

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Кафедра физики элементарных частиц (№40)

Отчет по НИРС на тему:

**Оценка важных при анализе черенковских колец
параметров телескопа TAIGA-IACT**

Место выполнения: МГУ имени М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени
Д.В. Скобельцына, Лаборатория наземной гамма-астрономии

Студент М24-114: Горбунов Д.С.

Руководитель работы: Волчугов П.А.(младший научный сотрудник)

Москва – 2025 г.

Введение

Цель работы:

Определить интегральную квантовую чувствительность телескопа TAIGA-IACT.

Основные задачи:

- 1) Оценить ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени;
- 2) Использовать преобразование Хафа для выделения одиночных мюонов по форме регистрируемых изображений на основе данных моделирования;
- 3) Теоретически найти распределение интенсивности черенковского излучения по дуге кольца;
- 4) Произвести мюонную калибровку на основании отобранных мюонных колец, полученных в рамках моделирования.

Актуальность:

Наземная гамма-астрономия использует для регистрации гамма-квантов косвенный метод - черенковское излучение ШАЛ (широких атмосферных ливней). Телескопы способны измерять потоки фотоэлектронов от черенковского излучения, но не фотонов. Таким образом, чтобы достоверно измерить энергию первичных частиц, необходимо знать точную связь числа черенковских фотонов с числом зарегистрированных фотоэлектронов. Одиночные мюоны позволяют установить эту связь путём расчёта числа испущенных фотонов и числа зарегистрированных и таким образом оценить искомую пропускную способность, то есть интегральную квантовую эффективность.

Телескоп TAIGA- IACT

В настоящее время под первичными космическими лучами (ПКЛ) принято понимать любые заряженные частицы, приходящие на Землю из космоса. В состав ПКЛ входят солнечные космические лучи, энергия которых не превышает десятков ГэВ (10^9 эВ) и космические лучи галактического и внегалактического происхождения, спектр которых является степенным и обрывается при энергии $\sim 10^{20}$ эВ.

Нестандартный, но весьма перспективный подход, расширяющий возможности традиционных IACT (Imaging Atmospheric Cherenkov Telescope) телескопов в области высоких энергий, сейчас реализуется в гамма-обсерватории TAIGA (unka Advanced Instrument for cosmic rays and Gamma Astronomy). Он заключается в совместном использовании IACT телескопов с широкоугольными черенковскими детекторами. Широугольная черенковская установка ШАЛ представляет собой сеть черенковских детекторов с угловым обзором $\sim 60^\circ$, распределенных в пространстве на площади $\sim 1 \text{ км}^2$.

Развитие в атмосфере ШАЛ, индуцированного первичным адроном высокой энергии, имеет ряд характерных отличий от аналогичного ливня порожденного гамма-квантом. Этот факт используется в IACT методике разделения ПКЛ (первичных космических лучей) и гамма-квантов: формируемое телескопом изображение ливня, посредством регистрации черенковского излучения, содержит информацию о продольном и поперечном развитии ШАЛ в атмосфере. Для улучшения эффективности подавления адронного фона при работе с IACT телескопами зачастую используется стереоскопический подход — система IACT телескопов, расположенных таким образом, чтобы изображение ШАЛ могло быть зарегистрировано, по меньшей мере, двумя из них.

Телескоп имеет сферический отражатель диаметром 2,15 м и фокусным расстоянием 4,75 м. Регистрирующая камера телескопа имеет 22 кластера ФЭУ, почти каждый из которых содержит 28 фотоумножителей (всего порядка 600 фотоумножителей). Каждый пиксель имеет диаметр 3 см, что в угловом эквиваленте соответствует примерно $0,36^\circ$. Угловой радиус поля зрения телескопа составляет $4,8^\circ$.



Рисунок 1. Фотография телескопа в эксперименте TAIGA

**Оценка предельной энергии мюонов,
при которой зависимостью энергии от
черенковского угла можно пренебречь**

Энергия гамма-квантов черенковского излучения в общем случае зависит от величины раствора конуса, образованного движущимися быстрее скорости света в данной среде мюонами, что делает крайне затруднительными многие расчёты параметров этого излучения. Поэтому найдём такую энергию, начиная с которой этой зависимостью можно будет пренебречь.

Высота гамма-обсерватории TAIGA над уровнем моря:

$$h = 700 \text{ м}$$

Коэффициент преломления воздуха на уровне обсерватории:

$$n = 1 + 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{h}{7100 \text{ м}}} = 1 + 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{700 \text{ м}}{7100 \text{ м}}} = 1,000262773$$

Раствор черенковского конуса:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{n \cos \theta}$$

Энергия покоя мюона:

$$E_0 = 105,659 \text{ МэВ}$$

Полная энергия мюона:

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n \cos \theta}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta}}}$$

Пороговая энергия мюона:

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow E_{\text{порог}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2}}} = 4610 \text{ МэВ} = 4,6 \text{ ГэВ}$$

Предельный угол черенковского излучения:

$$\beta = 1 \Rightarrow \cos \theta_{\text{пред}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \theta_{\text{пред}} = \arccos \frac{1}{n} = \arccos \frac{1}{1,000262773} = 1,31^\circ$$

Условимся, что предельное допустимое отклонение черенковского угла для нас составляет:

$$p = 5\%$$

Тогда критический раствор черенковского конуса:

$$\theta_{\text{крит}} = \theta_{\text{пред}}(1 - p) = 1,31^\circ * (1 - 0,05) = 1,24^\circ$$

