

Аналитическое и численное исследование спектра возбуждений кинка

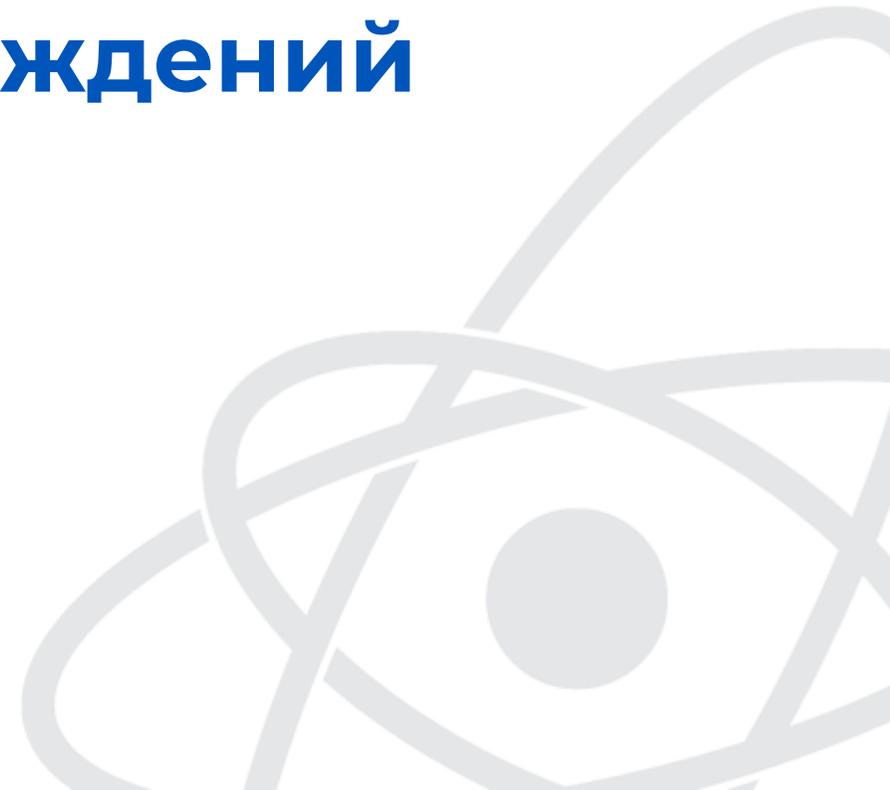
Никифоров А. С.

Б22-102

Научный руководитель:

Д. ф.-м. н.

Гани В. А.



Цель работы:

Исследование спектров малых возбуждений кинков различных моделей в линейном приближении.

Задачи:

- Изучение литературы
- Постановка задачи о спектре возбуждений кинка
- Аналитическое решение поставленной задачи для ряда моделей
- Численное решение

Введение

Лагранжиан, описывающий динамику скалярного поля $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1.$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0,$$

где $V(\varphi) \geq 0$ и имеет два или более минимумов, в которых обращается в ноль.

Кинковое решение соединяет минимумы потенциала $V(\varphi)$ и зависит только от x .

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \sqrt{2V(\varphi_k)}.$$

$$V(\varphi_\pm) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \varphi_\pm.$$

Постановка задачи о малых возбуждениях

Запишем скалярное поле как сумму кинкового решения с малым возмущением:

$$\varphi(x, t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x, t).$$

Ищем возмущение в виде:

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x) \cos(\omega t).$$

Подставляя это в уравнение движения, получим:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)} \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad \psi(x) \in C^2, \psi(x) \in L^2.$$

Переобозначим $\frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)}$, как $U(x)$.

Будем искать собственные функции, соответствующие дискретному спектру

Численное решение задачи на собственные значения и собственные функции для уравнения Шредингера с произвольным потенциалом:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x).$$

Преобразуем уравнение Шредингера, аппроксимируя вторую производную конечными разностями:

$$-\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta x^2} + V_j \psi_j = \omega^2 \psi_j + O(\Delta x^2).$$

Перепишем полученную систему уравнений в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + U_1 & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_2 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix}$$

