

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
КИНКИ В КЛАССИЧЕСКИХ
СКАЛЯРНЫХ ДВУХПОЛЕВЫХ
МОДЕЛЯХ

Научный руководитель
д. ф.-м. н.

_____ В. А. Гани

Студент

_____ И. Н. Самощенко

Москва 2025

Содержание

1	Введение	3
1.1	О полевых моделях	3
1.2	Двухполевые модели, суперпотенциал	4
1.3	Комплексный суперпотенциал	5
1.4	Задание потенциала при заданных нулях и гармоническом суперпотенциале	7
1.5	Деформации двухполевых моделей	7
2	Примеры	8
2.1	Пример для корней из единицы любой целой кратности . .	8
2.2	Поиск решения при $k = 3$	8
2.3	Пример деформации потенциала с тремя вакуумами	10
2.4	Пример деформации потенциала с двумя вакуумами	12
3	Заключение	14

1 Введение

Кинки в $(1+1)$ -мерном пространстве возникают при рассмотрении доменных стенок. Разработка методов, позволяющих находить кинковые решения для данных потенциалов, является важной в этой области задачей.

В скалярных однополевых моделях размерности $1 + 1$ интегрирование уравнений движения сводится к простому интегрированию и поиску обратной функции. В многополевых моделях уравнения движения представляют из себя систему дифференциальных уравнений в частных производных, интегрирование которой в общем виде невозможно. Практически значимыми являются поиски методов, позволяющие интегрировать уравнения движения, и поиск ограничений на модели, позволяющих упростить вид уравнений.

Целью данной работы является поиск таких ограничений на потенциал двухполевых скалярных моделей в $1 + 1$ измерениях и нахождение явных решений конкретных моделей.

1.1 О полевых моделях

Рассмотрим теоретико-полевую модель с действительными скалярными полями $\phi_k(x, t)$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$ в $(1 + 1)$ -мерном пространстве-времени с потенциалом V определяющим взаимодействие полей. Динамика определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 \right] - V(\phi), \quad (1)$$

где $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^n$. Кинетической энергией называют $\frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)^2$, градиентной $\frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2$ и потенциальной $V(\phi)$. $V(\phi)$ — любая неотрицательная функция от ϕ , достигающая минимума нуля конечном или счетном числе точек g_k , $k > 0$. Уравнения Эйлера-Лагранжа в нашем случае имеют вид:

$$\square \phi_k = -\frac{\partial V}{\partial \phi_k}(x, t), \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Д'Аламбера. Солитонами называют определенные частные решения нелинейных волновых уравнений. Простейшим

случае солитона в $(1 + 1)$ измерениях является кинк — статическое решение уравнений поля, интерполирующее между значениями, соответствующими минимумам потенциала, когда x изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Нас интересуют решения с конечной энергией. Функционал энергии имеет вид:

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 \right] + V(\phi) \right\} \quad (3)$$

Легко проверяется, что динамические решения могут быть получены из статических путем преобразований Лоренца. Тогда удобно рассмотреть статический случай, для которого имеем:

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi_k}, \quad k = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right\} \quad (5)$$

1.2 Двухполевые модели, суперпотенциал

Рассмотрим случай двух полей ϕ, χ . И пусть потенциал V выражен через суперпотенциал W как:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (6)$$

где $W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}$, $W_\chi = \frac{\partial W}{\partial \chi}$. В терминах суперпотенциала энергию можно выразить как

$$E[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ W'_x + \frac{1}{2} (\phi_x - W_\phi)^2 + \frac{1}{2} (\chi_x - W_\chi)^2 \right\} \quad (7)$$

Из условия минимизации энергии получаем уравнения движения относительно W :

$$\begin{cases} \phi_x &= W_\phi, \\ \chi_x &= W_\chi. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда можно выразить энергию через суперпотенциал:

$$E[\phi, \chi] = |W(\phi(+\infty), \chi(+\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (9)$$

Данные уравнения первого порядка называются уравнениями Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (BPS), их решения называются BPS состояниями. Заметим, что в случае одного поля система состоит из единственного уравнения и легко интегрируется. Как и прежде, ϕ и χ должны стремиться к нулям V при стремлении x к $\pm\infty$. Отсюда получаем, что решение волнового уравнения задает некоторую кривую параметризованную $x \in \mathbb{R}$ на плоскости (ϕ, χ) , соединяющую минимумы V . Эту кривую также называют орбитой.

