

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ИЗУЧЕНИЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ
ОПИСАНИЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ
ИЗОЛИРОВАННОГО ТЕМНОГО АТОМА С УЧЕТОМ
КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА ЯДРА

Научный руководитель

д.ф.-м.н, проф.

_____ Хлопов М. Ю.

Научный консультант

_____ Сопин Д. О.

Студент

_____ Мвилама Д.

Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Предварительные рассуждения	4
2 Расчеты	6
2.1 Постановка задачи	6
2.2 Решение задачи и анализ	6
3 Анализ регулярного решения	8
4 Заключение	10
Список литературы	11

ВВЕДЕНИЕ

Убедительные доказательства существования скрытой массы проявляются в поведении галактик, гравитационном линзировании и анизотропии космического микроволнового фонового излучения. Эти данные указывают на то, что скрытая масса не является барионной. Обсуждаются различные кандидатуры на ее роль. К ним относятся слабо взаимодействующие массивные частицы (WIMPs), суперсимметричные частицы (SUSY) и другие подобные кандидаты. Отсутствие положительных результатов поиска WIMPs и суперсимметричных частиц на Большом адронном коллайдере (БАК) делают интересным вопрос о других возможных кандидатах на роль скрытой массы. В данной работе мы исследуем квантово-механическое описание структуры темных атомов.

Темный атом представляет собой связанное состояние нового тяжелого лептона X^{-2n} и n ядрами ${}^4\text{H}$ [1]. Как показано в этой статье, модель может объяснить парадоксы поиска частиц скрытой массы в подземных экспериментах. Свойства темных атомов определяются их структурой, анализ которой и является целью настоящей работы.

Цель: В этой работе мы изучаем квантовое описание темного атома в случае OHe , принимая во внимание конечный размер ядра гелия. Атом OHe напоминает модель атома Бора с тяжелой O^{2-} частицей в центре и ядром гелия (He^{2+}), связанным в орбите вокруг этой O^{2-} частицы. Этот подход вдохновлен работой профессора Окса с альтернативной формой атомов водорода (АНА), в которой он рассматривал сингулярные решения атомов водорода и учитывал конечный размер ядра для получения нормируемого решения основного состояния атома водорода [2].

Задачи:

- Решить стационарное уравнение Шредингера для изолированного атома Оне с учетом конечного размера ядра гелия.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Известно, что существует два класса решений уравнения Шредингера, моделирующих движение в центрально-симметричном поле[2][3]. Эти два решения характеризуются различным поведением при малых r :

$$R(r) \approx r^l \quad \text{обычное решение} \quad (1)$$

и

$$R(r) \approx \frac{1}{r^{l+1}} \quad (2)$$

интеграл нормализации которого $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr$ явно сходится для $l = 0$. Единственной причиной отказа от второго решения (2) является то, что его интеграл нормализации расходится для $x \rightarrow \infty$. Профессор Окс показал, что, учитывая конечный размер нуклона и сопоставляя внутреннее решение с внешним сингулярным решением на границе нуклона, можно избавиться от этой проблемы нормализации. Кроме того, он привел два класса моделей потенциала взаимодействия внутри нуклона, использование которых позволяет обеспечить возможное совпадение решений на границе нуклона. Это:

$$\begin{cases} V_1(r) = -\left(\frac{Z\alpha}{R}\right) \exp\left[\frac{R-r}{b}\right], & 0 < b \ll R. \\ V_2(r) = -\left(\frac{Z\alpha}{R}\right) \frac{(R^m + b^m)}{(r^m + b^m)}, & m \geq 3, \quad 0 < b \ll R. \end{cases} \quad (3)$$

Используемые параметры

$$R = 1,6 \cdot 10^{-15}, \quad Z = 2, \quad b = 0,35 \cdot 10^{-15}, \quad m = 3 \quad (4)$$