Тогда критическая энергия мюонов, при которой зависимость энергии от раствора черенковского конуса можно пренебречь:

$$E_{\text{крит}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta_{\text{крит}}}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2 \cos^2 1,24^\circ}}} = 14425 \text{ МэВ} = 14,4 \text{ ГэВ}$$

Далее в работе мы будем рассматривать лишь те мюоны, энергия которых больше критического значения:

$$E > E_{\text{крит}}$$

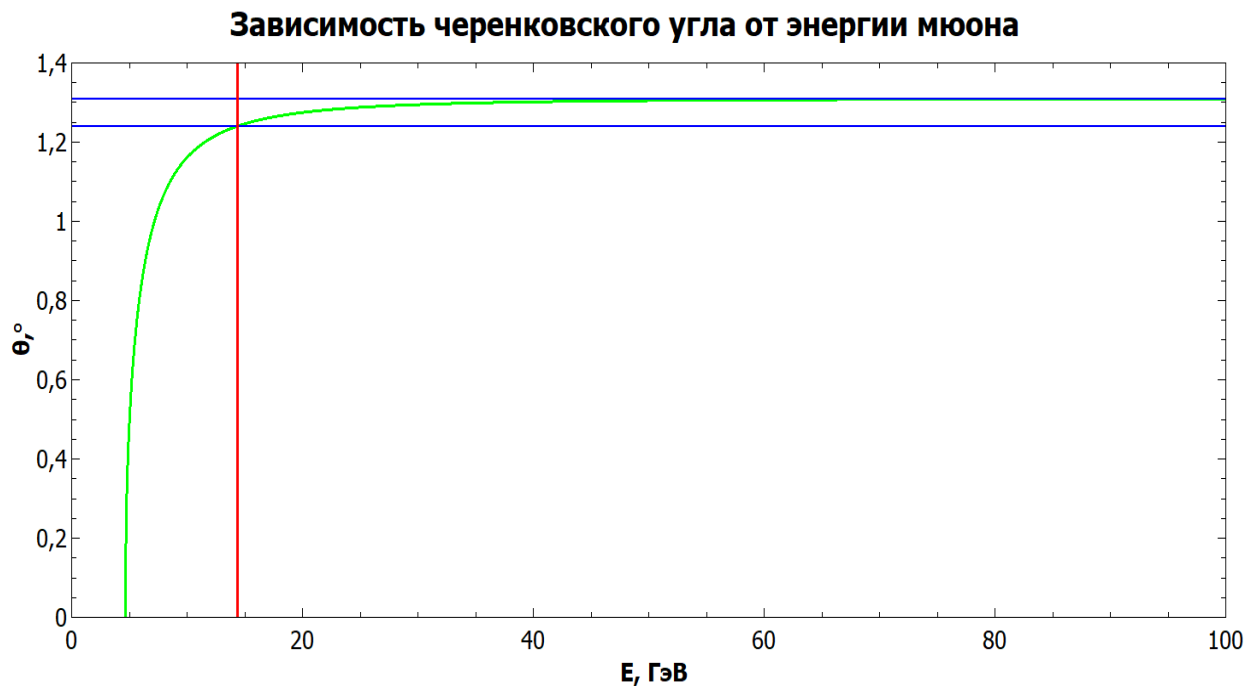


График 2. Зависимость энергии мюонов от раствора черенковского конуса

Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец телескопом TAIGA-IACT

Из справочной литературы¹:

$$\text{Для } E > E_1 = 12,51 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_1 = 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

$$\text{Для } E > E_2 = 16,68 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_2 = 3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

Так как для нашей энергии нет явного значения потока, то произведём линейную интерполяцию:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} &= \frac{\left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_{\text{крит}} - \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_1}{\left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_1} \\ \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_{\text{крит}} &= \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_1 + \left(\left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} \right)_1 \right) \frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} = \\ &= 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} + \left(3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} - 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \right) \frac{14,4 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}}{16,68 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}} = \\ &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \end{aligned}$$

Ожидаемое количество мюонных колец:

$$\begin{aligned} \int \frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt} d\Omega &= \int 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} d\Omega \\ \frac{dN_\mu}{dSdt} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int d\Omega \\ \frac{dN_\mu}{dSdt} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int_{0^\circ}^{1,31^\circ} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ \frac{dN_\mu}{dSdt} &= -4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \cos \theta \Big|_{0^\circ}^{1,31^\circ} \varphi \Big|_0^{2\pi} \\ \frac{dN_\mu}{dSdt} &= -4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} (\cos 1,31^\circ - \cos 0^\circ)(2\pi - 0) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dSdt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi(1 - \cos 1,31^{\circ})$$

$$\int \frac{dN_{\mu}}{dSdt} dS = \int 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi(1 - \cos 1,31^{\circ}) dS$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi(1 - \cos 1,31^{\circ}) \int dS$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi(1 - \cos 1,31^{\circ}) S$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} 2\pi(1 - \cos 1,31^{\circ}) \pi R^2$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^{\circ}) 2\pi^2 R^2$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 4,610 \frac{\text{мЮОН}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^{\circ}) * 2 * 3,14^2 * 2,15^2 \text{м}^2$$

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = 0,110 \frac{\text{мЮОН}}{\text{с}} = 7 \frac{\text{мЮОН}}{\text{мин}} = 396 \frac{\text{мЮОН}}{\text{час}}$$

Оценка углового размера пикселя

Для расчёта потока черенковских фотонов, падающих на конкретный пиксель, необходимо знать его угловую величину.

