

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 524.83

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ОБОБЩЕННЫЙ ЛАГРАНЖИАН В
ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ
АКСИОНОПОДОБНЫХ ЧАСТИЦ

Научный руководитель

_____ М.Ю.Хлопов

Консультант

_____ М.А.Краснов

Студент

_____ С.Д.Франк-Каменецкая

Москва 2025

CONTENTS

1	Введение	3
2	Некоторые космологические модели	3
2.1	Космологическая модель Λ CDM	3
2.2	Квинтэссенция	4
2.3	Фантомное поле	6
2.4	Тахионы	9
3	Обобщенный лагранжиан	10
3.1	Обобщенный лагранжиан	10
3.2	Случай $\alpha \gg 1, \beta = 0$	12
4	Заключение	13
	Список использованных источников	13

1. ВВЕДЕНИЕ

Аксион - легкая нейтральная частица, естественным образом возникшая вследствие нарушения CP-симметрии в ряде эффектов сильного взаимодействия, но не входящая в Стандартную Модель. [1] Масса аксиона зависит от температуры, однако при $T < 10^{12}$ становится постоянной[2]:

$$m = \frac{f_\pi m_\pi}{f} \frac{\sqrt{m_d m_u}}{m_d + m_u}, \quad (1)$$

где f_π - амплитуда распада пиона, m_d и m_u - массы d-кварка и u-кварка, f - параметр распада аксиона. Позже было показано, что аксионоподобные частицы - псевдоскалярные частицы с независимыми массой и параметром распада, но показывающими аналогичное поведение - могут возникать в низкоэнергетических полевых теориях, вытекающих из теории струн. [3]. Аксионоподобные частицы одни из кандидатов на роль темной материи.

Основная цель данной работы - исследовать поведение скалярного поля в присутствии потенциала аксионоподобного поля, а также исследовать сводится ли полевая модель, описываемая обобщенным лагранжианом (22), к модели Λ CDM.

2. НЕКОТОРЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1 Космологическая модель Λ CDM

Основная современная космологическая модель, описывающая физику Вселенной – Λ CDM, где Λ -темная энергия, а CDM – холодная материя. Факт

существования некоторой не барионной материи стал очевиден из детального анализа космологического нуклеосинтеза, позже получив подкрепления на основе экспериментальных данных о реликтовом излучении и т.д. Данная материя слабо взаимодействует с излучением, т.е. должна быть электрически нейтральной, а так же «холодной» – иметь сильно нерелятивистские скорости. [4] В 1998 г. было сделано фундаментальное открытие. Было обнаружено, что расширение Вселенной происходит не с замедлением, как полагали раньше, а с ускорением. [5] В рамках ОТО это объясняется существованием не барионной и не темной материи, а в некоторой иной материи обладающей большим отрицательным давлением. Ее носителем вообще не могут быть частицы — иначе она бы образовывала неоднородные структуры, что не соответствует наблюдениям. Этот странный вид материи, получивший название “темной энергии”, распределен в пространстве удивительно однородно, но ее присутствие сказывается на скорости разбегания галактик. Наиболее вероятные По последним данным барионная материя составляет 5% от общей плотности энергии Вселенной, темная материя – 26%, а остальные 69% приходятся на плотность темной энергии (плотность энергии вакуума). [6]

2.2 Квинтэссенция

Одна из моделей предложенных для описания динамики энергии вакуума – модель квинтэссенции. Она описывается каноническим скалярным полем и, минимально связанным с гравитацией. [7] Медленно меняющееся поле вдоль потенциала $V(\phi)$ может привести к ускорению Вселенной. Уравнение состояния:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (2)$$

где параметр $w_\phi > -1$. Действие для такого поля имеет вид:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (3)$$

, где в качестве потенциала самодействия такого поля был рассмотрен потенциал аксионоподобного поля (ALP) $V(\phi) = \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f}))$. Плотность энергии такого поля имеет вид:

$$\rho_\phi = \rho_X + \rho_V = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f})) \quad (4)$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона для данной системы:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (5)$$

, где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4 \left(1 - \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right) \right) \quad (6)$$

Переходя к безразмерной переменной $\theta = \frac{\phi}{f}$

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\left[\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{f^2\dot{\theta}^2}{2} + \Lambda^4 (1 - \cos(\theta)) \right) \right]} \dot{\theta} + \frac{\Lambda^4}{f^2} \sin(\theta) = 0 \quad (7a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (7b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi \quad (7c)$$

При переходе к производной по $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$ уравнение принимает вид:

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}(f\dot{\theta})\sqrt{\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos(\theta) + 1 + \sin(\theta)} = 0. \quad (8a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (8b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi \quad (8c)$$

В данном случае m_θ - масса аксионо-подобной частицы.