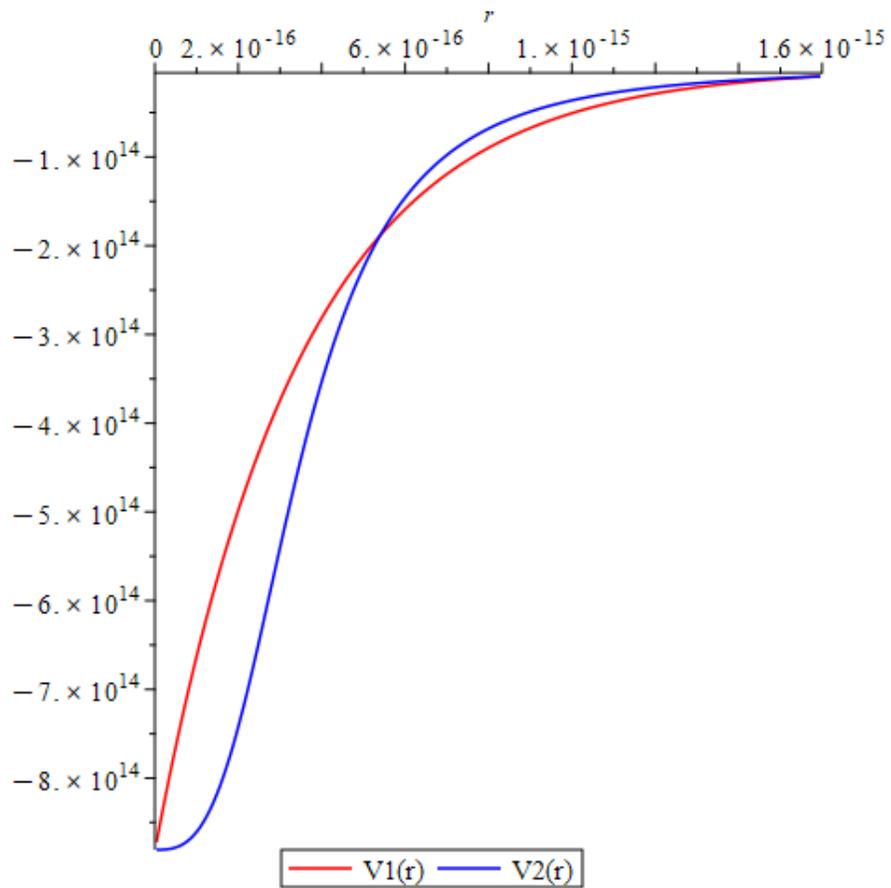


Рисунок 1 — потенциала взаимодействия внутри He^{2+}

2. РАСЧЕТЫ

2.1 Постановка задачи

Уравнение Шредингера может быть записано в сферической системе координат с центром, совпадающим с положением частицы He^{2+} частица, для области, внешней по отношению к ядру гелия ($|\vec{r}| > R_{(\text{He}^{2+})}$) и для области, расположенной внутри ядра гелия ($|\vec{r}| < R_{(\text{He}^{2+})}$) следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{H}_0 \Psi_{\text{I}} = E_{0(\text{He})} \Psi_{\text{I}}, & |\vec{r}| > R_{(\text{He}^{2+})}, \\ \hat{H} \Psi_{\text{II}} = E_{0(\text{He})} \Psi_{\text{II}}, & |\vec{r}| < R_{(\text{He}^{2+})} \end{cases} \quad (5)$$

а гамильтонианы \hat{H}_0 и \hat{H} имеют вид:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{O}^-}} \Delta - \frac{4e^2}{r}, \quad (6)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{O}^-}} \Delta - \frac{4\alpha}{R_{(\text{He}^{2+})}} e^{\left(\frac{R_{(\text{He}^{2+})} - r}{b}\right)} \quad (7)$$

2.2 Решение задачи и анализ

Вид потенциала взаимодействия в гамильтониане (6), указанный в (3). Случай с $|\vec{r}| > R_{(\text{He}^{2+})}$ аналогичен атому водорода и имеет свое радиальное уравнение[3]:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{4e^2}{r} + E \right) R(r) = 0. \quad (8)$$

После приведения уравнения для внешней волновой функции в нашей системе [1] к одномерному радиальному уравнению с безразмерным параметром $\rho = r/a$ и функцией $V(\rho) = R(r)/r$ в соответствии со стандартной процедурой задача была решена таким же образом, аналогично решению обычного