φ^4 модель

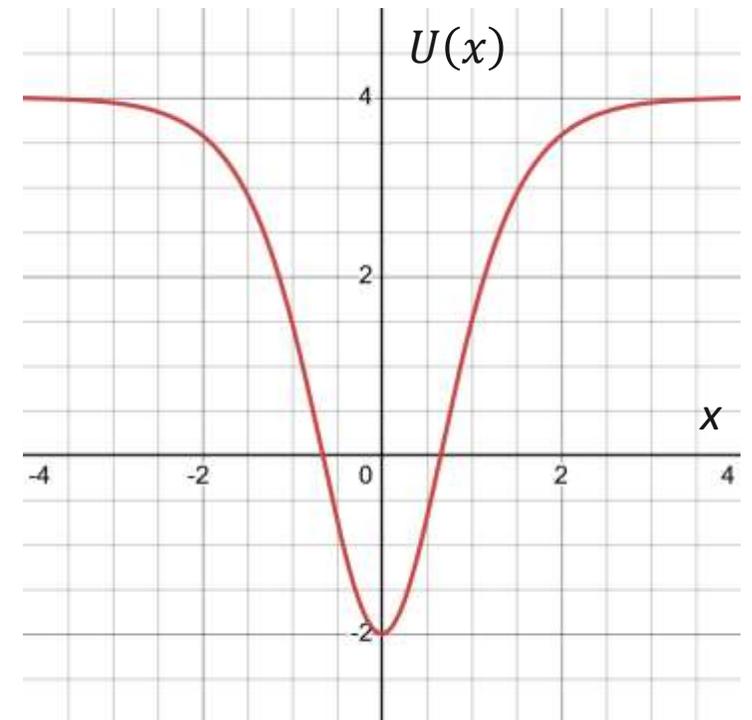
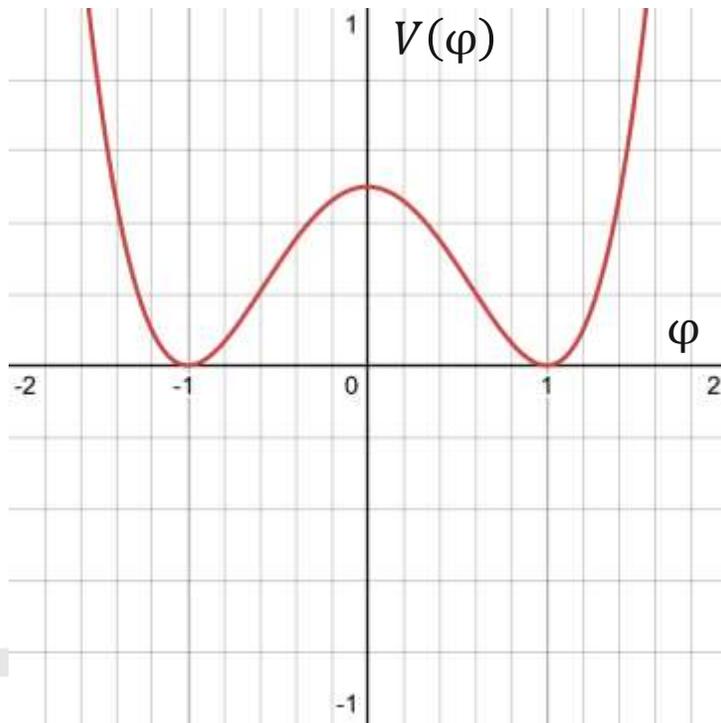
Для φ^4 модели, $V(\varphi) = \frac{1}{2} (1 - \varphi^2)^2$, $\varphi_K(x) = \tanh x$, получим

