Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»»

УДК 539.165.2

# ОТЧЕТ
# О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
# **АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ КИНКА**

Научный руководитель
д.ф.-м.н. __________ В. А. Гани

Студент __________ А. С. Никифоров

Москва 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Кинк представляет собой полевую конфигурацию, интерполирующую между двумя состояниями, отвечающими минимумам самодействия поля (потенциала теоретико-полевой модели). При этом кинк имеет наименьшую возможную энергию среди всех конфигураций, соединяющих эти два минимума [3].
Изучение спектра возбуждений кинковых решений необходимо для объяснения резонансных явлений в столкновениях (рассеянии) кинков. В свою очередь резонансные явления необходимы для описания столкновения доменных стенок. Целью данной работы является исследование спектра малых возбуждений кинка в линейном приближении.

Для достижения данной цели решались следующие задачи:

- Ознакомление с основной литературой, посвященной данной тематике;
- Постновка задачи о спектре возбуждений кинка;
- Написание программы для численного решения поставленной задачи (задачи на собственные значения и собственные функции);
- Получение численного и аналитического решений для ряда моделей кинков.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Основные сведения о кинке

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x,t)$, развитие которого описывается лагранжианом в пространстве $(\mathcal{D} = 1+1)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1. \tag{1.1}$$

Где $V(\varphi)$ - потенциал системы, который достигает нуля в конечном числе точек.
Из лагранжиана получим уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0\,. \tag{1.2}$$

Для стационарного случая, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \varphi(x,t) \equiv \varphi(x), \quad$ получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\varphi}\,, \tag{1.3}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \sqrt{2V(\varphi)}. \tag{1.4}$$

## 1.2 Постановка задачи

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x,t)$ как стационарное решение $\varphi_\text{K}(x)$ с малым возмущением $\delta\varphi(x,t)$, т.е.

$$\varphi(x,t) = \varphi_\text{K}(x) + \delta\varphi(x,t), \quad \|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_\text{K}\| \ . \tag{1.5}$$

Подставим это выражение в уравнение (12) получим:

$$\frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{d^2\varphi_k}{dx^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi_k(x)+\delta\varphi} = 0. \tag{1.6}$$

Выполним разложение по степеням $\delta\varphi$ для $\frac{dV(\varphi_k+\delta\varphi)}{d\varphi}$, т.к. $\|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_\text{K}\|$:

$$\frac{dV(\varphi_k+\delta\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{dV(\varphi_k)}{d\varphi} + \frac{d^2V(\varphi_k)}{d\varphi^2} \cdot \delta\varphi\,, \quad \frac{dV(\varphi_k)}{d\varphi} = \frac{d^2\varphi_k}{dx^2} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_k(x)} \cdot \delta\varphi = 0. \tag{1.8}$$

Будем искать возмущение в форме:

$$\delta\varphi(x,t) = \psi(x)\ \cos(\omega t) \tag{1.9}$$

Тогда уравнение (8) примет вид: [2]

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_k(x)}\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x), \quad \psi(x) \in C^2, \psi(x) \in L^2 \tag{1.10}$$

Переобозначим

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_k(x)} = U(x) \tag{1.11}$$

и примем:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\,. \tag{1.12}$$

Рассмотрим случай нулевого собственного значения. Тогда возмущение примет вид:

$$\delta\varphi = \psi(x). \tag{1.13}$$

Очевидно, что в таком случае всегда будет соответствующая ему собственная функция:

$$\psi_0 = \frac{d\varphi_k}{dx}. \tag{1.14}$$

## 1.3 Численное решение поставленной задачи

Численное решение задачи на собственные задачи и собственные функции для уравнения Шредингера с произвольным потенциалом:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x) \tag{1.15}$$

Преобразуем непрерывное пространство в дискретное. Зададим границы обасти, $x \in [-a, a]$ и разобьем пространство:

$$\begin{array}{ll} x_0 = -a & , \\ x_1 = -a + \Delta x & , \\ \dots & , \\ x_{N-1} = a & . \end{array}$$