внешнего решения, получаем:

$$\begin{cases} V(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \sim c\rho^{-l} \\ V(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \sim \rho^n e^{-\alpha\rho} \end{cases}$$

$$V(\rho) = \rho^{-l} \left(\sum_{k=0}^{n_r} b_k \rho^k \right) e^{-\alpha\rho}$$

$$b_{k+1} = \frac{2\alpha(k-l) - 8}{(k-l+1)(k-l) - l(l+1)} b_k$$

$$E = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0(n_r - l)^2}$$

$$R(r) = C_n r^{-(l+1)} \left(\sum_{k=0}^{n_r} \left(\frac{b_k}{b_0} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^k \right) e^{-\frac{Z}{n_r - l} \frac{r}{a}}$$

Действуя в соответствии со стандартной процедурой и определяя основное квантовое число $n = n_r - l$, мы понимаем, что требование неотрицательности как для l , так и для n_r подразумевает, что для наших значений l не существует верхней границы:

$$n_r \geq 0, n_r = n + l$$

$$n \geq -l \text{ for any } l$$

$$l \geq 0$$

Этот результат нефизичен. Также отметим, что это решение неверно даже для $l = 0$, как предложил профессор. Окс. В его случае параметры $l = 0$ и $n = 0$ приводят к бесконечно отрицательной энергии.

3. АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ

Внутреннее решение, использующее экспоненциальное потенциальное взаимодействие, было вычислено в Maple и имеет вид функции Бесселя. Это решение и обычное внешнее решение использовались для $l = 0$:

$$H_2(r) = c_2 \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot r}{a_0}\right)$$

были сопоставлены на границе, и результат нормализован для определения констант. Был получен следующий график для конечной радиальной волновой функции атома ОНе. Следует отметить, что волновая функция, рассчитанная в рамках этой процедуры, была волновой функцией всей системы ОНе с приведенной массой, приблизительно равной массе ядра гелия.

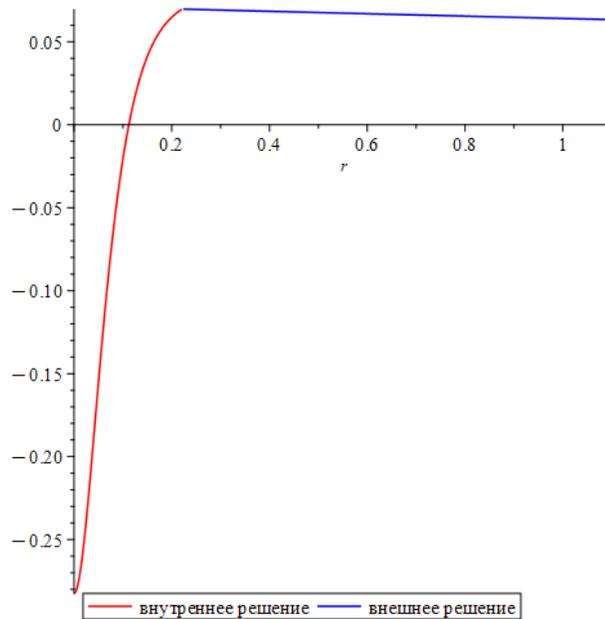


Рисунок 2 — ОНе-волновая функция

Волновая функция O^{2-} в поле He^{2+} не может быть вычислена с использованием текущего метода в `maple` из-за огромной массы лептона $m_{O^{2-}} \approx 2$. Но изменение формы волновой функции было изучено при изменении параметра массы, и было совершенно ясно, что в предельном случае волновая функция O^{2-} была близка к дельта-функции, которая находится точно на границе радиуса ядра He , что согласуется с уже известными исследованиями этого решения. На приведенном ниже графике показана волновая функция лептона, масса которого в 50 раз превышает массу ядра Гелия

