

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
МАСС ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР ПО ДАННЫМ
МИКРОЛИНЗИРОВАНИЯ**

Научный руководитель

_____ Е. С. Шлепкина

Студент М24-114

_____ Б. Ю. Мучкинова

Консультант

_____ К. М. Белоцкий

Москва 2025

Содержание

1	Введение	3
2	Задача	3
2.1	Постановка задачи	3
2.2	Параметры кластера	4
3	Геометрия	4
3.1	Найдем зависимость прицельного параметра b от продолжительности T :	5
3.2	Найдем распределение по прицельному параметру $\frac{dw}{db_\theta}$	5
4	Распределения ПЧД по массам	6
4.1	Найдем распределение по продолжительности события, $M_{\text{РВН}} = M_\odot$	6
4.2	Найдем распределение при $f(m) \propto m^{-2}$	6
4.3	Найдем распределение при логнормальном распределении масс ПЧД	8
4.4	Оптимизация	8
5	Заключение	9

1 Введение

Открытие LIGO/Virgo гравитационных волн от слияний десятков черных дыр солнечной массы привело к повышенному интересу к первичным черным дырам (ПЧД) как кандидатам в скрытую массу. ПЧД — это черные дыры, которые образуются в ранней Вселенной. Наиболее часто изучаемым механизмом образования является коллапс больших возмущений плотности, вызванных инфляцией. ПЧД могут формировать скопления. Это может происходить за счет случайного (пуассоновского) пространственного распределения одиночных ПЧД или за счет специфики самого механизма их рождения (например, коллапс доменных стенок, образованных в результате фазовых переходов на стадии инфляции) [1–9].

Одним из наблюдательных проявлений ЧД может являться эффект гравитационного микролинзирования удаленных светил (звезд, квазаров и др.). Звездное микролинзирование — это временное усиление светимости, которое возникает, когда компактный объект (линза) проходит близко к лучу зрения звезды. Различные обзоры микролинзирования наложили жесткие ограничения на количество компактных объектов в гало Млечного Пути.

При исследовании гравитационных линз часто оказывается достаточным рассмотрение эффекта в приближение тонкой линзы. Это сильно упрощает вычисления, и оправдано тем, что характерные масштабы (расстояние от наблюдателя до источника и линзы) много больше, чем характерный размер линзы (т.е. области, где преимущественно происходит отклонение лучей света).

Кластеры ПЧД могут формироваться в ранней Вселенной в результате различных механизмов, включая:

- Коллапс крупномасштабных возмущений плотности
- Фазовые переходы в инфляционный период
- Распад космологических топологических дефектов

2 Задача

2.1 Постановка задачи

Конечной целью исследования является пересмотр результатов экспериментов MACHO, OGLE и др, в рамках представления о кластерной структуре первичных черных дыр. Мы используем термин «кластер» по отношению ПЧД во избежание путаницы с термином «скопление», преимущественно использующееся для звезд. ПЧД массы m могут быть собраны в кластеры массы M_{cl} . Они могут подпадать под ограничения на одиночные ПЧД как с массами m , так и M_{cl} в зависимости от параметров (компактности) кластера и вида наблюдений (ограничений). Но также могут их и избегать! Наша общая работа нацелена на поиск таких параметров, чтобы избежать максимально и те (на m), и те (на M_{cl}) ограничения. Данная работа изучает возможность ослабления ограничения на $m \approx M_{\odot}$ по микролинзированию. Работа по пересмотру ограничения на ПЧД массы $M \approx 10^4 M_{\odot}$ ведется отдельно.

В основе работы лежат данные эксперимента MACHO [10], результатом которого стали 19 одиночных событий и 1 двойное событие микролинзирования (см. рисунок 1).