Введем обозначение $f(x_i) = f_i$. Тогда:

$$\begin{array}{ll} \psi_0 = 0 & , \\ \dots & , \\ \psi_{N-1} = 0 & . \end{array}$$

Преобразуем уравнение Шредингера аппроксимируя вторую производную конечными разностями [1]:

$$\begin{cases} -\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta x^2} + V_j\psi_j = \omega^2\psi_j + O(\Delta x^2), \\ j = 1, \dots, N-2 \end{cases} \tag{1.16}$$

Полученную систему уравнений перепишем в матричном виде:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2}{\Delta x^2}+U_1 & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2}+U_2 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \ddots & \vdots \\
0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2}+U_3 & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\Delta x^2} \\
0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2}+U_{N-2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix}
= \omega^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix} \tag{1.17}
$$

Для численного нахождения собственных значений и собственных функций полученной тридиагональной симметричной матрицы используем библиотеку LAPACK, а именно функцию dstev().

# 2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

## 2.1 Модель $\varphi^4$

### 2.1.1 Аналитическое решение

Для модели $\varphi^4$, $V(\varphi) = \dfrac{1}{2}(1-\varphi^2)^2$, $\varphi_{\mathrm{K}}(x) = \tanh x$, получим:

$$
U = 4 - \frac{6}{\cosh^2 x}. \tag{2.1}
$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$
\psi'' + (2 - 6\tanh^2 x + \omega^2)\psi = 0 \tag{2.2}
$$

$$
\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 6\tanh^2(x) - 2\right]\psi(x) = \omega^2\psi(x) \tag{2.3}
$$

Замена $\tanh x = \xi$, $\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$

$$
\frac{1}{\cosh^2 x}\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{d\psi}{d\xi}\right] + \left[-6\xi^2 + 6 - 4 + \omega^2\right]\psi(\xi) \tag{2.4}
$$

$$
\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\psi'\right] + \left(2(2+1) - \frac{4-\omega^2}{1-\xi^2}\right)\psi = 0 \tag{2.5}
$$

Решением ДУ такого типа являются присоединённые многочлены Лежандра. Для нашего случая:

$$\psi(\xi) = P_l^m(\xi) = P_2^{\Omega}(\xi), \quad \Omega^2 = 4 - \omega^2 \tag{2.6}$$

Так как $0 \leq m \leq l$, то $\Omega = 0, 1, 2$. Учитывая предыдущую строку, получим для вещественных: $\Omega, \omega$

$$\omega = 0, \sqrt{3}, 2 \tag{2.7}$$

Однако нас интересуют только функции уходящие в ноль на бесконечности, т.е.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \psi(x) = \lim_{\xi \to \pm 1} P_2^{\Omega}(\xi) = 0, \tag{2.8}$$

Следовательно нам не подоходит решение $P_2^0(\xi)$. Тогда:

$$\psi_1 = P_2^1(\xi), \quad \omega = \sqrt{3} \tag{2.9}$$

$$\psi_2 = P_2^2(\xi), \quad \omega = 0 \tag{2.10}$$

Приведенные выше рассуждения имеют смысл лишь для случая, когда: $4 - \omega^2 = 0, 1, ...$

Теперь найдем вид гипергеометрического уравнения.
Выполним пару замен $\frac{1-\xi}{2} = u, \psi = (1 - \xi^2)^{\frac{\Omega}{2}} \eta(\xi)$

и после несложных преобразований получим:

$$u(1-u)\eta'' + (\Omega+1)(1-2u)\eta' - (\Omega - l)(\Omega + l + 1)\eta = 0 \tag{2.11}$$

$$u(1-u)\eta'' + [\Omega + 1 - (\Omega - l + \Omega + l + 1 + 1)u]\,\eta' - (\Omega - l)(\Omega + l + 1)\eta = 0 \tag{2.12}$$

Для удобства, перейдем к другим обозначениям:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\,\frac{dy}{dx} - ab\,y = 0. \tag{2.13}$$

В общем виде решение около 0, при $c \notin \mathbb{Z}$

$$y = A\,F(a,b,c,x) + B\,x^{1-c}\,F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \tag{2.14}$$

Для нашего случая:

$$\eta(u) = A\,F(\Omega - l, \Omega + l + 1; \Omega + 1; u) + B\,u^{-\Omega}\,F(-l, l+1; 1-\Omega; u) \tag{2.15}$$

Это решение должно оставаться конечным при $x \to +\infty$, $u \to 0$. Следовательно коэффициент B - зануляется.