Выразим из уравнений движения dx , получим:

$$W_\phi d\chi - W_\chi d\phi = 0 \quad (10)$$

Данное уравнение задает функцию, линии уровня которой есть орбиты модели. Пусть решением этого уравнения будет функция F такая, что $\{(\phi, \chi) \in \mathbb{R}^2 | F = 0\}$ — орбита, соединяющая выбранную пару вакуумов потенциала (функция определена с точностью до аддитивной константы, поэтому линия уровня всегда может быть выбрана нулем).

1.3 Комплексный суперпотенциал

Особо просто уравнения движения решаются в случае, когда суперпотенциал есть гармоническая функция $\Delta W = 0$. По гармонической функции можно восстановить голоморфную функцию (которую назовем комплексным суперпотенциалом) $w = w(\phi, \chi) = w(z) = W + iM \in \mathcal{OC}$, $z = \phi + i\chi$, где M — сопряженная к W функция. Из условий Коши-Римана тогда получим, что потенциал V равен:

$$V = \frac{1}{2}(W_\phi^2 + W_\chi^2) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2}(W_\phi^2 + M_\phi^2) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2}|w'|^2 \quad (13)$$

Орбита является множеством нулей функции F . Сама функция F есть решение уравнения

$$W_\phi d\chi - W_\chi d\phi = 0 \quad (14)$$

$$\iff M_\chi d\chi + M_\phi d\phi = 0 \quad (15)$$

$$\iff dM = 0 \quad (16)$$

$$\iff M \equiv F \quad (17)$$

Т.е. F — сопряженная к W функция. Суперпотенциал определен неоднозначно для данного потенциала. Действительно,

$$V = \frac{1}{2}|w'|^2 \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2}|e^{i\alpha}w'|^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (19)$$

$$\widetilde{w} = e^{i\alpha}w \quad (20)$$

$$= \widetilde{W} + i\widetilde{M} \quad (21)$$

$$\implies \widetilde{W} = W \cos \alpha - M \sin \alpha, \quad w = W + iM \quad (22)$$

Уравнение орбиты определяется через суперпотенциал, т.е. для $\widetilde{W}$ получим целое параметрическое множество орбит. Но так как потенциал не чувствителен к сдвигу фазы, получаем, что $F \equiv \widetilde{W} + c$ для некоторых α, c . Т.е. орбиты — это линии уровня гармонических суперпотенциалов, задающих данный потенциал.

Пусть теперь дан потенциал и пара его вакуумов z_m, z_s , необходимо найти функцию $F = F(m, s; z)$ такую, что $F = 0$ — уравнение орбиты. Из условия $F(m, s; z_m) = F(m, s; z_s) = 0$ имеем:

$$F = F(m, s; z) = \operatorname{Re} e^{i\alpha}[w(z) + c] \quad (23)$$

$$c = -w(z_m), \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arg[w(z_s) + c] \quad (24)$$

Уравнения движения решаются в таком случае относительно суперпотенциала, сопряженного к F .

1.4 Задание потенциала при заданных нулях и гармоническом суперпотенциале

Пусть $V(\phi, \chi) = 0$ в точке (ϕ, χ) . Тогда:

$$V = 0 \iff W_\phi = W_\chi = 0 \quad (25)$$

$$\iff M_\chi = M_\phi = 0, \text{ где } M - \text{сопряженная к } W \quad (26)$$

$$\iff w' = 0, w = W + iM \quad (27)$$

Чтобы найти w' с нулями в заданных точках можно воспользоваться теоремой Вейерштрасса о заказных нулях (считаем, что нулей конечное число):

$$w' = e^h z^{A_0} \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{A_k}, \quad (28)$$

$$V = \frac{1}{2} |e^h z^m \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{A_k}|^2 \quad (29)$$

h — целая функция, a_k — нули функции, A_k, A_0 — порядки нулей. Если не накладывать никаких ограничений на потенциал V , то это окончательный ответ, но вообще говоря, w' — целая функция с существенной особенностью на бесконечности. По второй теореме Пикара отсюда следует, что функция стремится к нулю на бесконечности по некоторой последовательности точек. Если нас интересуют потенциалы *бесконечные на бесконечности*, то w' имеет на бесконечности лишь полюс, т.е. w' — многочлен, т.е. h константа. Отсюда получаем окончательный ответ:

$$V = L |z^{A_0} \prod_1^N \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{A_k}|^2, \quad L \in \mathbb{R}^+ \quad (30)$$