$$U(x) = 4 - \frac{6}{\cosh^2 x}.$$

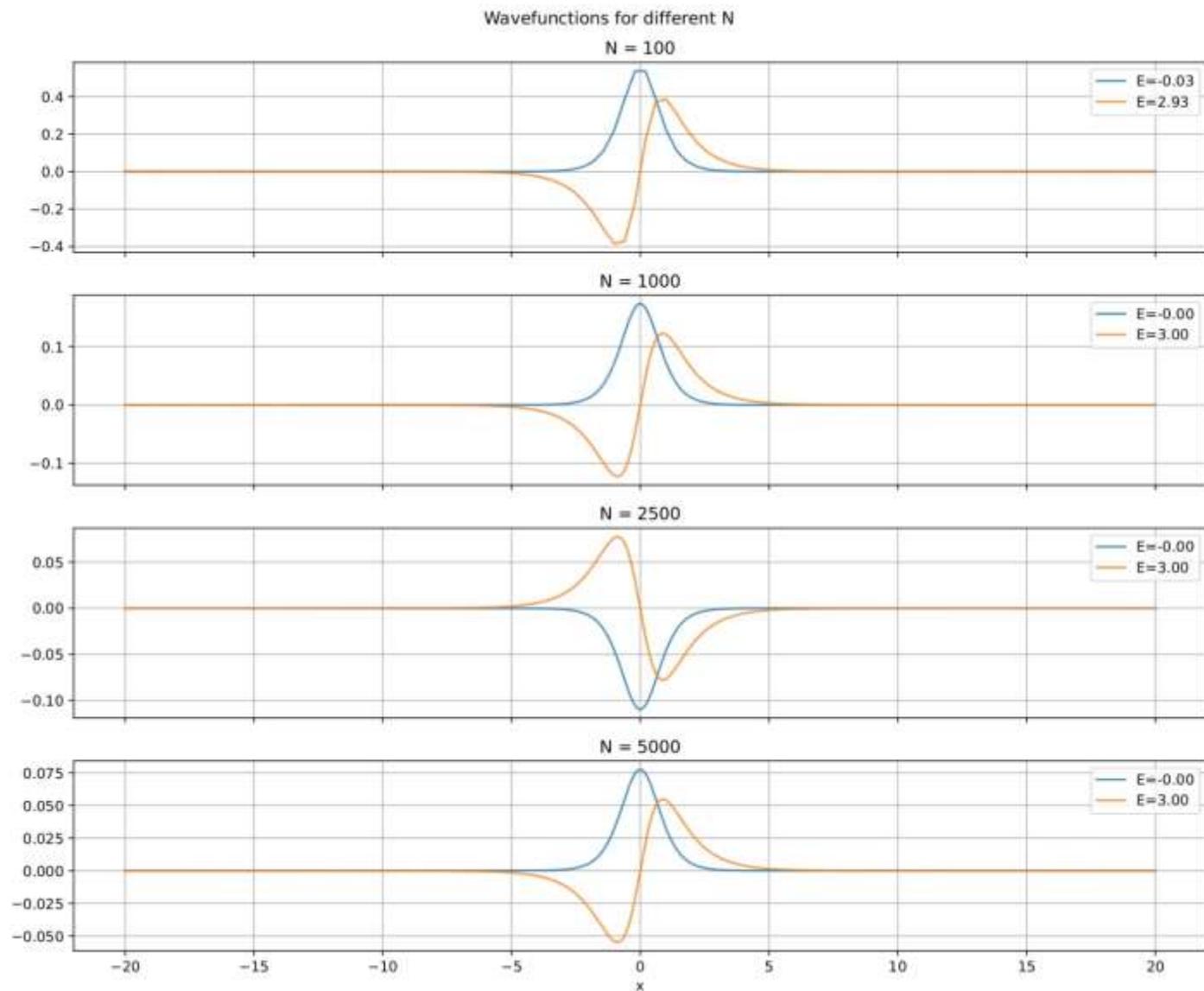
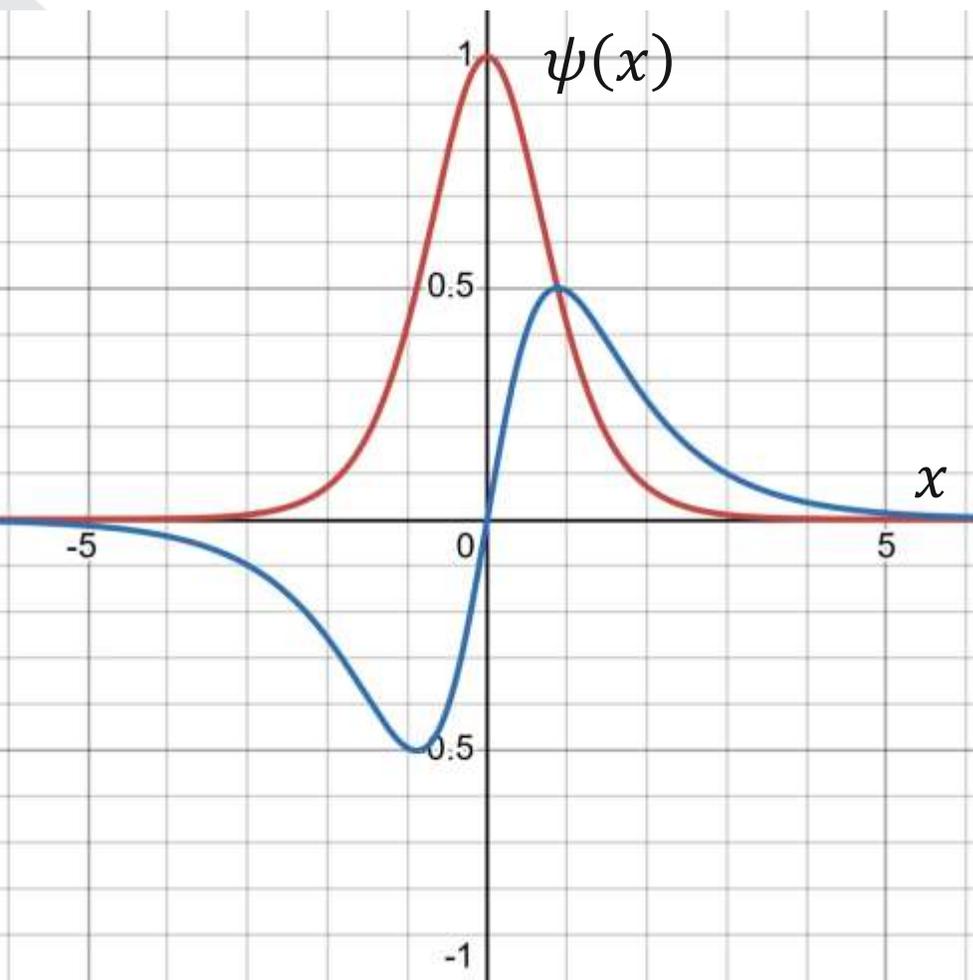
Аналитические решения этой задачи даны:

$$\psi_0(x) = A \left(\frac{1}{\cosh x} \right)^2, \quad \omega_0 = 0,$$

$$\psi_1(x) = A \left(\frac{\tanh(x)}{\cosh x} \right), \quad \omega_1 = 3.$$



Результаты аналитического и численного методов

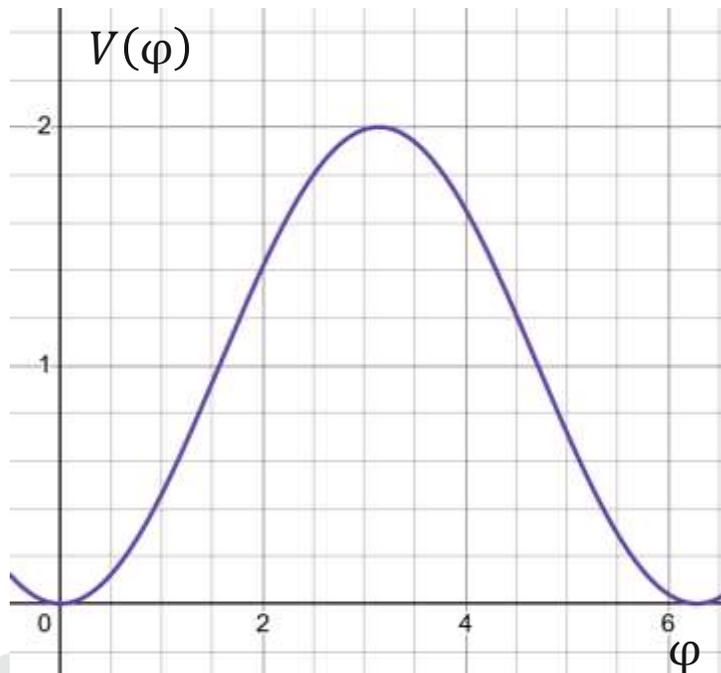


Синус-Гордон

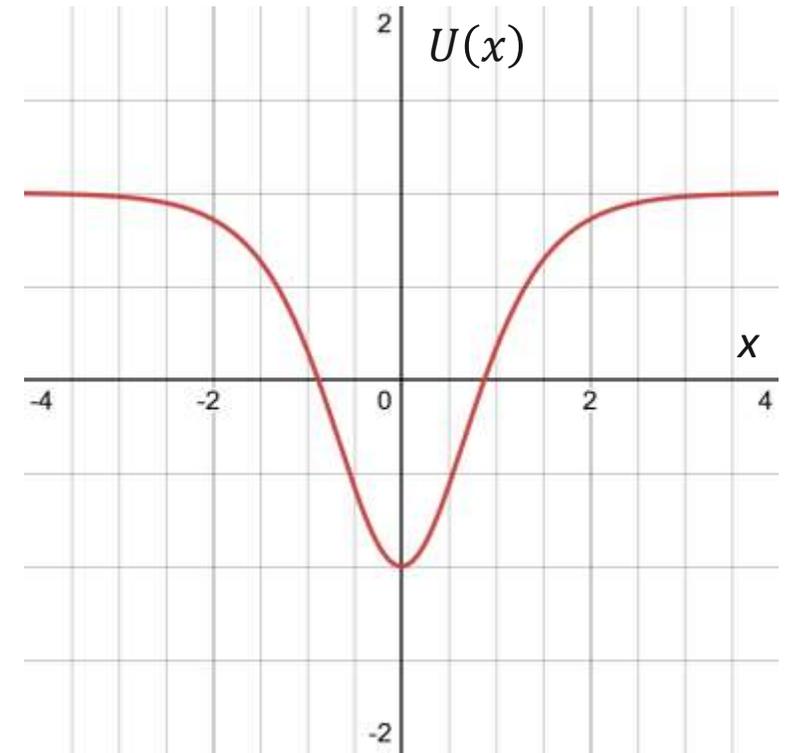
Для модели синус-Гордон $V(\varphi) = 1 - \cos\varphi$, $\varphi_k(x) = 4\arctan e^x$, получим