По графику (рис.1) видно, что потенциальная компонента ρ_V ведет себя как релятивистское вещество (излучение), доминируя на ранних стадиях развития вселенной. Кинетическая же компонента ρ_X показывает поведение аналогичное темной энергии, доминируя на поздних временах.

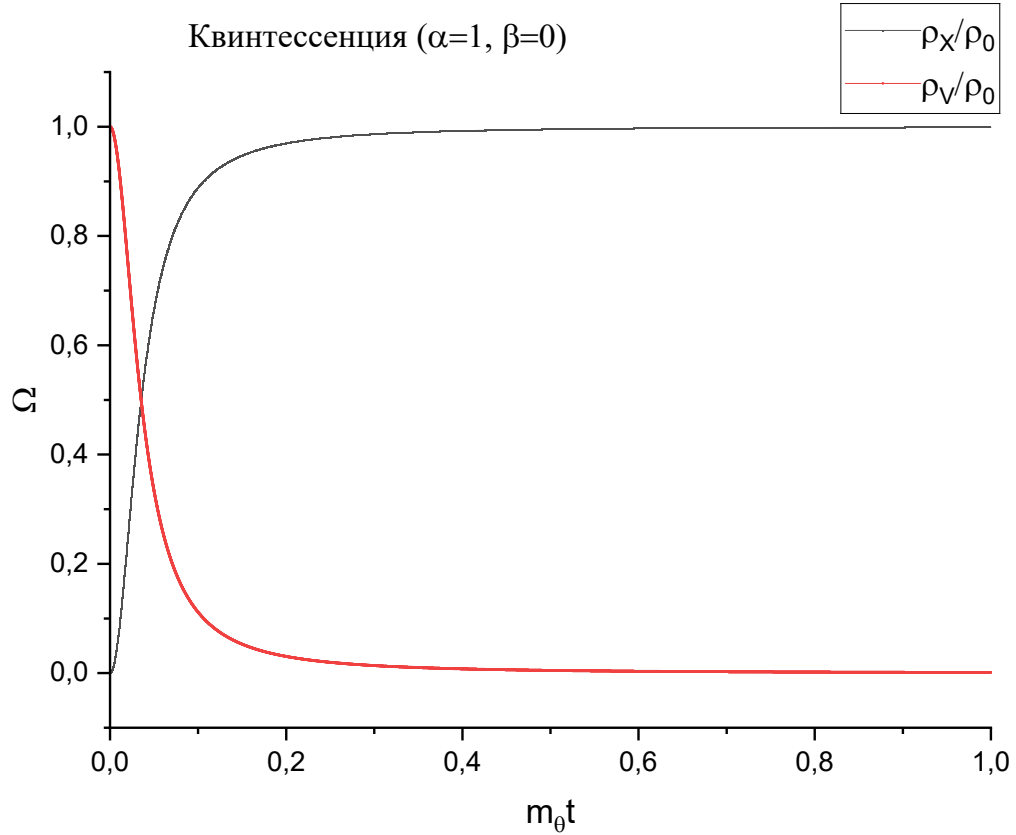


Рисунок 1 — Эволюция плотностей энергий для случая квинтессенции

2.3 Фантомное поле

Другая модель предложенная для описания динамики темной энергии – это модель фантомных полей. Она так же описывается аномальным скалярным полем ϕ , медленно меняющимся вдоль потенциала, но в отличии от случая квинтессенции движется к максимуму (а не к минимуму). [8] Интересной особенностью такой модели является то, что с расширением плотность таких полей возрастает. Фантомные модели нарушают условие доминирующей энергии, поэтому они не могут быть физически стабильными моделями темной энергии, но, тем не менее, оказывается совместимой с большинством классических тестов космологии на основе текущих данных наблюдений [9]. Уравнение