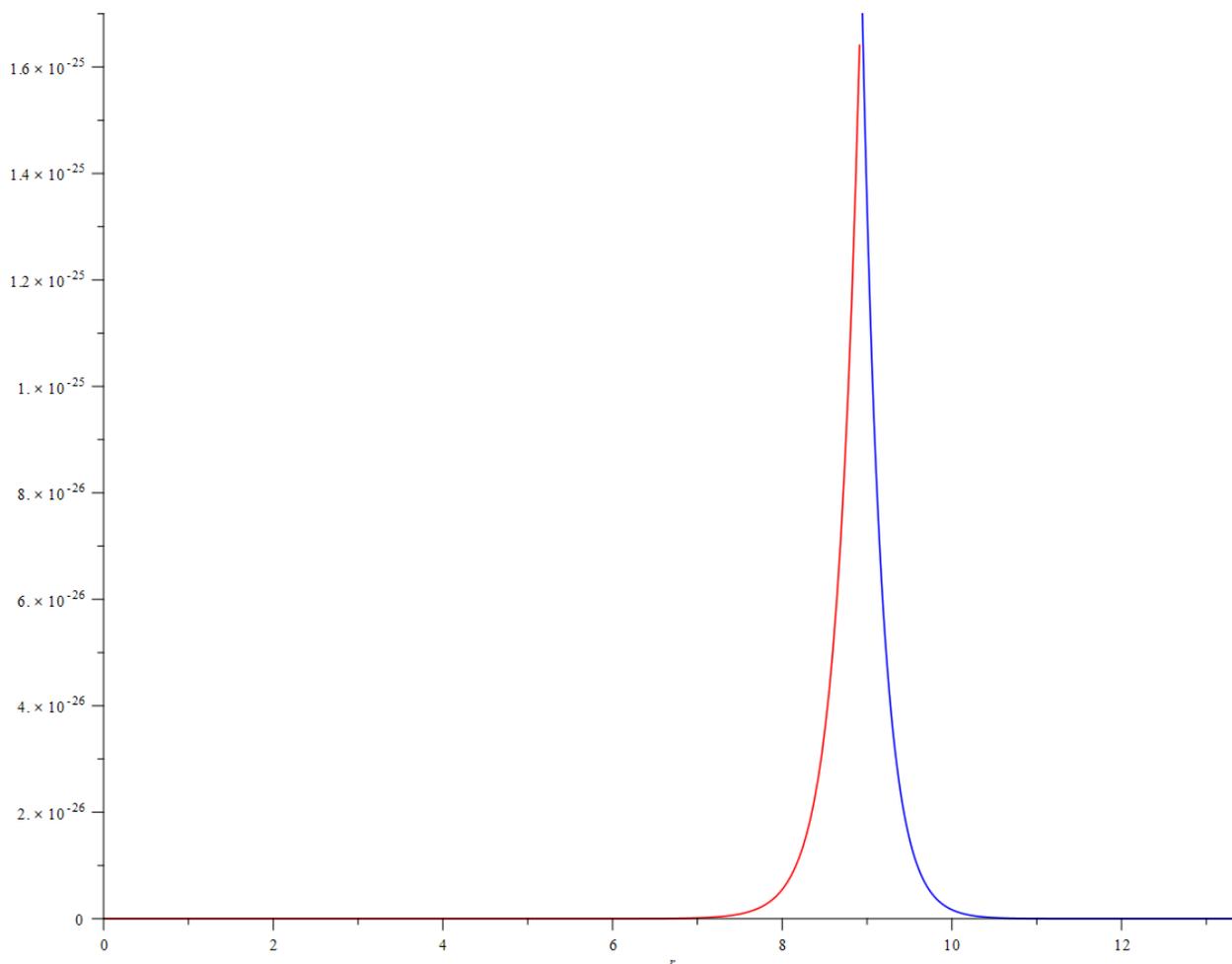


Рисунок 3 — OHe -волновая функция

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Попытка получить физически обоснованное сингулярное решение, следуя аналогии профессора Окса, не увенчалась успехом. Будет продолжена работа по получению квантово-механического описания темных атомов, объединяющего описание как боровских структур темного атома, так и структур, подобных структурам Томпсона, без необходимости проводить различие между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beylin, V.A.; Bikbaev, T.E.; Khlopov, M.Y.; Mayorov, A.G.; Sopin, D.O. Dark Atoms of Nuclear Interacting Dark Matter. Universe 2024, 10, 368. <https://doi.org/10.3390/universe10090368>
2. Oks, E. 2001: High-energy tail of the linear momentum distribution in the ground state of hydrogen atoms or hydrogen-like ions. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 34, 2235-2243
3. Landau L D and Lifshitz E M 1965 Quantum Mechanics (Oxford: Pergamon)
4. M. Khlopov, What comes after the Standard Model?, Progress in Particle and Nuclear Physics, Volume 116, 2021, 103824, ISSN 0146-641