Сделаем обратную замену:

$$\psi(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{\Omega}{2}} A\,{}_2F_1\left[\Omega - l, \Omega + l + 1; \Omega + 1; \frac{1-\xi}{2}\right] \tag{2.16}$$

Для того, чтобы это решение было нулевым при $x \to -\infty$, $\xi \to -1$, необходима ограниченность гипергеометрической функции.
Пусть вещественная часть $(a+b-c) > 0$, тогда:

$${}_2F_1\left[a, b; c; 1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{2.17}$$

В нашем случае:

$${}_2F_1\left[\Omega - l, \Omega + l + 1; \Omega + 1; 1\right] = \frac{\Gamma(\Omega+1)\Gamma(-\Omega)}{\Gamma(l+1)\Gamma(-l)} \tag{2.18}$$

Если $a = -n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, то записанное выше выражение преобразуется в:

$${}_2F_1\left[-n, b; c; 1\right] = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \tag{2.19}$$

$${}_2F_1\left[-n, \Omega + l + 1; \Omega + 1; 1\right] = \frac{(-l)_n}{(\Omega+1)_n} \tag{2.20}$$

В этом случае решение всегда остается конечным. Окончательно получим, что решение исходной задачи для потенциала $U = 6\tanh^2(x) - 2$ является:

$$\psi(x) = \left(1-\tanh(x)^2\right)^{\frac{\Omega}{2}} A\,{}_2F_1\left[\Omega - l, \Omega + l + 1; \Omega + 1; \frac{1-\tanh(x)}{2}\right], \tag{2.21}$$

где:

$$l - \Omega = 0, 1, \ldots \tag{2.22}$$

Изначально $l = 2$, тогда:

$$\Omega_n = 2 - n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.23}$$

Перейдем обратно к $\omega^2$. используя $\Omega^2 = 4 - \omega^2$

$$\omega_n^2 = 4n - n^2 \tag{2.24}$$

$$\omega_0^2 = 0, \tag{2.25}$$

$$\omega_1^2 = 3, \tag{2.26}$$

$$\omega_2^2 = 4. \tag{2.27}$$

Собственные значения в общем случае ограничены $\Omega > 0$, что равносильно $n < l$. (это следует из того, что степень функии, стоящей перед гипергеометрической должна быть строго положительной, чтобы она занулялась на бесконечности $(1 - \tanh(x)^2)$.

Окончательно делаем вывод, что решением этой задачи являются:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\cosh x}\right)^2 A \qquad ,\omega_0 = 0 \tag{2.28}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\tanh x}{\cosh x}\right) A \qquad ,\omega_1 = 3 \tag{2.29}$$