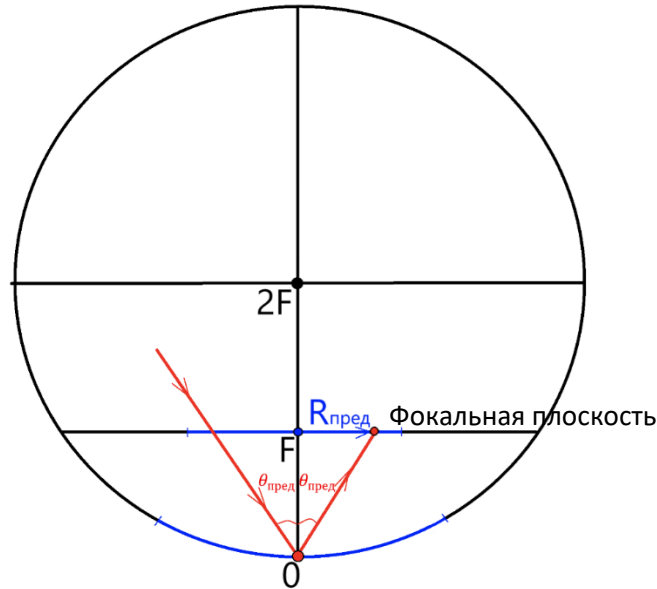


Рис. 3. Радиус черенковского кольца в фокальной плоскости телескопа

Фокусное расстояние телескопа:

$$F = 4,75 \text{ м} = 475 \text{ см}$$

Радиус черенковского кольца в фокальной плоскости телескопа:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{пред}} = \frac{R_{\text{пред}}}{F} \Leftrightarrow R_{\text{пред}} = F \operatorname{tg} \theta_{\text{пред}} = 475 \text{ см} * \operatorname{tg} 1,31^{\circ} = 10,86 \text{ см}$$

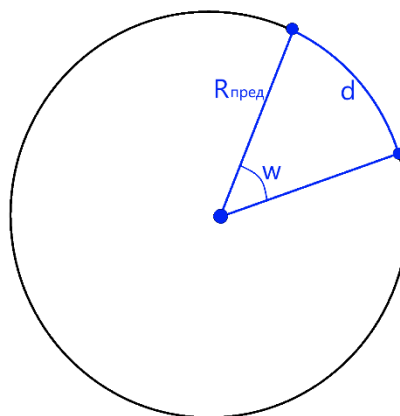


Рис. 4. Линейный и угловой размеры пикселя в фокальной плоскости

Диаметр пикселя:

$$d = 3 \text{ см}$$

Общее количество пикселей:

$$N_{\text{пиксель}} \sim 600$$

Угловой радиус поля зрения телескопа:

$$i_{\text{пред}} = 4,8^\circ$$

Так как угол $i_{\text{пред}}$ относительно мал, то в первом приближении будем считать, что все мюоны падают перпендикулярно поверхности зеркала, а значит все пиксели будут находиться на расстоянии $R_{\text{пред}}$ от центра фокальной плоскости. Тогда угловой размер пикселя:

$$\frac{\omega}{360^\circ} = \frac{d}{2\pi R_{\text{пред}}} \Leftrightarrow \omega = \frac{360^\circ d}{2\pi R_{\text{пред}}} = \frac{360^\circ * 3 \text{ см}}{2 * 3,14 * 10,86 \text{ см}} = 15,83^\circ$$

Расчёт длины хорды в плоскости отражателя

Число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца будет пропорционально площади зеркала, на которую попадут черенковские фотоны. Для оценки этой площади введём хорду, которая будет рассекать поверхность зеркала следующим образом:

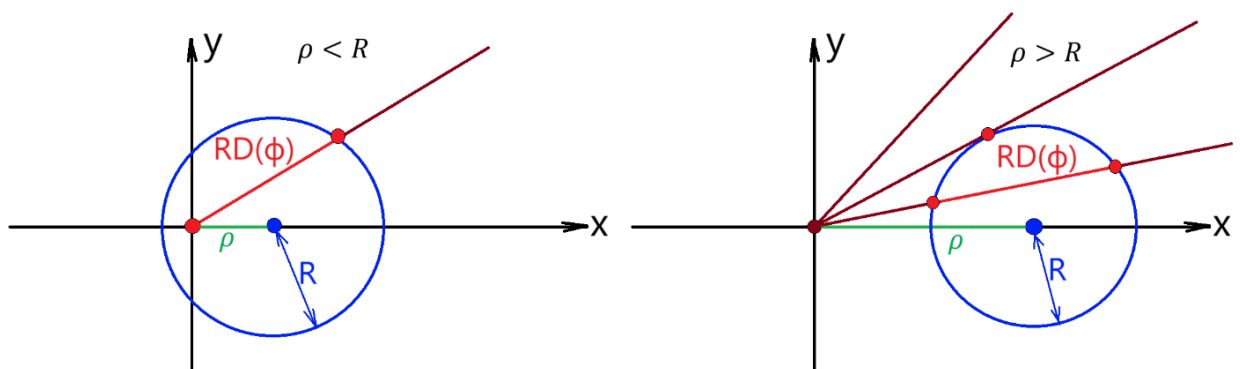


Рис. 5. Построение хорды в плоскости отражателя, вдоль которой

*собирается черенковское излучение для заданного азимутального угла
(цифрами указано количество пересечений хорды с поверхностью зеркала)*