1.5 Деформации двухполевых моделей

Пусть потенциал задается квадратом модуля производной некоторой голоморфной функции w , как это делалось чуть выше: $V = \frac{1}{2} |w'(z)|^2, z = \phi + i\chi, w \in \mathcal{O}\mathbb{C}$ и пусть $z(x) = (\phi + i\chi)(x)$ — некоторое решение этой модели. Выберем деформирующую функцию $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что $f(\tilde{z}) = z$,

где $\tilde{z}$ — решение деформированной модели $\tilde{V} = \frac{1}{2}|\tilde{w}'|^2$ с комплексным суперпотенциалом $\tilde{w}$. Продифференцировав равенство $f(\tilde{z}(x)) = z(x)$ по x и выразив $\tilde{w}$ получим: $\tilde{w}' = \frac{w' \circ f}{f'}(\tilde{z})$.

2 Примеры

2.1 Пример для корней из единицы любой целой кратности

Рассмотрим потенциал вида

$$V = \frac{1}{2}|1 - z^k|^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (31)$$

$$\widetilde{W} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} \left(z - \frac{z^{k+1}}{k+1} + C \right); \quad \alpha \in [-\pi, \pi], \quad C \in \mathbb{C} \quad (32)$$

Минимумы данного потенциала располагаются в корнях из единицы степени k . Орбиты определяются суперпотенциалом $\widetilde{W}$ при заданных α, C . Нули орбиты должны проходить через два любых корня из 1. Т.к. $\widetilde{W}$ — вещественная часть комплексной функции, то она обращается в 0 в двух случаях: когда функция в корне из 1 равна 0 или когда ее вещественная часть равна 0 в другом таком корне. Из этих условий получим

$$\alpha = \frac{\pi}{k}(k - m - s) \quad (33)$$

$$C = e^{i\frac{2\pi s}{k}} \frac{k}{k+1} \quad (34)$$

$m, s \in \overline{1, k}$ — номера корней. Отсюда получаем общий вид уравнения орбиты:

$$F_k(m, s; \phi, \chi) \equiv \operatorname{Re} e^{i\frac{\pi}{k}(k-m-s)} \left(z - \frac{z^{k+1}}{k+1} - e^{i\frac{2\pi s}{k}} \frac{k}{k+1} \right) = 0 \quad (35)$$

2.2 Поиск решения при $k = 3$

Из уравнения (35) видно, что степень многочлена задающего орбиту имеет порядок $k+1$ для k корней. Для поиска кинковых решений требуется выразить из уравнения орбиты $\phi(\chi)$ либо $\chi(\phi)$ для последующей подстановки в уравнения движения и интегрирования, но уже для четырех

нулей возникает многочлен пятой степени, корни которого в общем случае не выражаются в радикалах.

Рассмотрим случай $k = 3$ для модели с нулями в корнях из единицы. Тогда:

$$w' = 1 - z^3 \quad (36)$$

$$F_3(1, 2; \phi, \chi) = -\frac{1}{4}\chi^4 + \frac{3}{2}\phi^2\chi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 + \phi + \frac{3}{8} \quad (37)$$

$$F_3(1, 2; \phi, \chi) = 0 \quad (38)$$

$$\Rightarrow \chi_{1,2} = \pm \sqrt{2\phi^2 - \sqrt{8\phi^4 + 4\phi + \frac{3}{2}}} \quad (39)$$

Где $F_3(1, 2; \phi, \chi)$ получена из формулы (35).

Из равенств (14) и далее имеем, что орбита получается приравниванием к нулю функции, сопряженной к суперпотенциалу, для которого были составлены уравнения движения, поэтому суперпотенциалом в данном случае будет

$$W = \chi - \phi^3\chi + \phi\chi^3 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (40)$$

$$W_\phi = -3\phi^2\chi + \chi^3 \quad (41)$$

$$(42)$$

Решая уравнение движения $\phi_x = W_\phi$, получим зависимость $x(\phi)$:

$$x(\phi) = \lim_{a \rightarrow \phi_0 - 0} \int_a^\phi d\zeta \frac{1}{-3\zeta^2\chi_{1,2}(\zeta) + \chi_{1,2}^3(\zeta)} \quad (43)$$