### 2.1.2 Численное решение

$$U = 4 - \frac{6}{\cosh^2 x}. \tag{2.30}$$

Для этого потенциала построим графики собственных функций

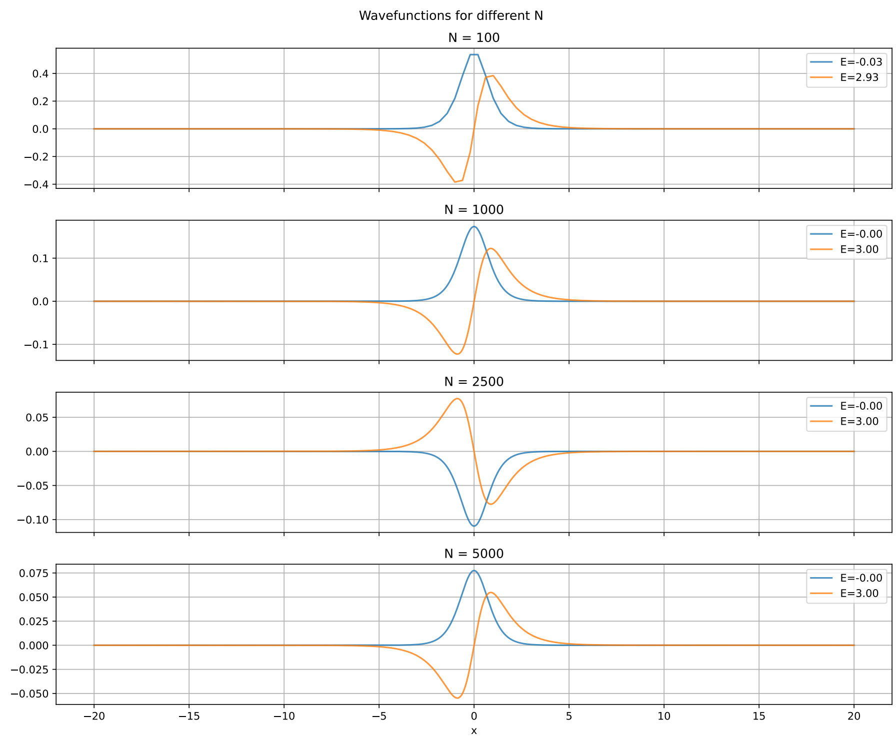


Рисунок 1 — Графики собственных функций для разных степеней дискретизации

## 2.2 Модель sine-Gordon

### 2.2.1 Аналитическое решение

Для модели sine-Gordon, $V(\varphi) = 1 - \cos\varphi$, $\varphi_{\text{K}}(x) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^x$, получим:

$$U(x) = 1 - \frac{2}{\cosh^2 x} \tag{2.31}$$

$$\psi'' + \left(\omega^2 - 1 + \frac{2}{\cosh^2 x}\right)\psi = 0 \tag{2.32}$$

Проделаем преобразования аналогичные предыдущему пункту:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\psi\left(1-\xi^2\right)\right]\left(1-\xi^2\right) + \left(\omega^2 - 2\xi^2\right)\psi = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\psi\left(1-\xi^2\right)\right] + \left(1(1+1) - \frac{1-\omega^2}{1-\xi^2}\right)\psi = 0 \tag{2.34}$$

Задача сведена к предыдущей:

$$\psi(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{\Omega}{2}} A\,{}_2F_1\left[\Omega - 1, \Omega + 2; \Omega + 1; \frac{1-\xi}{2}\right] \tag{2.35}$$

Единственным решением согласно рассуждениям, описаным в предыдущей модели, соответствует единственное решение:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\cosh x}\right) A\,{}_2F_1\left[0, 3; 2; \frac{1-\tanh x}{2}\right] \tag{2.36}$$

