (||v_j - v_i||^2 ctg \angle v_k + ||v_k - v_i||^2 ctg \angle v_j) \quad (16)$$

Суммирование в (15) происходит по всем вершинам v_j таким, что между v_i и v_j лежит только одно ребро. Углы α_{ij} и β_{ij} опираются на ребро, соединяющее вершины v_i и v_j . Чтобы найти котангенсы в формулах (15) и (16) можно использовать формулу:

$$ctg \angle v_k = \frac{\langle \vec{r}_i - \vec{r}_k, \vec{r}_j - \vec{r}_k \rangle}{||(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k)||} \quad (17)$$

Для оптимизации вычислений полезно ввести матричное вычисление лапласиана на сетке [17]. Пусть $w_i = 1/2A_i$, $w_{ij} = ctg \alpha_{ij} + ctg \beta_{ij}$. Тогда имеем

$$\Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta \vec{r}(v_1) \\ \vdots \\ \Delta \vec{r}(v_m) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \vec{r} \quad (18)$$

где оператор $\mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{M}$, $\mathbf{D} = \text{diag}(w_1, \dots, w_m)$ – весовая матрица, $\mathbf{M}$ – разреженная симметричная матрица:

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} -\sum_{v_k \in N_1(v_i)} w_{ik}, & i = j \\ w_{ij}, & v_j \in N_1(v_i) \\ 0, & \text{в иных случаях} \end{cases} \quad (19)$$

Последний шаг – дискретизация уравнения (14). Прямая дискретизация будет приводить к образованию сингулярностей, которые не имеют физического смысла. В статье [18] предложен вид дискретизации на шаге h , который носит название конформный поток средней кривизны (сMCF)³:

$$(\mathbf{D}_t^{-1} - h\mathbf{M}_0)\vec{r}_{t+h} = \mathbf{D}_t^{-1}\vec{r}_t \quad (20)$$

Так как методы, связанные с вычислением лапласиана на треугольной сетке, широко применяются в современной инженерии, то существует множество готовых библиотек и инструментов для обчёта лапласиана Котана и весовых матриц, например, библиотеки libigl [19] и Geometry Central [20], написанные на C++ и имеющие Python-биндинги.

Текущие задачи на исследование – написать симуляцию поверхности доменной стенки и сравнить её результаты с моделированием полевого уравнения

4 Заключение

В течение семестра были рассмотрены возможные пути решения задачи и был найден перспективный путь развития дальнейшего исследования. Также были изучены различные характеристики доменных стенок, численные методы, применяемые в исследовании временных эволюций сложных динамических систем, были углублены знания в области теории поля, общей теории относительности, дифференциальной геометрии и гидродинамики.

В последующем будет проводиться решение поставленной задачи, будет написана симуляция динамики доменной стенки через моделирование треугольной сетки.

³Данное уравнение выведено для уравнения с производной первого порядка по t , для уравнения (14) необходимо провести модификацию

А Дополнительный вариант: Гидродинамический подход

Из-за того, что эволюция доменной стенки вызвана поверхностным натяжением, минимизирующим площадь структуры, задача похожа на эволюцию обычного мыльного пузыря в вакууме. Поэтому следующий логический шаг – рассмотреть доменную стенку как гидродинамическую систему.

Основным методом описания эволюции гидродинамических систем является гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed particle hydrodynamics) [21]. SPH широко применяется в космофизике для изучения образования протопланетарных дисков, аккреции вещества звёздами и чёрными дырами и т.д. Главным фреймворком в этой области является Phantom [22], который содержит модуль для описания динамики пыли и/или газов под действием различных сил [23]. Если рассматривать доменную стенку как набор ”частиц”, которые движутся под действием сил поверхностного натяжения, то изложенный выше метод выглядит крайне перспективным.

Но мы сталкиваемся с рядом проблем, которые не позволяют достаточно просто использовать пылевое описание стенки:

1. Стенка – полевая структура с постоянной толщиной, а ”пылевой пузырь” увеличивает свою толщину во время сжатия из-за сохранения числа частиц.
2. Стенка имеет разительно отличающееся уравнение состояния по сравнению с обычными гидродинамическими системами.
3. Стенка – релятивистский объект, а в пылевой динамике используется нерелятивистский предел.

Из-за изложенных выше пунктов становится понятно, что использование методов SPH без сложных гидродинамических модификаций невозможно.