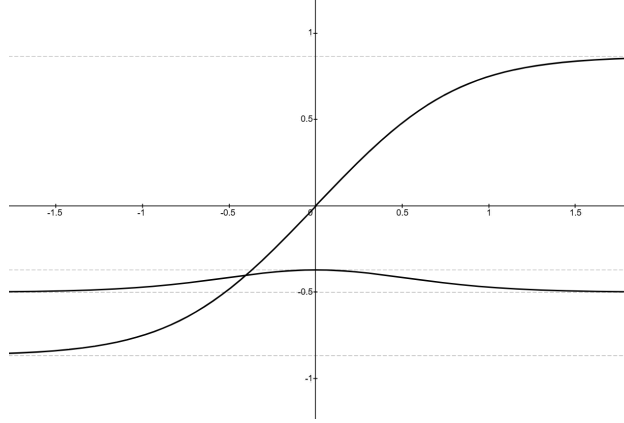
$$\phi(x) = x^{-1}(x) \quad (44)$$

$\phi_0 \approx -0.3703$ — меньший корень многочлена $\phi^4 - 4\phi - \frac{3}{2}$.

Тогда кинк $\chi(x)$ можно выразить параметрически:

$$(x(\phi), \chi_{1,2}(\phi)), \phi \in (-\frac{1}{2}, \phi_0) \quad (45)$$

Имеем одно кинковое решение. Оставшиеся два можно получить, домножив исходный комплексный кинк $\phi + i\chi$ на $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. На картинке изображены оба кинка, топологический $\chi(x)$, нетопологический — $\phi(x)$



2.3 Пример деформации потенциала с тремя вакуумами

К модели (37) применим деформацию $f = 1 - z^2$:

$$w' = 1 - z^3 \mapsto \frac{1}{2}(z^5 - 3z^3 + 3z) \quad (46)$$

Деформированный потенциал задается как

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}[\phi^2 + \chi^2] \cdot [(\phi + \alpha)^2 + (\chi + \beta)^2] \cdot [(\phi - \alpha)^2 + (\chi + \beta)^2] \cdot \quad (47)$$

$$\cdot [(\phi + \alpha)^2 + (\chi - \beta)^2] \cdot [(\phi - \alpha)^2 + (\chi - \beta)^2] \quad (48)$$

$$\alpha = 3^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}, \beta = 3^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad (49)$$

и имеет в таком случае пять нулей: $0, \pm' 3^{\frac{1}{4}} e^{\pm i \frac{\pi}{12}}$, где $\pm', \pm$ изменяются независимо. Найдем орбиты:

$$F = \text{Re } e^{i\alpha} \frac{1}{24} [2z^6 - 9z^4 + 18z^2 + C] \quad (50)$$

Имеем: $f^{-1} = \sqrt{1 - z}$ — обратная функция к деформирующей имеет две ветви. Три исходные орбиты перейдут в шесть деформированных

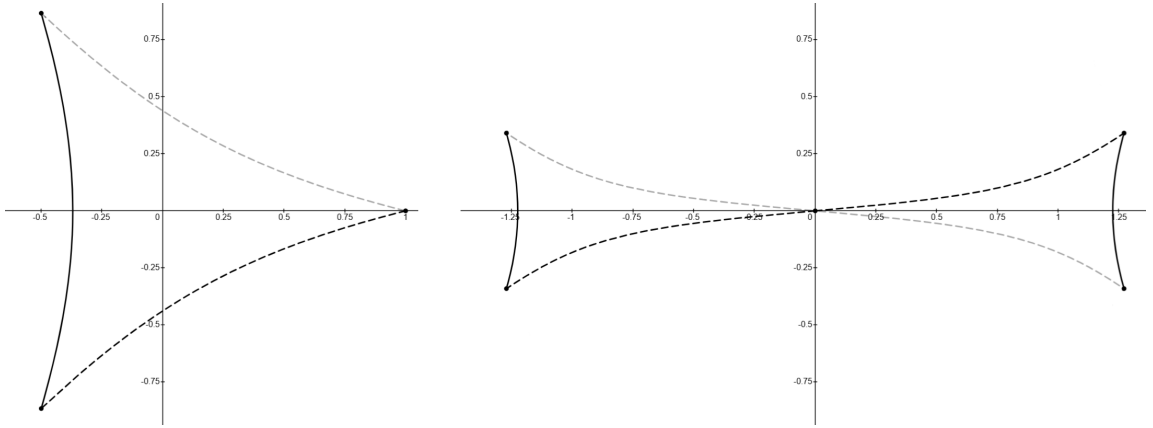


Рисунок 1 — Орбиты на плоскости $O_{\phi\chi}$ исходной модели (слева) и деформированной (справа). Стилем линии обозначено, какая орбита в какую пару переходит.

