

Динамика несферических доменных стенок

Летягин Иван Дмитриевич

Научный руководитель: к.ф.-м.н, доц., Никулин В.В.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Отчёт о научно-исследовательской работе

Москва, 27 мая 2025 г.

Первичные чёрные дыры (ПЧД)

Ещё в 1967 году Зельдович Я.Б. и Новиков И.Д. выдвинули гипотезу о существовании первичных чёрных дыр, но до сих пор они не были обнаружены.

Эксперименты, направленные на поиск ПЧД: LIGO, VIRGO, GEO600, TAMA 300 и проекты LISA, NANOGrav.

Рассматриваемая теория образования ПЧД – коллапс полевых доменных стенок.

Главное отличие ПЧД от классических чёрных дыр заключается в крайне широком спектре масс ПЧД.

Доменная стенка — топологический солитон, образованный в процессе спонтанного нарушения калибровочной симметрии из-за квантовых флуктуаций поля в инфляционный период. Она располагается между двумя соседними минимумами поля.

Действие

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (1)$$

ϕ^4 -потенциал

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (2)$$

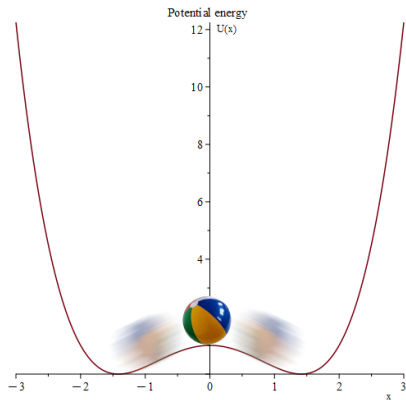


Рис.: Падение в один из минимумов из-за квантовых флуктуаций



Рис.: Минимумы разных знаков в пространстве

Эволюция полевой доменной стенки задаётся полевым уравнением:

Уравнение Клейна-Гордона

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Стоит обратить внимание, что движение доменной стенки в рассматриваемой модели вызвано силами поверхностного натяжения.

Тензор энергии-импульса доменной стенки

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad (4)$$

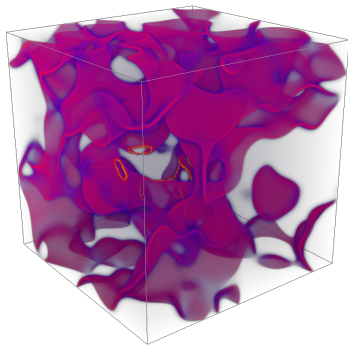


Рис.: «Солитонная пена»

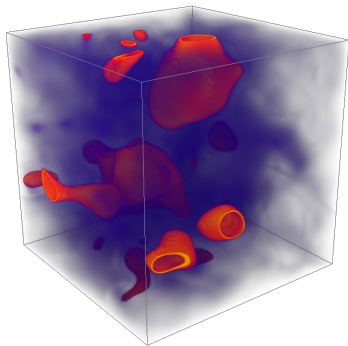


Рис.: «Доменные пузыри»

Непосредственное численное решение полевого уравнения в трёхмерном пространстве является вычислительно сложной задачей, требующей хранения в оперативной памяти $O(N^3)$ данных, где N – это линейный размер сетки. Из-за этого невозможно симулировать большие объёмы пространства ($N > 1000$), что необходимо для симуляции кластеров доменных стенок.

Метод описания доменной стенки как тонкой мембраны (а не трёхмерного поля, которое её образует) решает данную проблему, так как сложность по памяти сокращается до $O(N^2)$, что позволяет моделировать гораздо большие пространственные объёмы.

Цель: Найти и реализовать неполевой способ численного расчёта эволюции доменной стенки через динамику тонкой мембраны.

"Поверхностное" уравнение

Рассмотрим уравнение колебаний мембраны:

Описание движения поверхности мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad (5)$$

где $u = u(x, y)$ - смещение мембраны вдоль направления, перпендикулярного осям Ox и Oy

Уравнение движения доменной стенки

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = a^2 \Delta_N \vec{r} \quad (6)$$

где Δ_N – оператор Лапласа-Бельтрами, $\Delta_N f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right)$
 $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор точки на доменной стенке

Оператор Лапласа-Бельтрами на треугольной сетке

Дискретизация оператора Лапласа-Бельтрами:

Оператор Лапласа-Бельтрами на треугольной сетке

$$\Delta_N \vec{r}(v_i) = \frac{1}{2S_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} (\operatorname{ctg} \alpha_{ij} + \operatorname{ctg} \beta_{ij})(\vec{r}(v_j) - \vec{r}(v_i)) \quad (7)$$

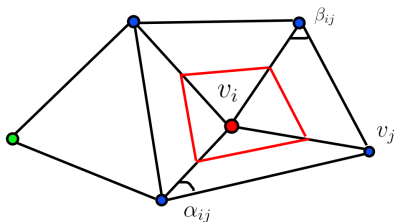


Рис.: Принцип численного вычисления оператора

Заключение

В течение семестра был найден возможный путь решения поставленной задачи – найти и реализовать неполевой способ численного расчёта эволюции доменной стенки через динамику тонкой мембраны.

Найденный метод заключается в численном решении уравнения $\vec{r}_{tt} = a^2 \Delta_N \vec{r}$, которое моделирует движение поверхности доменной стенки.

Задачи:

- 1 Написать модель динамики поверхности доменной стенки через дискретизацию оператора Лапласа-Бельтрами на треугольной сетке
- 2 Сравнить полученные результаты с полевой симуляцией
- 3 Получить спектр масс ПЧД, возникающих при коллапсе несферических доменных стенок в кластере

Приложение 1. Расчёт параметров в дискретном операторе Лапласа-Бельтрами

- ❶ Площадь смешанной клетки Вороного:

$$S_i = \frac{1}{8} \sum_{v_i \in \Delta_{ijk}} (\|v_j - v_i\|^2 \operatorname{ctg} \angle v_k + \|v_k - v_i\|^2 \operatorname{ctg} \angle v_j) \quad (8)$$

- ❷ Котангенсы углов в триангуляции:

$$\operatorname{ctg} \angle v_k = \frac{\langle \vec{r}_i - \vec{r}_k, \vec{r}_j - \vec{r}_k \rangle}{\|(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k)\|} \quad (9)$$