$$U(x) = 1 - \frac{2}{\cosh^2 x}.$$

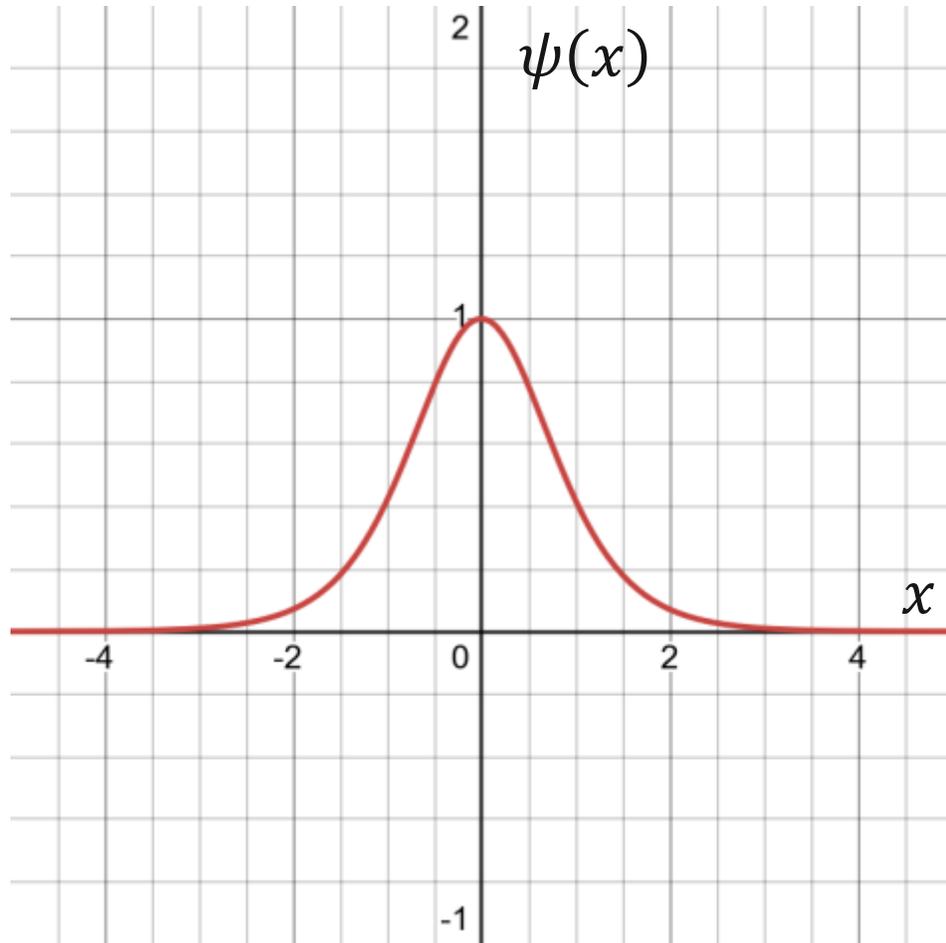
Аналитические решения этой задачи даны следующим образом:



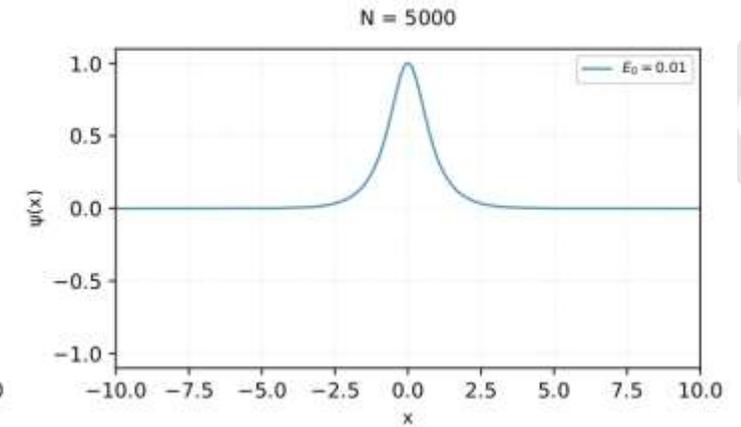
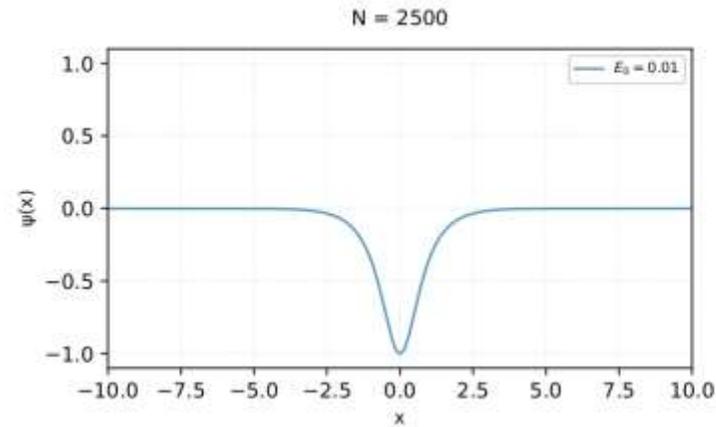
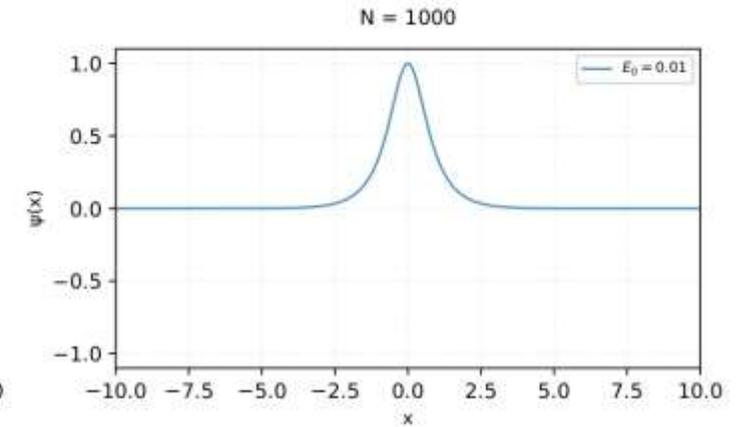
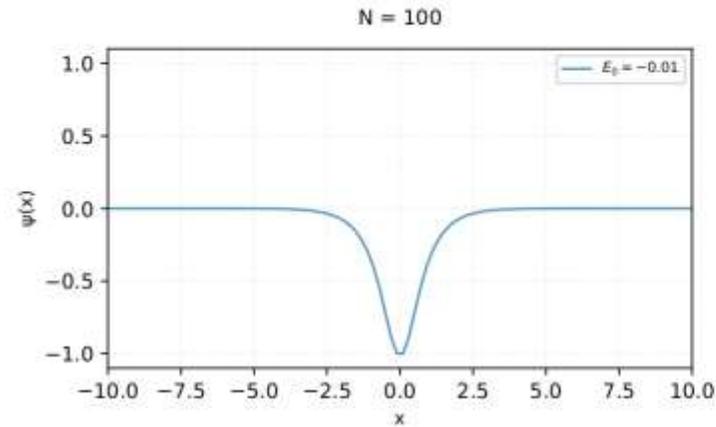
$$\psi_0(x) = A \left(\frac{1}{\cosh x} \right)^2, \quad \omega_0 = 0.$$



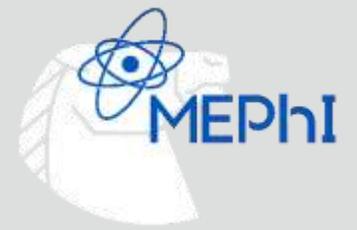
Результаты аналитического и численного методов



Собственные функции ($x \in [-10.00, 10.00]$)



“Модифицированный φ^6 ”

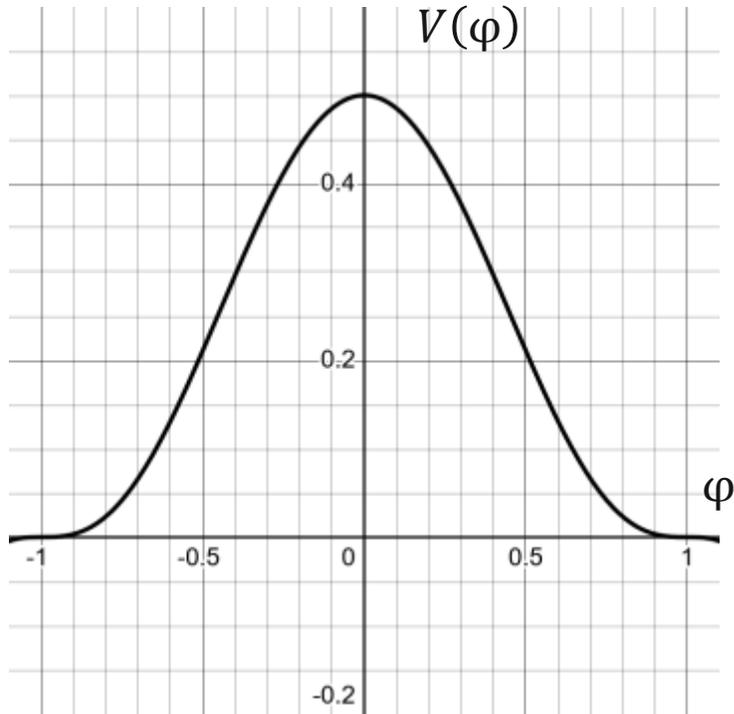


Для данной модели:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} |1 - \varphi^2|^3.$$