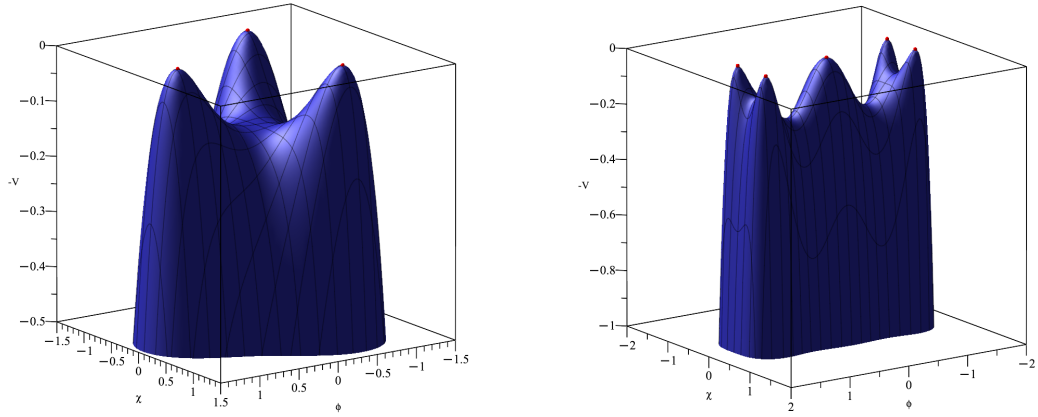


Рисунок 2 — Графики потенциалов $-V$ модели (37) до деформации (слева) и после (справа)

2.4 Пример деформации потенциала с двумя вакуумами

Пусть:

$$f = z^k, k \in \mathbb{N} : \quad (51)$$

$$w' = z(2 - z) \mapsto \frac{1}{k} z(2 - z^k) \quad (52)$$

$$V = \frac{1}{2} [\phi^2 + \chi^2] [(2 - \phi)^2 + \chi^2] \quad (53)$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} [\phi^2 + \chi^2] \left\{ \left[2 - \sum_0^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} C_k^{2m} (-1)^m \phi^{k-2m} \chi^{2m} \right]^2 + \left[\sum_0^{\lfloor k/2 \rfloor + 1} C_k^{2m+1} (-1)^m \phi^{k-2m-1} \chi^{2m+1} \right]^2 \right\} \quad (54)$$

$$z_s(x) = 1 + \tanh x \mapsto \sqrt[k]{1 + \tanh x} \quad (55)$$

$$\sim (\phi(x), \chi(x)) = (1 + \tanh x, 0) \quad (56)$$

$$\tilde{\phi}_s(x) = [1 + \tanh x]^{\frac{1}{k}} \cos \frac{2\pi s}{k} \quad (57)$$

$$\tilde{\chi}_s(x) = [1 + \tanh x]^{\frac{1}{k}} \sin \frac{2\pi s}{k} \quad (58)$$

$$s \in \overline{0, k-1} \quad (59)$$

Здесь получаем новые нули потенциала в корнях из двойки, т.е. новые вакуумы и новые решения. Эти решения в виде прямых присутствуют в деформированной модели, однако это не все решения.

На рисунке (??) изображены графики потенциалов $-V(\phi, \chi)$ для $k = 2, 3, 5$. Для $k = 2, 3$ модель имеет лишь тривиальные орбиты в виде отрезков прямых, данные орбиты и их решения были получены в ходе деформации. На рисунке (6) представлены нетривиальные орбиты при $k = 5$ на плоскости $O_{\phi\chi}$. При соответствующем подборе параметров аналогичные орбиты появятся и для других соседних пар корней из 2. $k = 5$ — минимальное значение натурального k , при котором наблюдаются нетривиальные орбиты.

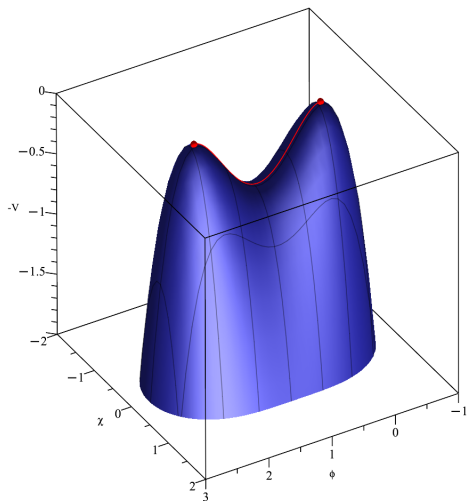


Рисунок 3 — Потенциал, построенный по недеформированному суперпотенциалу (53) . Имеется единственное решение.