Уравнение окружности в плоскости отражателя в системе координат, центром которой является точка $(\rho, 0)$:

$$(x - \rho)^2 + y^2 = R^2$$

Перейдём к полярным координатам:

$$(r \cos \varphi - \rho)^2 + (r \sin \varphi)^2 = R^2$$

$$r^2 \cos^2 \varphi - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$$

$$r^2 - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 - R^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r_{\pm}(\varphi) &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - (\rho^2 - R^2)} = \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 + R^2} = \\ &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = R \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right) \end{aligned}$$

Условие существования хорды вследствие положительности подкоренного выражения:

$$R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi > 0 \Leftrightarrow R^2 > \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow R > \rho |\sin \varphi| \Leftrightarrow |\sin \varphi| < \frac{R}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin |\varphi| < \frac{R}{\rho} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin |\varphi| < \frac{R}{\rho} < 1, \rho > R \\ \sin |\varphi| < 1 < \frac{R}{\rho}, \rho < R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^\circ < |\varphi| < \arcsin \frac{R}{\rho} < 90^\circ, \rho > R \\ 0^\circ < |\varphi| < 180^\circ, \rho < R \end{cases}$$

Длина хорды в плоскости отражателя, вдоль которой собирается черенковское излучение для заданного азимутального угла:

$$RD(\varphi) = \begin{cases} r_+(\varphi) = R \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R \\ r_+(\varphi) - r_-(\varphi) = 2R \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R \end{cases}$$

Обезразмерим величину хорды, поделив её на радиус зеркала:

$$D(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{R} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi}, \rho < R \\ 2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R \end{cases}$$

Если $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$, то возможны оба случая (и $\rho < R$, и $\rho > R$).
При этом длина дуги кольца $0^\circ < \theta_{arc} < 180^\circ$.

Если $90^\circ < |\varphi| < 180^\circ$, то возможен только случай $\rho < R$.
При этом длина дуги кольца $180^\circ < \theta_{arc} < 360^\circ$.

Так как, однозначно установить случай мы можем только при условии $\theta_{arc} > 180^\circ$, то будем отбирать лишь те черенковские кольца, которые удовлетворяют этому условию.

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow D(\varphi) = \frac{0}{R} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{0^2}{R^2} \sin^2 \varphi} = 1$$

(распределение хорд равномерно по азимутальному углу)

В случае граничного прицельного параметра:

$$\rho = R \Rightarrow D(\varphi) = \frac{R}{R} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2} \sin^2 \varphi} = 2 \cos \varphi$$

$$\rho = R \Rightarrow D(\varphi) = 2 \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2} \sin^2 \varphi} = 2 \cos \varphi$$

(равенство хорд в граничном случаи выполняется)

Расчёт граничных азимутальных углов пикселей

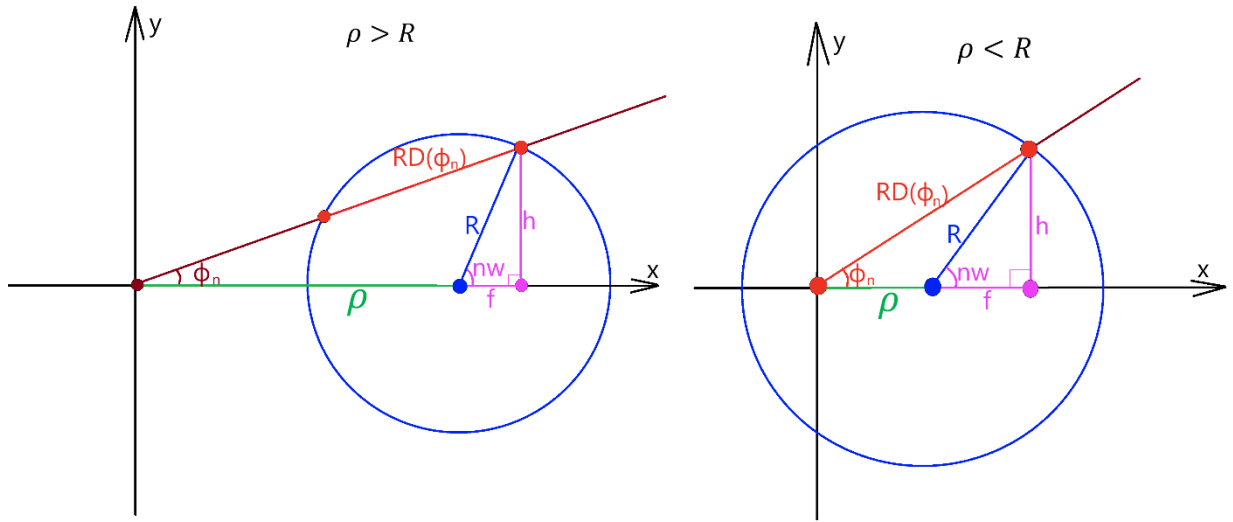


Рисунок 6. Расчёт граничных азимутальных углов пикселей

Как было указано выше, угловое распределение пикселей черенковского кольца в фокальной плоскости мы будем считать равномерным. Тогда и угловое распределение пикселей на зеркале телескопа тоже будет равномерным. Это даёт нам возможность рассчитать азимутальный угол n -й границы пикселей черенковского кольца, используя два прямоугольных треугольника:

$$\sin(n\omega) = \frac{h}{R} \Leftrightarrow h = R \sin(n\omega)$$

$$\cos(n\omega) = \frac{f}{R} \Leftrightarrow f = R \cos(n\omega)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{h}{\rho + f} = \frac{R \sin(n\omega)}{\rho + R \cos(n\omega)} \Leftrightarrow \varphi_n = \arg(\rho + R \cos(n\omega), R \sin(n\omega))$$