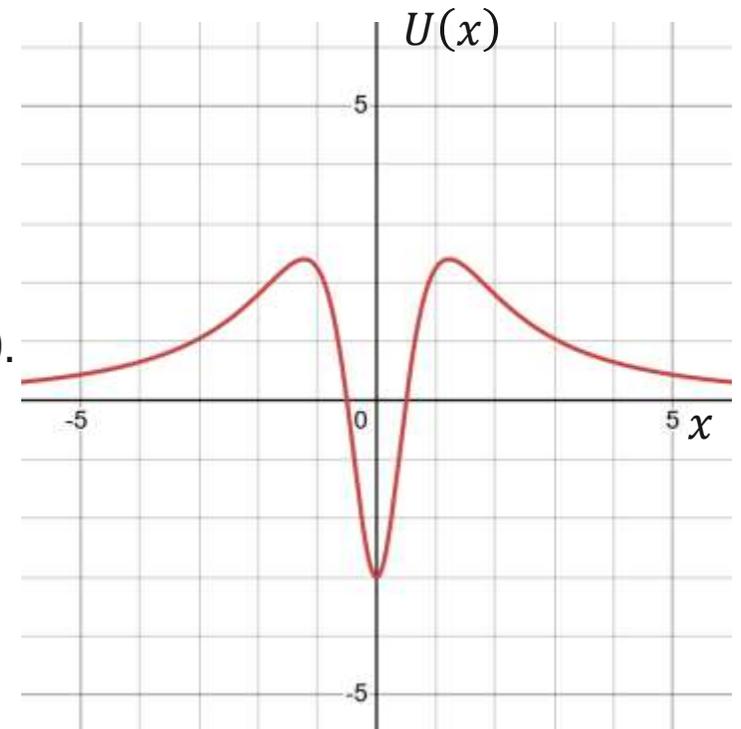
Потенциал уравнения Шредингера

$$U(x) = \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right) \left(\frac{15x^2}{1+x^2} - 3\right).$$

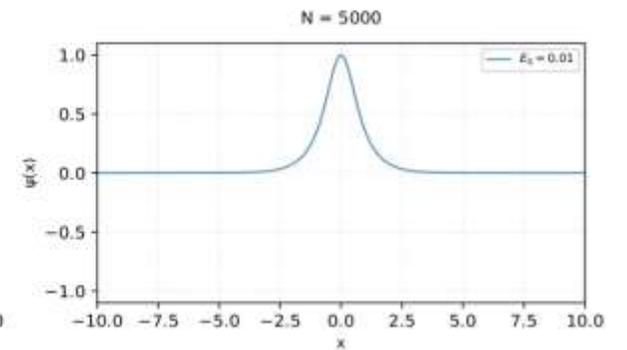
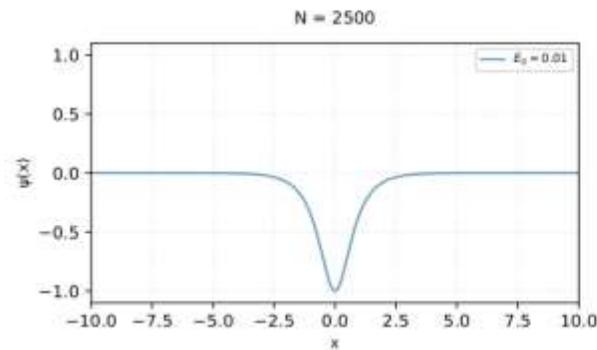
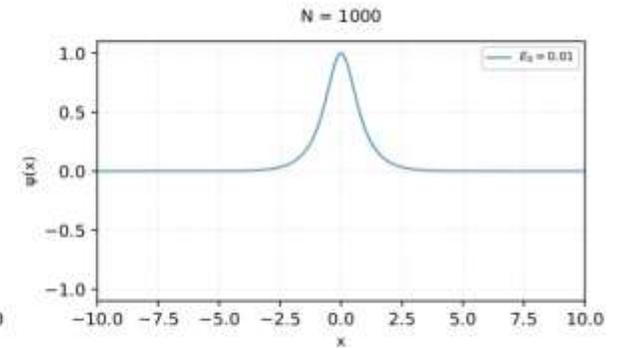
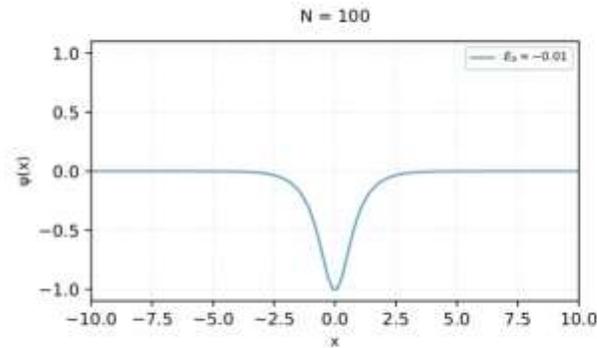
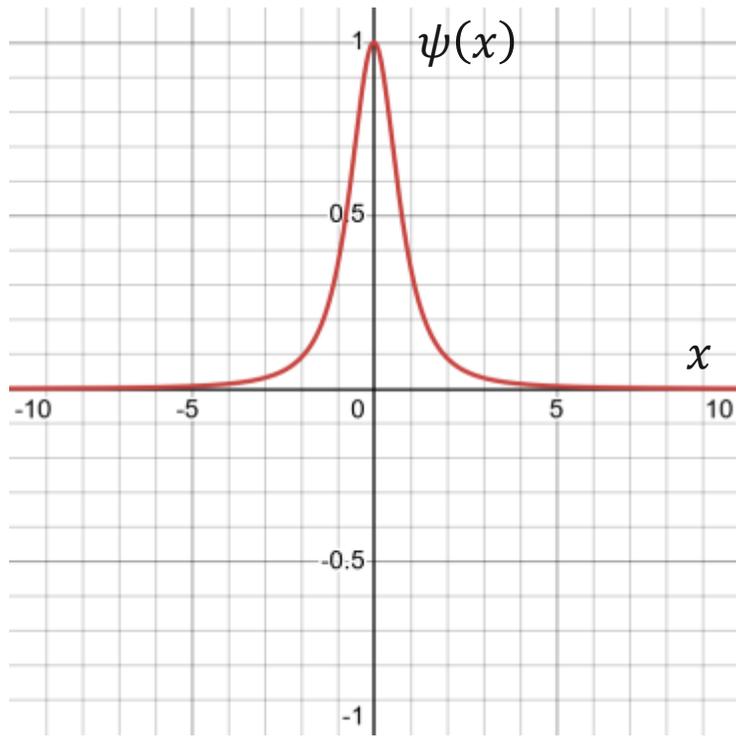
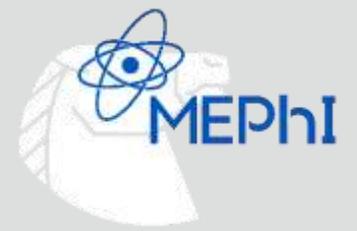