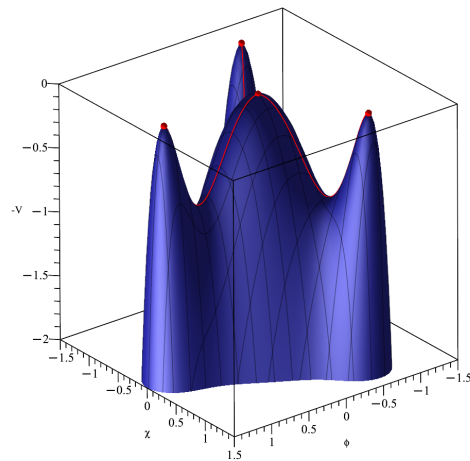


Рисунок 4 — Деформированный потенциал. Появилось три решения в виде отрезков прямых

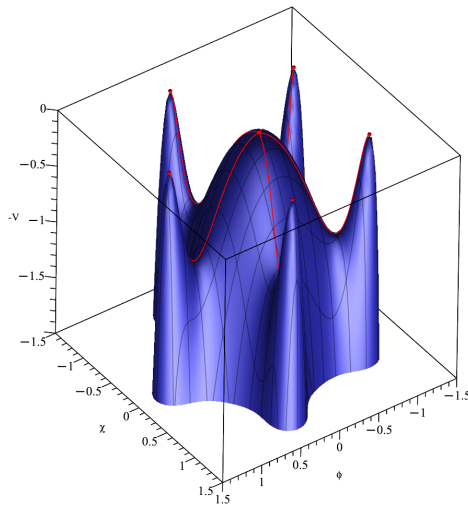


Рисунок 5 — Деформированный потенциал. Появилось пять решений в виде прямых и пять нетривиальных решений.

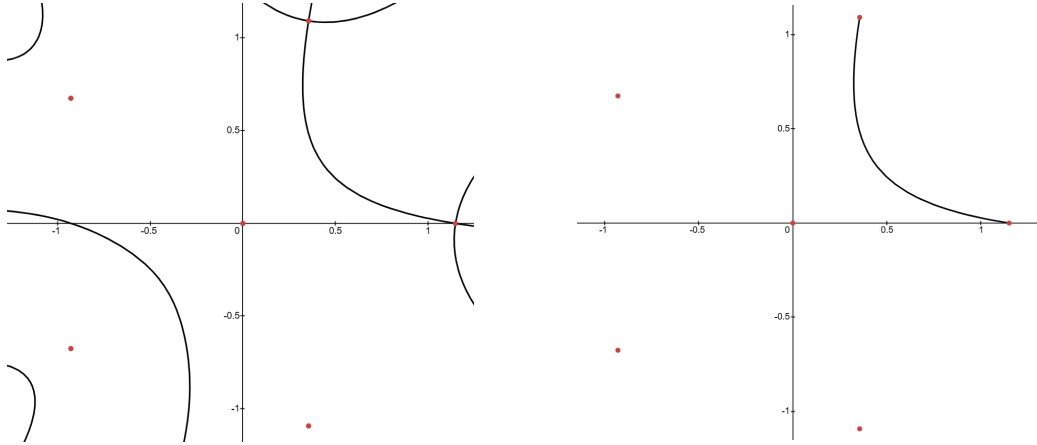


Рисунок 6 — Нетривиальные орбиты деформированной модели (55) при $k = 5$ для пары нулей $2^{\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Слева изображены все решения уравнения $F = 0$, из данных орбит на рисунке можно выбрать ту, что соединяет пару нулей V (рисунок справа).

3 Заключение

В данной работе рассмотрен метод, позволяющий для потенциала, заданного через гармонический суперпотенциал двухполевой скалярной модели в $1 + 1$ измерениях сводить решение уравнений движения к задаче на поиск обратной функции и интегрированию. Найдены решения некоторых моделей, а также найдено общее уравнение орбиты для произвольного гармонического суперпотенциала. Применен метод деформации потенциала, позволяющий получать решения новых моделей без решения уравнений движения.

В дальнейшем планируется расширить метод на модели с большим числом полей.