Наибольший номер границы пикселя:

$$n_{\max} = \left\lceil \frac{180^\circ}{\omega} \right\rceil = \left\lceil \frac{180^\circ}{15,83^\circ} \right\rceil = 11$$

Диапазон изменения номеров границ пикселей и номеров пикселей:

$$\varphi_n \Rightarrow -n_{\max} \leq n \leq n_{\max}$$

$$\Delta\varphi_n \Rightarrow -n_{max} \leq n \leq n_{max}$$

Величина дуги n -го пикселя:

$$\Delta\varphi_n = \begin{cases} 360^\circ - (\varphi_{n_{max}} - \varphi_{-n_{max}}), n = -n_{max} \\ \varphi_n - \varphi_{n-1}, n \neq -n_{max} \end{cases}$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{R \sin(n\omega)}{0 + R \cos(n\omega)} = \operatorname{tg}(n\omega) \Leftrightarrow \varphi_n = n\omega$$

$$\varphi_n = n\omega \cap \varphi_{n-1} = (n-1)\omega \Rightarrow \Delta\varphi_n = n\omega - (n-1)\omega = n\omega - n\omega + \omega = \omega$$

(распределение азимутальных углов равномерно)

Расчёт площади зоны зеркала, собирающей свет в один пиксель

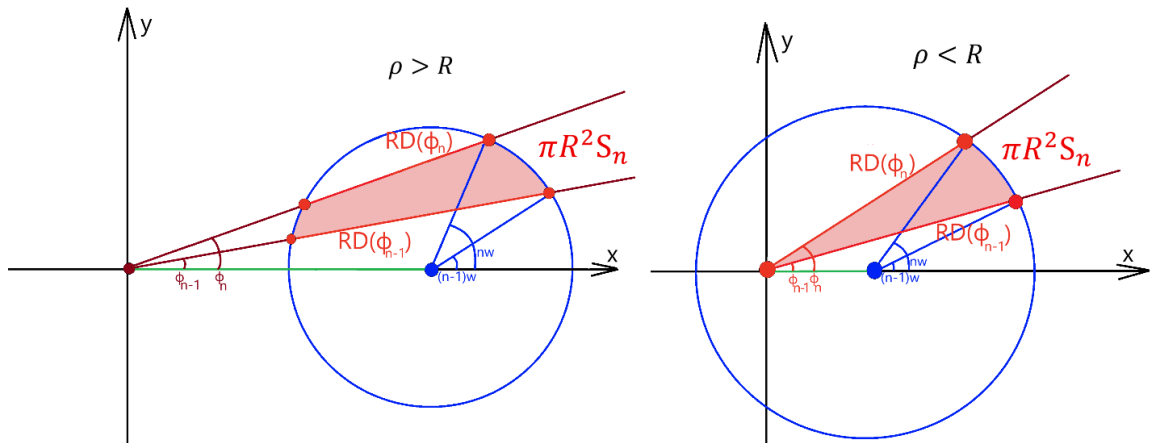


Рисунок 7. Расчёт площади зоны зеркала, собирающей свет в один пиксель

Площадь n -й зоны зеркала, собирающей свет в n -й пиксель, можно получить, проинтегрировав хорду $RD(\varphi)$ в пределах от $n-1$ -й до n -й границы пикселей:

$$S_{\pm} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} r_{\pm}^2(\varphi) d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi$$

Тогда доля площади всего круга, фотоны с которой собираются в n -й пиксель:

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_n\right) - \right. \\ \left. - \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_{n-1}\right) + \frac{\rho}{R} \left(\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_n} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \right), \rho < R \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_n\right) - \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_{n-1}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{R} \left(\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_n} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \right), \rho > R \end{cases}$$

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow S_n = \frac{\omega}{2\pi}$$

(распределение площадей равномерно по азимутальному углу)

Грубый алгоритм выделения колец

1. Рассмотрим событие, содержащее n пикселей, имеющих координаты (x_k, y_k) и вес m_k , где $1 \leq k \leq n$.

2. Вычислим центр черенковского кольца:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

3. Вычислим радиус черенковского кольца:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k ((x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2)}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Алгоритм выделения колец с помощью преобразования Хафа

1. Рассмотрим событие, содержащее n пикселей, имеющих координаты (x_k, y_k) и вес m_k , где $1 \leq k \leq n$.

2. Найдём пределы изменения координат пикселей $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$.