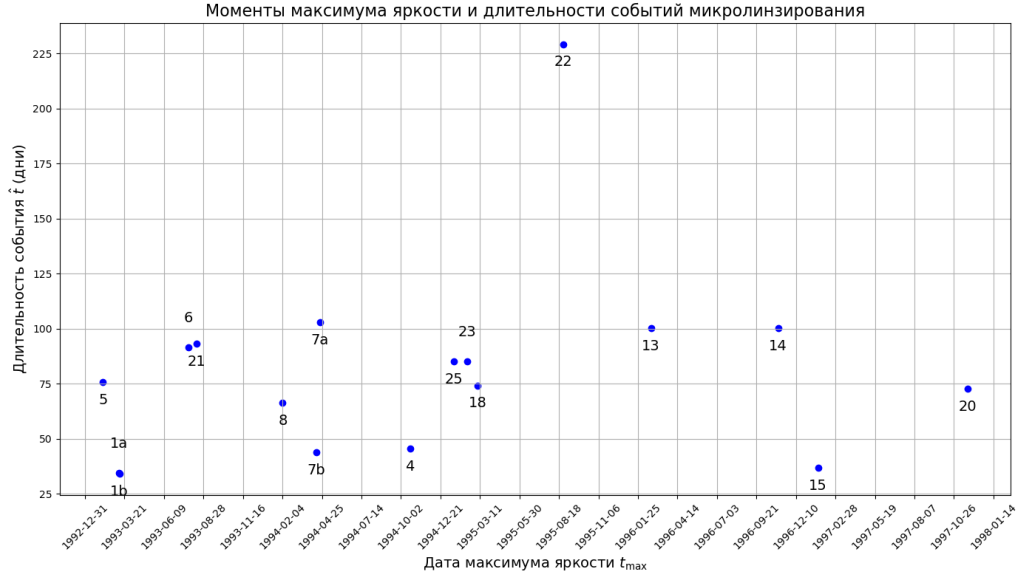


Рисунок 1 — Моменты максимума яркости и длительности событий микролинзирования

2.2 Параметры кластера

Параметры кластера брались, следуя работе [11]

- $R = 1$ пк – радиус кластера;
- $M = 10^4 M_{\odot}$ – масса кластера;
- $r_0 = 0.1R$ – радиус ядра кластера («кора»);
- профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотношением:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R \end{cases}.$$

- $f(m) = \delta(m - M_{\odot}), m^{-2}, \text{PDF}_{\log-normal}$ – распределение ПЧД в кластере по массам.

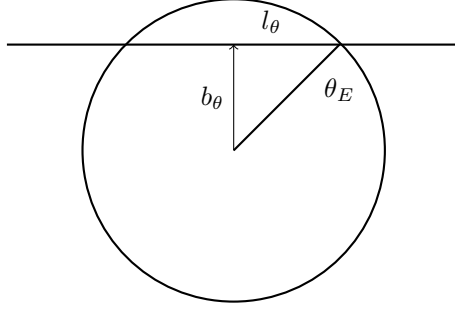
Угол Хвольсона-Эйнштейна определен как

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (1)$$

где D_d, D_s, D_{ds} – расстояния между наблюдателем, линзой и источником.

3 Геометрия

В данной работе рассматривался плоский кластер.



l_θ – половина хорды в угловых размерах;

b_θ – прицельный параметр в угловых размерах;

θ_E – угол Хвольсона-Эйнштейна в угловых размерах;

v_θ – относительная скорость движения ПЧД и звезды в угловых размерах;

T – продолжительность события.

3.1 Найдем зависимость прицельного параметра b от продолжительности T :

$$\begin{aligned}
 l_\theta &= \sqrt{\theta_E^2 - b_\theta^2} \\
 T &= \frac{2l_\theta}{v_\theta} = \frac{2\sqrt{\theta_E^2 - b_\theta^2}}{v_\theta} \\
 \theta_E^2 - b_\theta^2 &= \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2 \\
 \theta_E^2 &= 2r_0 \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{M_{\text{РВН}}}{M_\odot} \\
 b_\theta &= \sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2} = b_\theta(T) \\
 \frac{db_\theta(T)}{dT} &= \frac{1}{2\sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2}} \left(-\frac{v_\theta^2}{4} 2T\right) = -\frac{v_\theta^2 T}{4\sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2}} \\
 T &< \frac{2\theta_E}{v_\theta}
 \end{aligned}$$