### 2.2.2 Численное решение

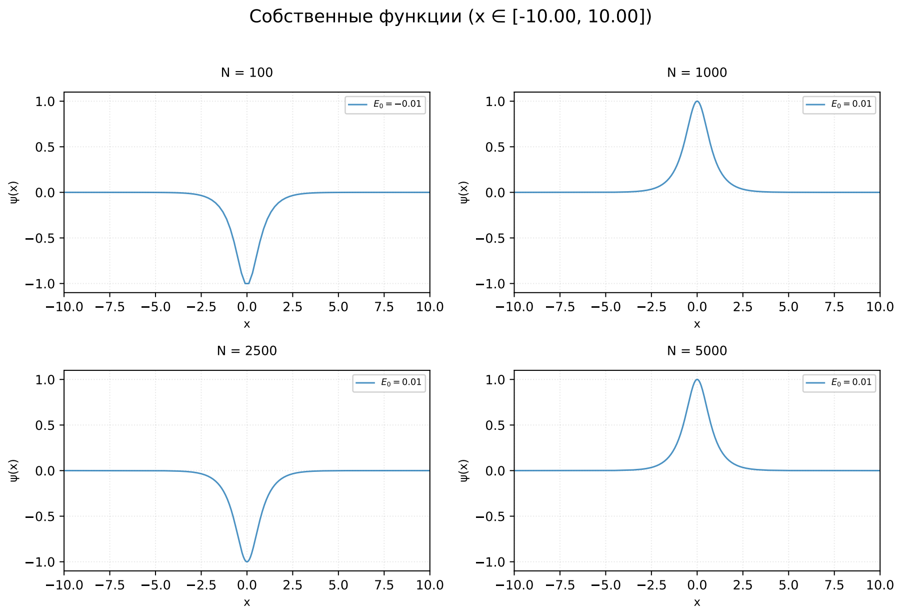


Рисунок 2 — Графики собственных функций модели sine-Gordon для разных степеней дискретизации

## 2.3 Модифицированный $\varphi^6$

Для данной модели:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left|1-\varphi^2\right|^3 \tag{2.37}$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = (1-\varphi^2)(15\varphi^2-3) \tag{2.38}$$

Тогда $U(x)$:

$$U(x) = \left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\left(\frac{15x^2}{1+x^2}-3\right) \tag{2.39}$$

### 2.3.1 Аналитическое решение

Воспользуемся свойством существования решения при нулевом собственном значении. Тогда получим:

$$\psi(x) = \frac{d\varphi_k}{dx} \tag{2.40}$$

Подставим кинковое решение, полученное несложным интегрированием из уравнения (1.4)

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+2x^2+1} \tag{2.41}$$

### 2.3.2 Численное решение

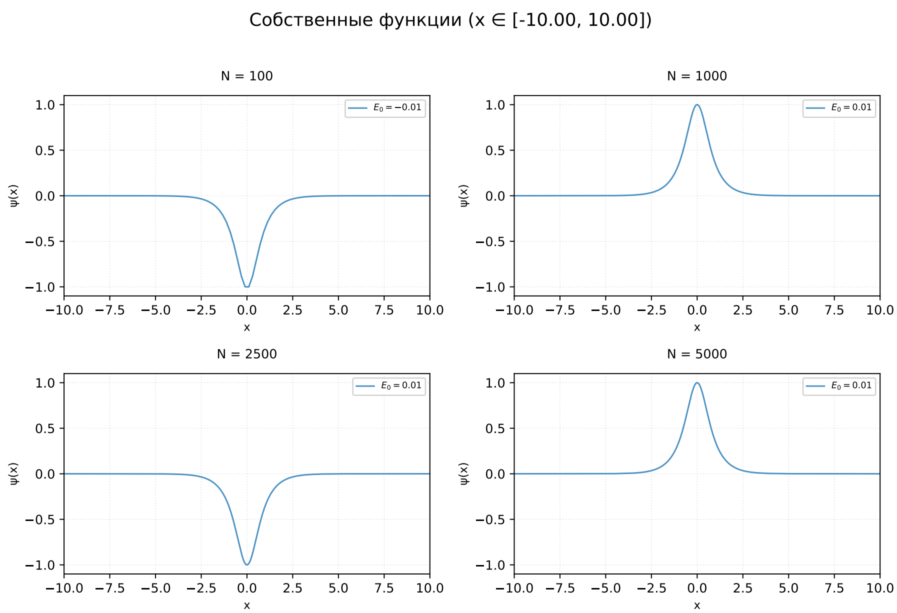


Рисунок 3 — Графики собственных функций модели $\varphi^6$ для разных степеней дискретизации

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были изучены спектры возбуждений кинка для различных моделей. Для каждой модели поставлена и решена (численно и аналитически) задача о спектре малых возбуждений кинка. В дальнейшем полученные результаты будут применены к исследованиям резонансных явлений в столкновениях кинков.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] J. Izaac и J. Wang. “Computational Quantum Mechanics (Part of the Undergraduate Lecture Notes in Physics book series)”. В: *Springer Nature Switzerland* (2018).

[2] V. Lensky V. A. Gani и M. A. Lizunova. “Kink excitation spectra in the (1+1)- dimensional $\varphi^8$ model”. В: *Eur. Phys. J C 78, 345* (2018).

[3] Гани В. А. “Динамические и асимптотические свойства низкоразмерных топологических солитонов”. В: (2023).