3. Разобьём прямоугольник, ограниченный пределами изменения координат пикселей, на d частей по каждой оси с интервалами:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{d}, \Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{d}.$$

4. Найдём координаты границ частей разбиения:

$$x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, 0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d.$$

5. Вычислим в каждом узле разбиения (x_i, y_j) радиус потенциального черенковского кольца:

$$R_{i,j}^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \left((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_j)^2 \right)}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

6. Вычислим среднее квадратичное отклонение координат пикселей черенковского кольца от каждого потенциального центра (x_i, y_j) :

$$(\Delta R_{i,j})^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \left(\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_j)^2} - R_{i,j} \right)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

7. Узел разбиения (x_i, y_j) , имеющий наименьшее среднее квадратичное отклонение $\Delta R_{i,j}$ будем считать центром черенковского кольца (x_c, y_c) .

8. Тогда радиус черенковского кольца:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k ((x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2)}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

9. Тогда среднее квадратичное отклонение координат пикселей черенковского кольца от его центра:

$$(\Delta R)^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2} - R)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

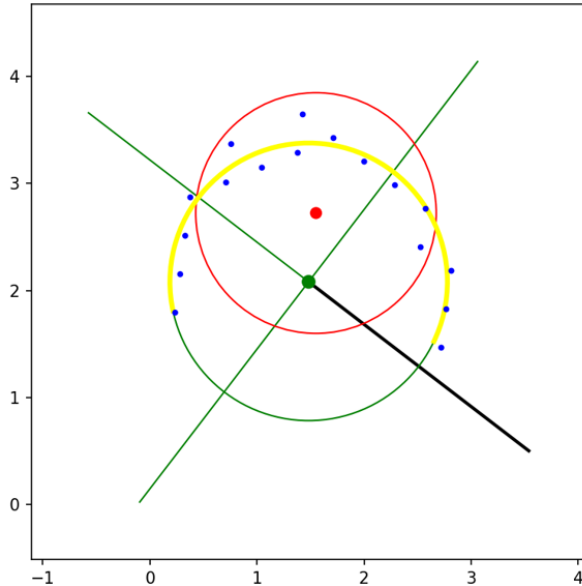
Критерий равномерности кольца

1. Вычислим относительное среднее квадратичное отклонение координат пикселей черенковского кольца от каждого его центра (x_c, y_c) :

$$\delta = \frac{\Delta R}{R}, 0 < \delta < 1.$$

2. Будем рассматривать лишь кольца, относительное среднее квадратичное отклонение координат пикселей которых не больше некоторого критического значения:

$$\delta < \delta_{кр}.$$



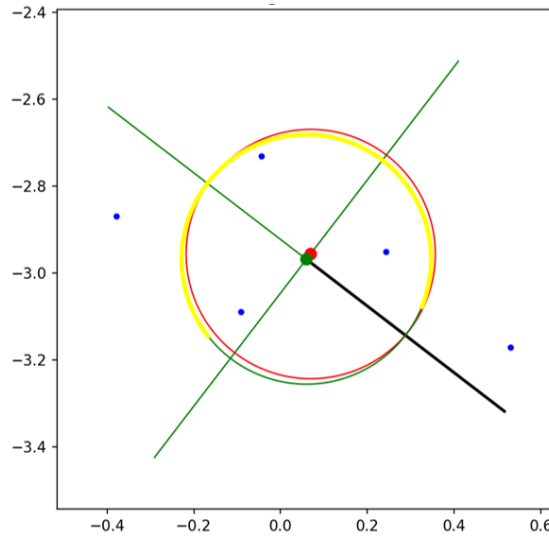
Событие №261:

$$R_{clas} = 9.31 \text{ см}$$

$$R_{haf} = 10.74 \text{ см}$$

$$\Delta R = 0.86 \text{ см}$$

$$\delta = \frac{\Delta R}{R_{haf}} = \frac{0.86 \text{ см}}{10.74 \text{ см}} = 8\%$$



Событие №440:

$$R_{clas} = 2.38 \text{ см}$$

$$R_{haf} = 2.38 \text{ см}$$

$$\Delta R = 0.98 \text{ см}$$

$$\delta = \frac{\Delta R}{R_{haf}} = \frac{0.98 \text{ см}}{2.38 \text{ см}} = 41\%$$

Рисунки 8-9. Примеры использования критерия равномерности окружности для отбора черенковских колец

Критерий длины дуги кольца

1. Вычислим полярный угол каждого пикселя черенковского кольца относительно его центра:

$$\theta_{k_0} = \arctg \frac{y_k - y_c}{x_k - x_c}, \theta_k = \begin{cases} \theta_{k_0}, & x_k > x_c \\ \theta_{k_0} + 180^\circ, & x_k < x_c, y_k > y_c \\ \theta_{k_0} - 180^\circ, & x_k < x_c, y_k < y_c \end{cases}, -180^\circ < \theta_k < 180^\circ.$$

2. Отсортируем пиксели черенковского кольца в порядке возрастания их полярного угла.

3. Найдём попарные разности между соседними пикселями черенковского кольца:

$$\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k, 1 \leq k \leq n - 1.$$

4. Отдельно рассмотрим разность между первым и последним пикселями черенковского кольца:

$$\Delta\theta_n = 360^\circ - (\theta_n - \theta_1).$$

5. Наибольшая разность между соседними пикселями черенковского кольца $\Delta\theta_k$ будет равна величине дуги разрыва кольца $\Delta\theta$.

6. Величина дуги черенковского кольца тогда будет равна:
 $\Delta\theta_{arc} = 360^\circ - \Delta\theta$.