Для идеальной изотропной несжимаемой релятивистской жидкости⁴ известен ТЭИ [24]:

$$T^{ik} = (\rho + p)u^i u^k - pg^{ik} \quad (21)$$

Существует модификация данного выражения для случая анизотропной жидкости [25], которая, например, используется в магнитодинамике жидкостей или в описании джетов от квазаров. Данный вид ТЭИ отличается от (21) наличием 4-вектора анизотропии, который выделяет направление анизотропии. ТЭИ для идеальной анизотропной несжима-

⁴Причём жидкость рассматривается как сплошное тело [12]

емой релятивистской жидкости [26]:

$$T^{ik} = (\rho + p_{\parallel})u^i u^k - p_{\perp} g^{ik} + (p_{\perp} - p_{\parallel})\chi^i \chi^k \quad (22)$$

Существовало предположение, что приравняв ТЭИ доменной стенки (6) к ТЭИ анизотропной жидкости (22), можно будет явно выделить зависимость скорости движения стенки от потенциала поля, что позволило бы перейти от описания стенки через потенциал поля к описанию через координаты. Но уравнение состояния для стенки зануляет слагаемые в ТЭИ, которые выражают скорость, что не позволяет использовать и этот метод.

Плюсы метода:

1. Существует множество программ для симуляции жидкости.

Минусы метода:

1. Изложенные выше методы не работают, а их модификация требует углубление в редкие случаи релятивистской гидродинамики.

Список литературы

- [1] S. Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. Mon. Not. R. Astron. Soc., 168:399–416, 1974.
- [2] Y. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model. Sov. Astron., 10:602, 1967.
- [3] Jaume Garriga, Alexander Vilenkin, and Jun Zhang. Black holes and the multiverse. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016(02):064–064, February 2016.
- [4] A. D. Linde. Elementary particle physics and inflationary cosmology. Nauka, 1990.
- [5] Kohei Fujikura, Mairi Sakellariadou, Michiru Uwabo-Niibo, and Masahide Yamaguchi. Formation of defects associated with both spontaneous and explicit symmetry breaking, 2024.
- [6] S. G. Rubin, A. S. Sakharov, and M. Yu. Khlopov. The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 92(6):921–929, June 2001.
- [7] Konstantin M. Belotsky, Vyacheslav I. Dokuchaev, Yury N. Eroshenko, Ekaterina A. Esipova, Maxim Yu. Khlopov, Leonid A. Khromykh, Alexander A. Kirillov, Valeriy V. Nikulin, Sergey G. Rubin, and Igor V. Svadkovsky. Clusters of primordial black holes. The European Physical Journal C, 79(3), March 2019.
- [8] Arkady A. Popov, Sergey G. Rubin, and Alexander S. Sakharov. Primordial black holes from spatially varying cosmological constant induced by field fluctuations in extra dimensions. Universe, 10(4):166, March 2024.
- [9] Valery V. Nikulin, Maxim A. Krasnov, and Sergey G. Rubin. Compact extra dimensions as the source of primordial black holes, 2022.
- [10] Jean-Guy Caputo, Tomasz Dobrowolski, Jacek Gatlík, and Panayotis G. Kevrekidis. Radial kinks in a schwarzschild-like geometry, 2024.
- [11] A.A. Kirillov, B.S. Murygin, and V.V. Nikulin. Soliton foam formation in the early universe. Physics Letters B, 860:139201, January 2025.
- [12] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. Теория поля, volume 2 of Теоретическая физика. Физматлит, Москва, 8 edition, 2003.

- [13] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. Minimal surfaces. In Minimal Surfaces I, volume 295 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, pages 53–88. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [14] SciPy Community. `scipy.spatial.delaunay` — `scipy v1.13.0` manual, 2024. Official documentation of SciPy.
- [15] pymeshlab Developers. `pymeshlab` documentation, 2023. Official documentation of the `pymeshlab` library.
- [16] Ulrich Pinkall and Konrad Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. Experimental Mathematics, 2, 11 1996.
- [17] Maria Duarte and Leonardo Sacht. Mean curvature flow and applications. page 4, 10 2017.
- [18] Michael Kazhdan, Jake Solomon, and Mirela Ben-Chen. Can mean-curvature flow be modified to be non-singular? Eurographics Symposium on Geometry Processing, 31(5), 2012.
- [19] Alec Jacobson, Daniele Panozzo, et al. libigl: A simple c++ geometry processing library. <https://libigl.github.io/>, 2023. Version 2.5.0.
- [20] Nicholas Sharp, Keenan Crane, et al. Geometry central: A modern c++ library for geometry processing. <https://geometry-central.net/>, 2023. Version 1.0.0.
- [21] Joseph Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. Reports on Progress in Physics, 68:1703, 07 2005.
- [22] Daniel J. Price et al. Phantom: A smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code for astrophysics. Publications of the Astronomical Society of Australia, 35, 2018.
- [23] Daniel J. Price and Guillaume Laibe. A fast and explicit algorithm for simulating the dynamics of small dust grains with smoothed particle hydrodynamics. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 451(1):813–826, May 2015.
- [24] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. Гидродинамика, volume 6 of Теоретическая физика. Наука, Москва, 1986.
- [25] Fábio S. Bemfica, Mauricio Martinez, and Masoud Shokri. Causality and stability in first-order conformal anisotropic hydrodynamics. Physical Review D, 108(5), September 2023.
- [26] Thiago S. Pereira and Davincy T. Pabon. Extending the Λ CDM model through shear-free anisotropies. Modern Physics Letters A, 31(21):1640009, July 2016.