3.2 Найдем распределение по прицельному параметру $\frac{dw}{db_\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{db_\theta} &= \text{const} \\
 \int_0^{\theta_E} \frac{dw}{db_\theta} db_\theta &= 1 = \text{const} \cdot \theta_E \\
 \text{const} &= \frac{1}{\theta_E} \\
 \frac{dw}{db_\theta} &= \frac{1}{\theta_E}
 \end{aligned}$$

4 Распределения ПЧД по массам

4.1 Найдем распределение по продолжительности события, $M_{\text{РВН}} = M_{\odot}$

$$\frac{dw}{dT} = \frac{dw}{db_{\theta}} \cdot \left| \frac{db_{\theta}}{dT} \right| \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dT} = \frac{1}{\theta_E} \cdot \frac{v_{\theta}^2 T}{4\sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_{\theta} T}{2}\right)^2}} \quad (3)$$

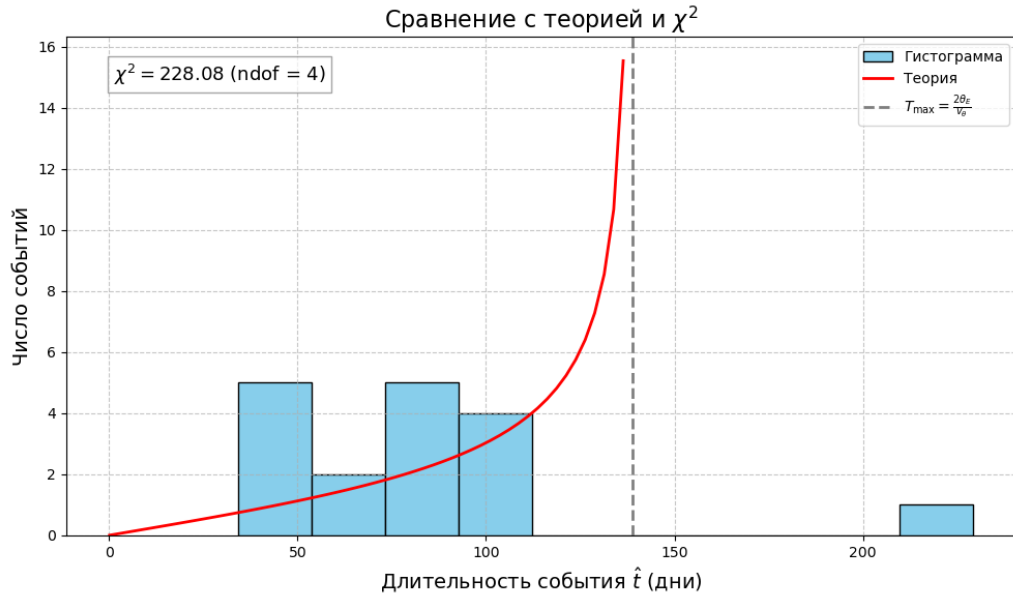


Рисунок 2 — Фитирование при одинаковых массах ПЧД

4.2 Найдем распределение при $f(m) \propto m^{-2}$

$$\frac{dw}{dT} = \int_{m_1}^{m_2} \frac{dw}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dT} \cdot f_1(m) dm$$

$$\frac{dw}{dT} = \int_{m_1}^{m_2} \frac{v_{\theta}^2 T}{4\theta_E(m)\sqrt{\theta_E^2(m) - (v_{\theta} T)^2}} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} \cdot m^{-2} dm$$

$$f_1(m) = A m^{-2}$$

$$\int_{m_1}^{m_2} A m^{-2} dm = 1 \quad \Rightarrow \quad A \left(-\frac{1}{m} \right) \Big|_{m_1}^{m_2} =$$

$$= -A \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

Если $m_2 \rightarrow \infty$, то

$$A = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{1 - \frac{m_1}{m_2}} \rightarrow m_1$$