7. На основании описанных выше соображений, будем рассматривать лишь кольца, величина дуги которых больше 180° :

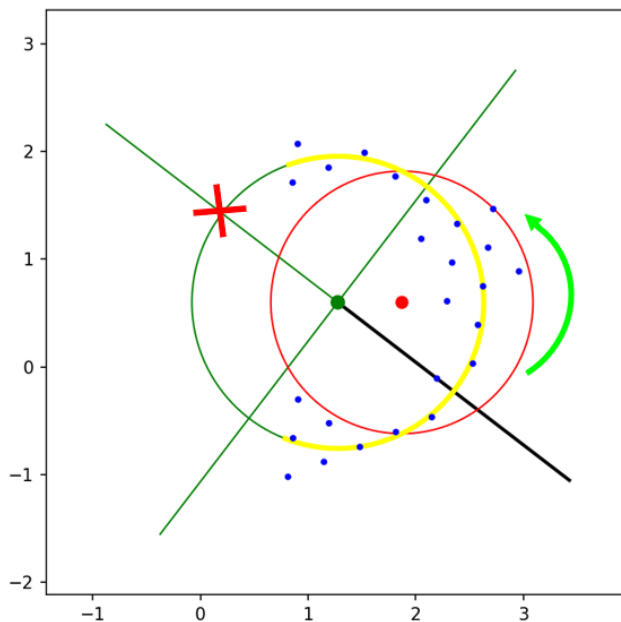
$$\Delta\theta_{arc} > 180^\circ.$$

8. Если $\Delta\theta = \Delta\theta_k, k \neq n$, то стартовый полярный угол дуги черенковского кольца будет равен $\theta_{start} = \theta_{k+1}$, а финишный полярный угол дуги будет равен $\theta_{finish} = \theta_k$, при этом дуга кольца будет проходить через точку 180° :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = \theta_{start} - \theta_{finish}.$$

9. Если $\Delta\theta = \Delta\theta_n$, то стартовый полярный угол дуги черенковского кольца будет равен $\theta_{start} = \theta_1$, а финишный полярный угол дуги будет равен $\theta_{finish} = \theta_n$, при этом дуга кольца не будет проходить через точку 180° :

$$\Delta\theta = \Delta\theta_n = 360^\circ - (\theta_n - \theta_1) = 360^\circ - (\theta_{finish} - \theta_{start}).$$



Событие №37:

$$\theta_{start} = -75^\circ$$

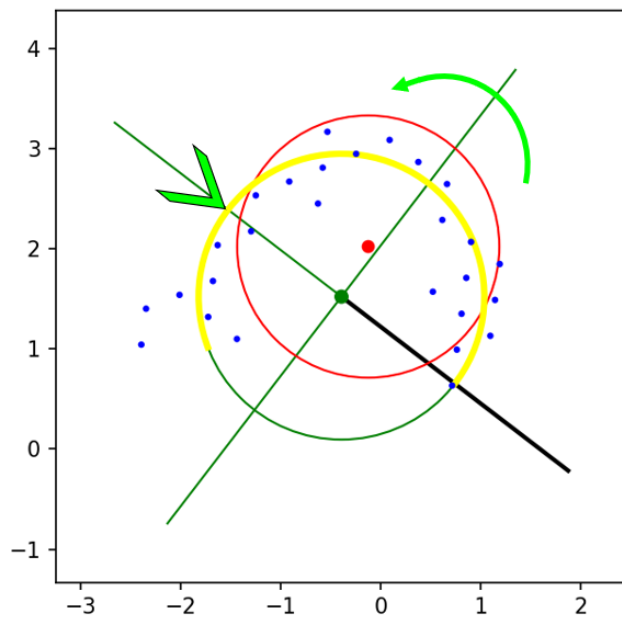
$$\theta_{finish} = 148^\circ$$

дуга **не** проходит через 180°

$$\Delta\theta = 360^\circ - (\theta_{finish} - \theta_{start}) = 360^\circ - (148^\circ - (-75^\circ)) = 137^\circ$$

$$\Delta\theta_{arc} = 360^\circ - \Delta\theta = 360^\circ - 137^\circ = 223^\circ > 180^\circ$$

критерий выполнен



Событие №37:

$$\theta_{start} = -75^\circ$$

$$\theta_{finish} = 148^\circ$$

дуга проходит через 180°

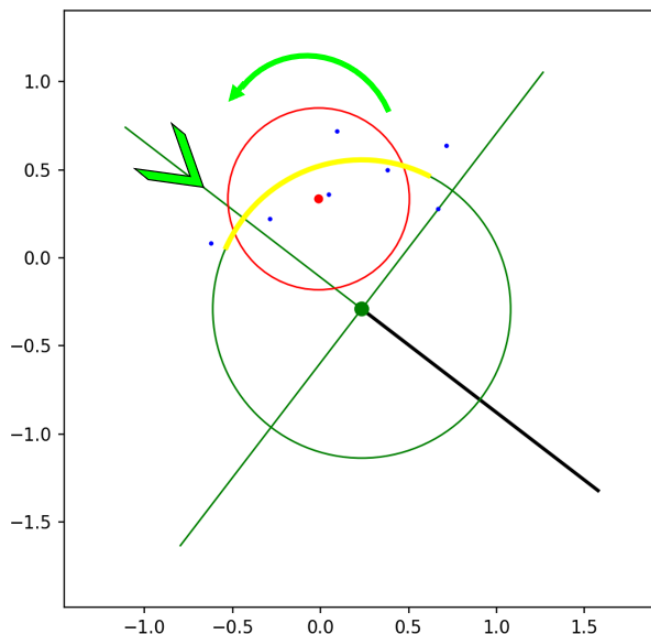
$$\Delta\theta = \theta_{start} - \theta_{finish} =$$