состояния:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{-\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{-\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (9)$$

где параметр $w_\phi < -1$. Действие для такого поля имеет вид:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (10)$$

, где В качестве потенциала самодействия такого поля был рассмотрен потенциал аксионоподобного поля (ALP) $V(\phi) = \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f}))$. Плотность энергии такого поля имеет вид:

$$\rho_\phi = \rho_X + \rho_V = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4(1 - \cos(\frac{\phi}{f})) \quad (11)$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона для данной системы:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'(\phi) = 0, \quad (12)$$

где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(-\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda^4 \left(1 - \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right) \right). \quad (13)$$

Переходя к безразмерной $\theta = \frac{\phi}{f}$

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\left[\frac{8\pi G}{3} \left(-\frac{f^2 \dot{\theta}^2}{2} + \Lambda^4 (1 - \cos(\theta)) \right) \right]} \dot{\theta} - \frac{\Lambda^4}{f^2} \sin(\theta) = 0, \quad (14a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad (14b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi, \quad (14c)$$

При переходе к производной по $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$ уравнение принимает вид:

$$\ddot{\theta} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}(f\dot{\theta})\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos(\theta) \right)} - \sin(\theta) = 0 \quad (15a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (15b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi. \quad (15c)$$

В данном случае m_θ - масса аксионо-подобной частицы.

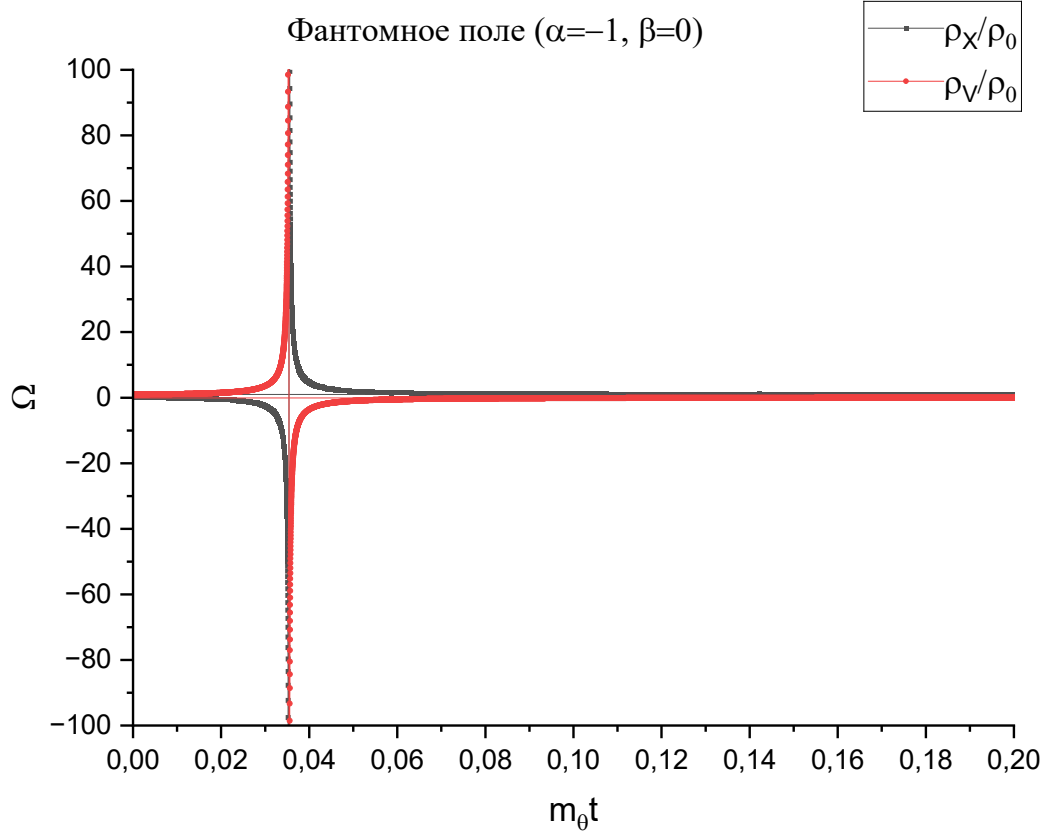


Рисунок 2 — Эволюция плотностей энергий для случая фантомного поля

По графику (рис.2) наглядно видно, что при $0.35m_\theta t$ вселенная претерпевает естественный для теорий фантомных полей "Большой разрыв".