Аналитическое решение:

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^4 + 2x^2 + 1}, \quad \omega_0 = 0.$$



Результаты аналитического и численного методов

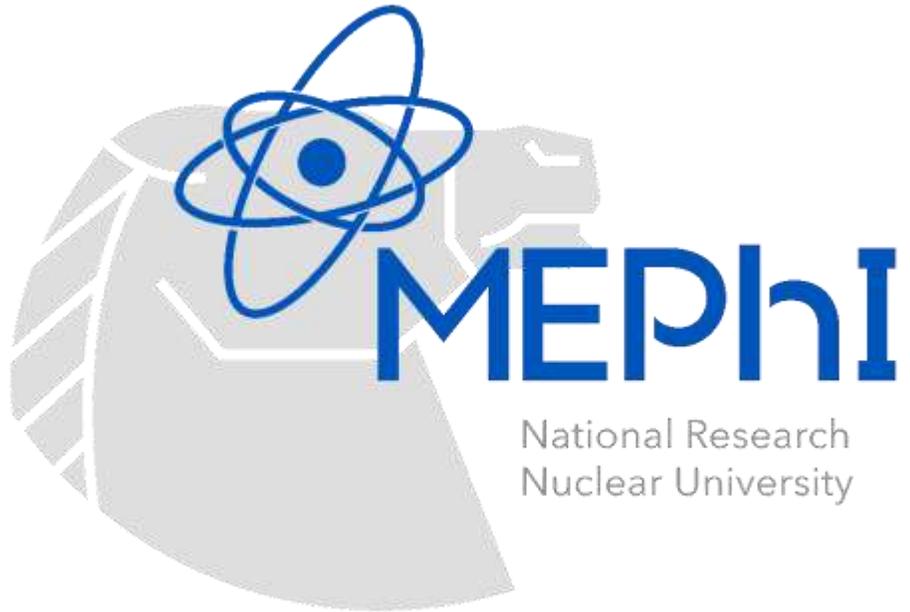


В ходе работы были изучены спектры возбуждений кинка для моделей:

- φ^4
- Синус-Гордон
- Модифицированный φ^6

Для каждой модели поставлена и решена (численно и аналитически) задача о спектре малых возбуждений кинка.

В дальнейшем полученные результаты будут применены к исследованиям резонансных явлений в столкновениях кинков.



Спасибо за внимание!

27.05.2025