Таким образом,

$$f_1(m) = \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1} \cdot m^{-2}$$

$$\frac{dw}{dT} = \int_{m_1/M_\odot}^{m_2/M_\odot} \frac{v_\theta^2 T}{4 \theta_E(M_\odot) \left(\frac{m}{M_\odot}\right)^{1/2} \sqrt{\theta_E^2(M_\odot) \left(\frac{m}{M_\odot}\right) - (v_\theta T)^2}} \cdot \frac{\frac{m_2}{M_\odot} \frac{m_1}{M_\odot}}{\frac{m_2}{M_\odot} - \frac{m_1}{M_\odot}} \cdot \left(\frac{m}{M_\odot}\right)^{-2} d\left(\frac{m}{M_\odot}\right)$$

$$\frac{dw}{dT}(T) = \int_{\mu_{\min}(T)}^{m_2} \frac{v_\theta^2 T}{4 \theta_E \sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2}} \cdot A \cdot \mu^{-2} d\mu \quad (4)$$

где: $\theta_E = \theta_{E0} \sqrt{\mu}$, $A = \frac{m_1 m_2}{m_2 - m_1}$, $\mu_{\min}(T) = \max\left(\frac{(v_\theta T/2)^2}{\theta_{E0}^2}, m_1\right)$

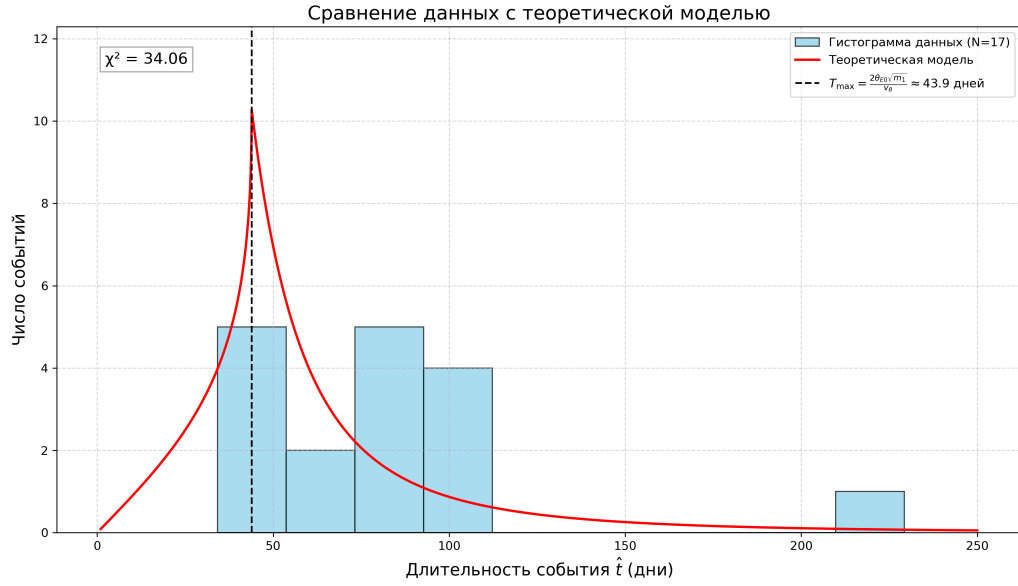


Рисунок 3 — Фитирование при распределении масс ПЧД $f(m) \propto m^{-2}$

4.3 Найдём распределение при логнормальном распределении масс ПЧД

$$\frac{dw}{dT} = \int_{\mu_{\min}(T)}^{m_2} \frac{v_\theta^2 T}{4\theta_E \sqrt{\theta_E^2 - \left(\frac{v_\theta T}{2}\right)^2}} \cdot \text{PDF}_{\log\text{-normal}}(\mu) d\mu, \quad (5)$$

где $\text{PDF}_{\log\text{-normal}}(\mu)$ – логнормальное распределение [12]

$$\text{PDF}_{\log\text{-normal}}(\mu) = \frac{A}{\mu\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln \mu - \mu_{\log})^2}{2\sigma_{\log}^2}\right) \quad (6)$$

с параметрами:

- $\mu_{\log} = 0$ — среднее в логарифмическом пространстве
- $\sigma_{\log} = 1$ — стандартное отклонение
- A — нормировочная константа, обеспечивающая $\int_{m_1}^{m_2} \text{PDF}(\mu) d\mu = 1$

1. **Пик распределения T_{peak} :** Численно находится как максимум $\frac{dw}{dT}$. Для заданных параметров:

$$T_{\text{peak}} \approx 81.2 \text{ дней}$$

2. **Критическая длительность T_{max} :**

$$T_{\text{max}} = \frac{2\theta_{E0}\sqrt{m_1}}{v_\theta} \approx 43.9 \text{ дней}$$

При $T > T_{\text{max}}$ нижний предел интегрирования фиксируется: $\mu_{\min} = m_1$.

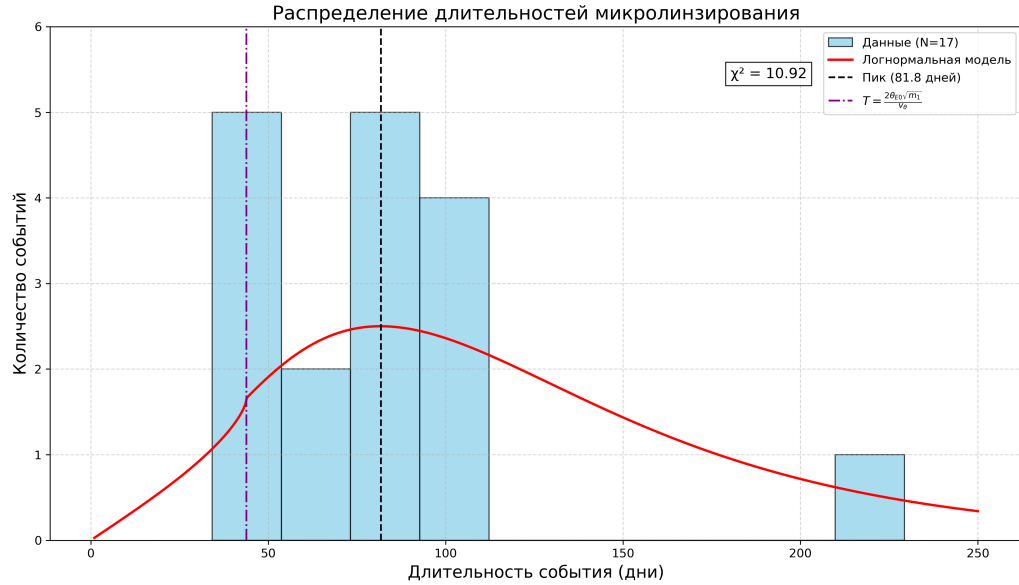


Рисунок 4 — Фитирование логнормальным распределением масс ПЧД

4.4 Оптимизация

Была осуществлена оптимизация параметров проводилась методом минимизации статистики χ^2 .

В результате оптимизации были получены следующие значения параметров:

$$\mu^* = -0.58, \quad \sigma^* = 1.26$$

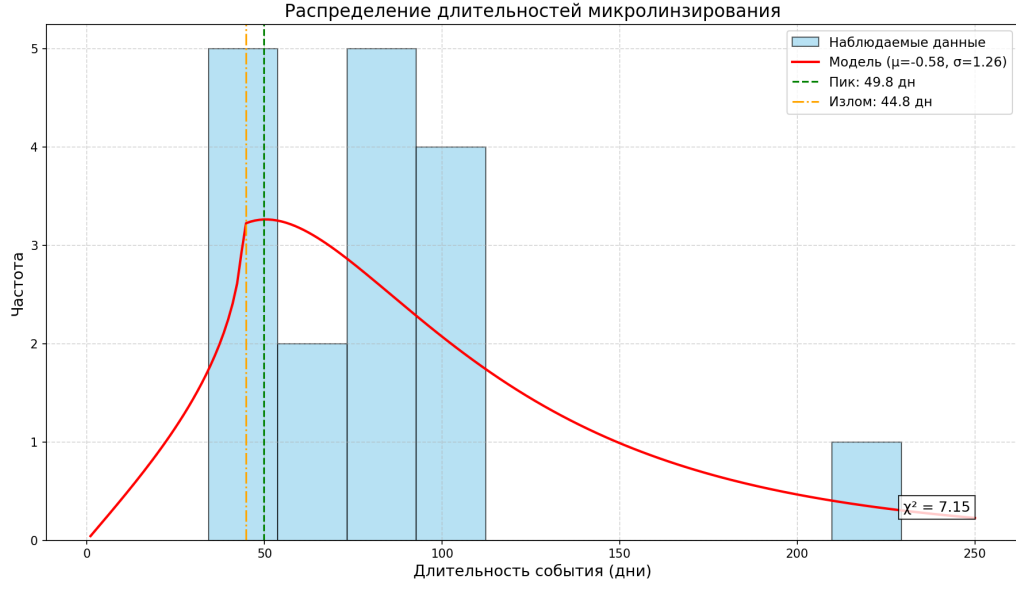


Рисунок 5 — Фитирование логнормальным распределением масс ПЧД после оптимизации параметров

$$\chi^2_{\min} = 7.15$$

5 Заключение

Проведено сравнение трех моделей распределения масс ПЧД:

1. Дельта-функция (все ПЧД одинаковой массы) ($\chi^2 = 228$);
2. Степенное распределение ($f(m) \propto m^{-2}$) ($\chi^2 = 34$);
3. Логнормальное распределение ($\chi^2 = 7.2$).

Наилучшее согласие с наблюдательными данными достигнуто для логнормального распределения с параметрами:

$$\mu_{\log} = -0.58, \quad \sigma_{\log} = 1.26 \quad (7)$$

В будущем планируется расширить исследование, применив предложенную методику к другим крупным обзорам, таким как OGLE [13] и GAIA, что позволит увеличить статистику и, возможно, уточнить параметры распределения масс ПЧД.

Список литературы

- [1] N. Afshordi, P. McDonald and D.N. Spergel, *Primordial black holes as dark matter: The Power spectrum and evaporation of early structures*, *Astrophys. J. Lett.* **594** (2003) L71 [astro-ph/0302035].
- [2] M.Y. Khlopov, R.V. Konoplich, S.G. Rubin and A.S. Sakharov, *First-order phase transitions as a source of black holes in the early universe*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 153.
- [3] S.G. Rubin, M.Y. Khlopov and A.S. Sakharov, *Primordial black holes from nonequilibrium second order phase transition*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 51 [hep-ph/0005271].
- [4] S.G. Rubin, A.S. Sakharov and M.Y. Khlopov, *The Formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe*, *J. Exp. Theor. Phys.* **91** (2001) 921 [hep-ph/0106187].
- [5] M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka and S. Yokoyama, *Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 061101 [1603.08338].
- [6] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka and K.S. Thorne, *Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries*, *Astrophys. J. Lett.* **487** (1997) L139 [astro-ph/9708060].
- [7] K. Ioka, T. Chiba, T. Tanaka and T. Nakamura, *Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 063003 [astro-ph/9807018].
- [8] N. Kaiser, *On the Spatial correlations of Abell clusters*, *Astrophys. J. Lett.* **284** (1984) L9.
- [9] C. Animali and V. Vennin, *Clustering of primordial black holes from quantum diffusion during inflation*, 2402.08642.
- [10] MACHO collaboration, *The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations*, *Astrophys. J.* **542** (2000) 281 [astro-ph/0001272].
- [11] K.M. Belotsky, V.I. Dokuchaev, Y.N. Eroshenko, E.A. Esipova, M.Y. Khlopov, L.A. Khromykh et al., *Clusters of primordial black holes*, *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) 246 [1807.06590].
- [12] P. Holgate, *The lognormal characteristic function*, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **18** (1989) 4539.
- [13] S.-R. Lin, W. Luo, Y.-F. Cai, Q. Guo, L. Wei, B. Wang et al., *The density profile of Milky Way dark matter halo constrained from the OGLE microlensing sky map*, *Astron. Astrophys.* **693** (2025) L8 [2211.00666].