2.4 Тахионы

Скалярное поле, меняющее плотность энергии вакуума, может описываться динамикой аксионоподобных тахионов. [10] Уравнение состояния в этом случае:

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \dot{\phi}^2 - 1 \quad (16)$$

Действие такого поля задается выражением:

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left(\frac{\mathcal{R}}{2\kappa^2} - V(\phi) \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi} \right) d^4x + \mathcal{S}_m \quad (17)$$

Плотность энергии:

$$\rho_\phi = \rho_V + \rho_{X,V} = V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} V(\phi) \left(\frac{1}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \quad (18)$$

Уравнение Клейна-Гордона:

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} = 0 \quad (19)$$

, где

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\Lambda^4 \left(1 - \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right) \left(1 + \frac{1}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right) \quad (20)$$

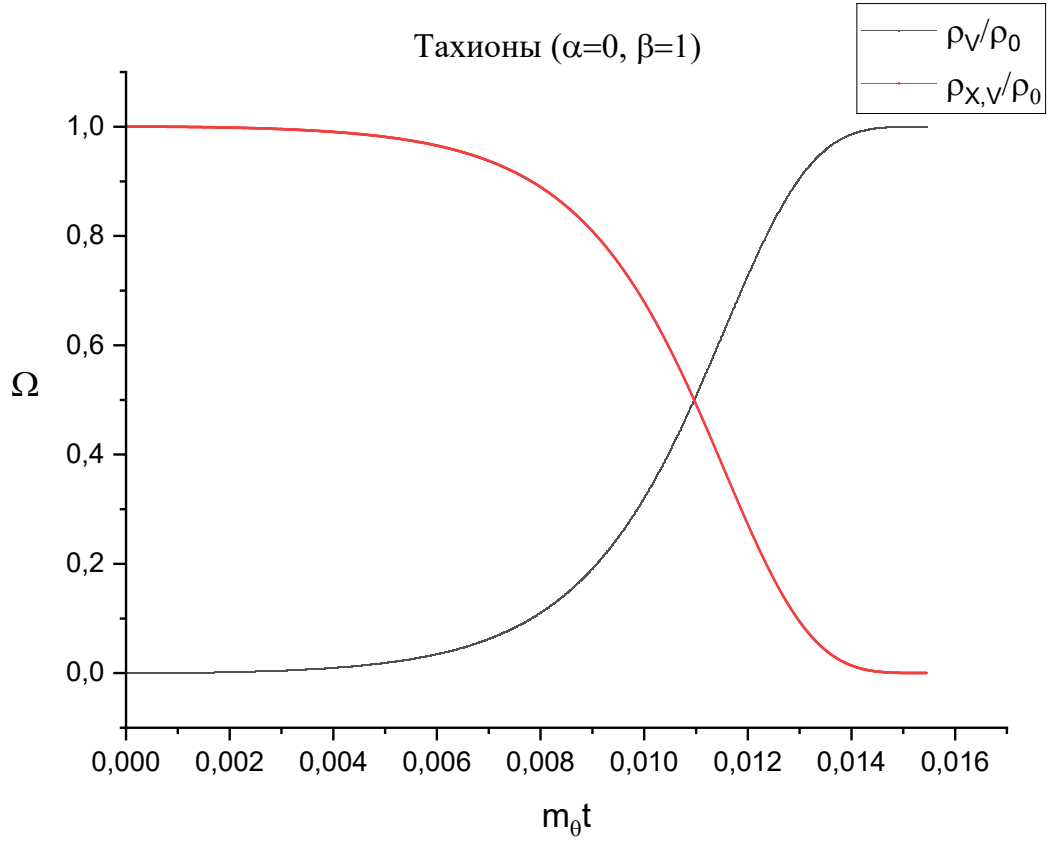
Переходя к безразмерной $\theta = \frac{\phi}{f}$ и производной по $m_\theta t = \frac{\Lambda^2 t}{f}$ уравнение принимает вид:

$$\frac{\ddot{\theta}}{1 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2} + 3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} f \dot{\theta} \sqrt{\frac{(1 - \cos(\theta))(2 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2)}{2(1 - \Lambda^4 \dot{\theta}^2)}} + \frac{1}{\Lambda^4} \cot \frac{\theta}{2} = 0 \quad (21a)$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (21b)$$

$$\theta(0) = \pi + \delta, \delta \ll \pi. \quad (21c)$$

Плотность энергии смешанной компоненты $(\rho_{X,V})$ для поля аксионоподобных тахионов ведет себя аналогично излучению, тогда как эволюцию потенциальной компоненты (ρ_V) можно рассмотреть как эволюцию плотности темной энергии. Стоит отметить, что на больших временах (порядка $200t_0$, t_0 — современный возраст Вселенной) и заданных параметрах, поведение поля становится крайне неустойчивым, что можно объясняется крайне неустойчивой природой тахионов.



3. ОБОБЩЕННЫЙ ЛАГРАНЖИАН

3.1 Обобщенный лагранжиан

Также был рассмотрен обобщенный лагранжиан, объединяющий все три указанные выше модели.

$$\mathcal{L}_X = \alpha X^{\alpha^2} - V(\phi) (1 - 2X)^{\beta/2} \quad (22)$$

где $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ — кинетический член в плотности Лагранжа выше, ϕ — скалярное поле, $V(\phi)$ — потенциал самодействия поля, $\partial_\mu \phi$ — частная производная скалярного поля по пространственно-временным координатам, а параметры α и β вносят гибкость в модель, позволяя ей описывать различные формы

темной энергии в зависимости от их следующих различных значений:

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha = 0, \beta = 1; & \text{Модель аксионоподобных тахионов} \\ \alpha = 1, \beta = 0; & \text{Модель квинтэссенции} \\ \alpha = -1, \beta = 0; & \text{Модель фантомных полей.} \end{cases} \quad (23)$$

Тогда плотность энергии и давление такого поля определяются выражениями:

$$\rho_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}_X = (2\alpha^3 - \alpha)X^{\alpha^2} + V(\phi)(1 - 2X)^{\beta/2} \left[1 + \frac{2\beta X}{(1 - 2X)} \right] \quad (24a)$$

$$p_\phi = \mathcal{L}_X = \alpha X^{\alpha^2} - V(\phi)(1 - 2X)^{\beta/2} \quad (24b)$$

Полная плотность энергии имеет 3 компоненты: кинетическую (ρ_X), потенциальную (ρ_V) и смешанную ($\rho_{(X,V)}$):

$$\rho_X = (2\alpha^3 - \alpha)X^{\alpha^2} \quad (25a)$$

$$\rho_V = V(\phi) \quad (25b)$$

$$\rho_{(X,V)} = \beta X V(\phi) \left(\frac{1 + 2X(1 - \beta)}{1 - 2X} \right) \quad (25c)$$

Уравнение Фрийдмана имеет вид:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \equiv \frac{8\pi G}{3} (\rho_X + \rho_V + \rho_{(X,V)}) \quad (26)$$

А уравнение Клейна-Гордона (движения):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \dot{\phi} & \left[\alpha^2 (2\alpha^3 - \alpha) \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2 - 1} + \frac{V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{(\beta/2)} \beta}{(1 - \dot{\phi}^2)} \left(1 + \frac{(2 - \beta)\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] \\ & + 3H \left[2\alpha^3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \frac{\beta \dot{\phi}^2 V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{(\beta/2)}}{(1 - \dot{\phi}^2)} \right] + \frac{dV}{d\phi} \left[\dot{\phi}(1 - \dot{\phi}^2)^{(\beta/2)} \left(1 + \frac{\beta \dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Параметры уравнения состояния для каждой из плотностей энергии:

$$w_X = \frac{1}{2\alpha^2 - 1} = \text{const} \quad (28a)$$

$$w_V = -1 = \text{const} \quad (28b)$$

$$w_{X,V} = \begin{cases} \frac{1-\dot{\phi}^2}{1+\dot{\phi}^2}, & \text{для } \beta = 0 \\ 1 - \dot{\phi}^2, & \text{для } \beta = 1 \end{cases} \quad (28c)$$

3.2 Случай $\alpha \gg 1, \beta = 0$

Рассмотрена модель с параметрами лагранжиана (20) $\alpha \gg 1, \beta = 0$. Тогда параметр уравнения состояния:

$$w_X = \frac{1}{2\alpha^2 - 1} \longrightarrow 0 \quad (29a)$$

$$w_V = -1 = \text{const} \quad (29b)$$

Существование такого поля действительно может объяснять изменение плотности энергии вакуума. Уравнение (25) в данном случае после замены $\phi = f\theta$ и перехода к производной по $m_\theta t$:

$$\Lambda^4 \ddot{\theta} (2\alpha^5 - \alpha^3) \left(\frac{\Lambda^4 \dot{\theta}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \sqrt{\frac{24\pi G}{3}} 2\alpha^3 f \left(\frac{\Lambda^4 \dot{\theta}^2}{2} \right)^{\alpha^2} * \quad (30)$$

$$\sqrt{(2\alpha^3 - \alpha) \left(\frac{\Lambda^4 \dot{\theta}^2}{2} \right)^{\alpha^2} + \Lambda^4 (1 - \cos \theta) + \Lambda^6 \dot{\theta} \sin \theta} = 0 \quad (31)$$

Данное уравнение крайне жесткое и решение при заданных параметрах не удалось получить классическими неявными численными методами. Работа над данным вопросом продолжается. Также в перспективе будет рассмотрен случай для $\alpha \gg 1, \beta = 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе научно-исследовательской работы было проведено ознакомление с феноменом аксионоподобных частиц, теориями и моделями современной космологии. Были получены графики эволюции плотностей энергии для моделей описания динамики скалярного поля, изменяющими значение плотности энергии вакуума (темной энергии), однако, ни одна из теорий не дала полностью удовлетворительного, физически интерпретируемого результата. Также была поставлена задача об анализе лагранжиана, включающего аксионоподобную темную энергию и материя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Peccei R. D., Quinn H. R.* Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles // *Phys. Rev. D.* — 1977. — Sept. — Vol. 16, issue 6. — P. 1791–1797. — DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1791.
2. *Weinberg S.* Космология / trans. by И. Арефьева, В. Санюк. — М. : УРСС: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2013. — P. 608. — Пер. с англ.; Под ред. и с предисл. И.Я. Арефьевой, В.И. Санюка.
3. *Ratra B., Peebles P. J. E.* Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field // *Phys. Rev. D.* — 1988. — June. — Vol. 37, issue 12. — P. 3406–3427. — DOI: 10.1103/PhysRevD.37.3406.
4. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / P. Collaboration, N. Aghanim, [et al.] // *Astronomy & Astrophysics.* — 2020. — Vol. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
5. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A. G. Riess [et al.] // *The Astronomical Journal.* — 1998. — Sept. — Vol. 116, no. 3. — P. 1009–1038. — DOI: 10.1086/300499.
6. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / P. Collaboration [et al.] // *Astronomy & Astrophysics.* — 2020. — Sept. — Vol. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
7. *Caldwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // *Physical Review Letters.* — 1998. — Feb. — Vol. 80, no. 8. — P. 1582–1585. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.1582.

8. *Caldwell R. R., Kamionkowski M., Weinberg N. N.* Phantom Energy and Cosmic Doomsday // Physical Review Letters. — 2003. — Aug. — Vol. 91, no. 7. — P. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.071301.
9. *Di Valentino E., Melchiorri A., Silk J.* Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology // Nature Astronomy. — 2020. — Vol. 4. — P. 196–203. — DOI: 10.1038/s41550-019-0906-9.
10. *Frolov A. V., Kofman L., Starobinsky A. A.* Prospects and problems of tachyon matter cosmology // Physics Letters B. — 2002. — Vol. 545. — P. 8–16. — DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02557-5.