$$= -1^\circ - (-120^\circ) = 119^\circ$$

$$\Delta\theta_{arc} = 360^\circ - \Delta\theta =$$

$$= 360^\circ - 119^\circ = 241^\circ > 180^\circ$$

критерий выполнен



Событие №21:

$$\theta_{start} = 100^\circ$$

$$\theta_{finish} = -166^\circ$$

дуга проходит через 180°

$$\Delta\theta = \theta_{start} - \theta_{finish} =$$

$$= 100^\circ - (-166^\circ) = 266^\circ$$

$$\Delta\theta_{arc} = 360^\circ - \Delta\theta =$$

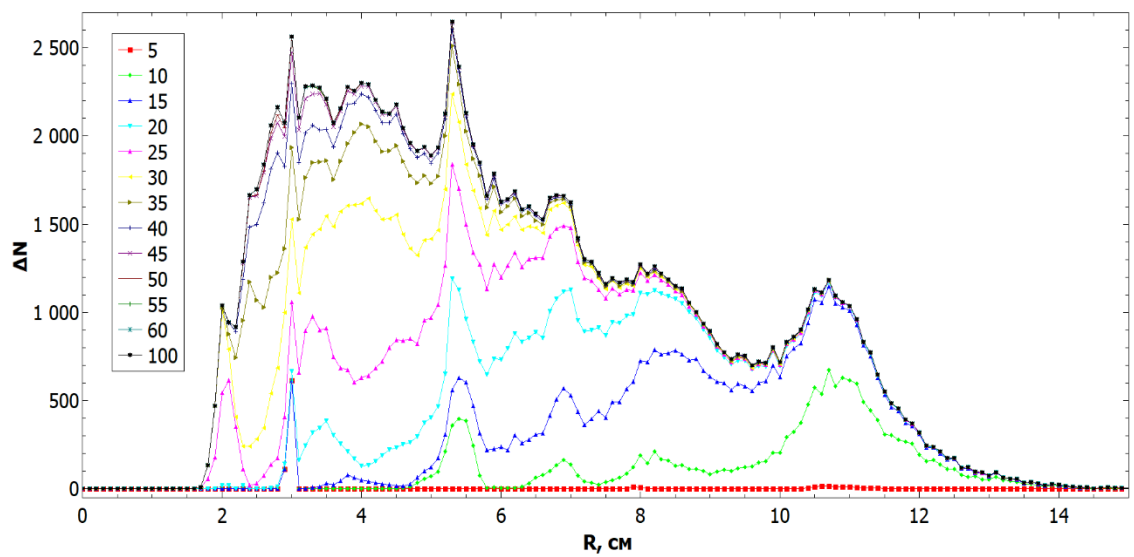
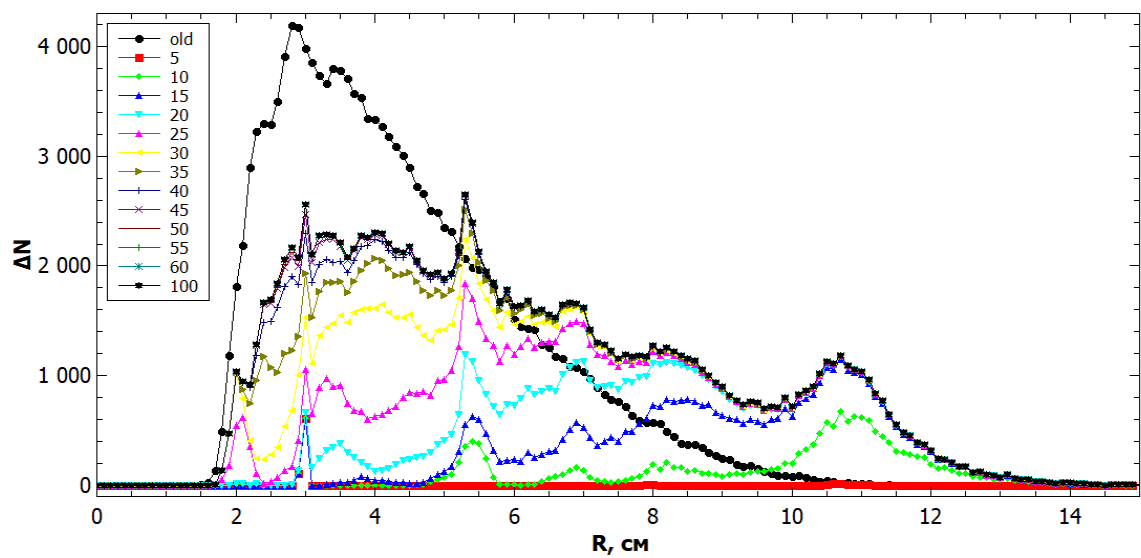
$$= 360^\circ - 266^\circ = 94^\circ < 180^\circ$$

критерий **не** выполнен

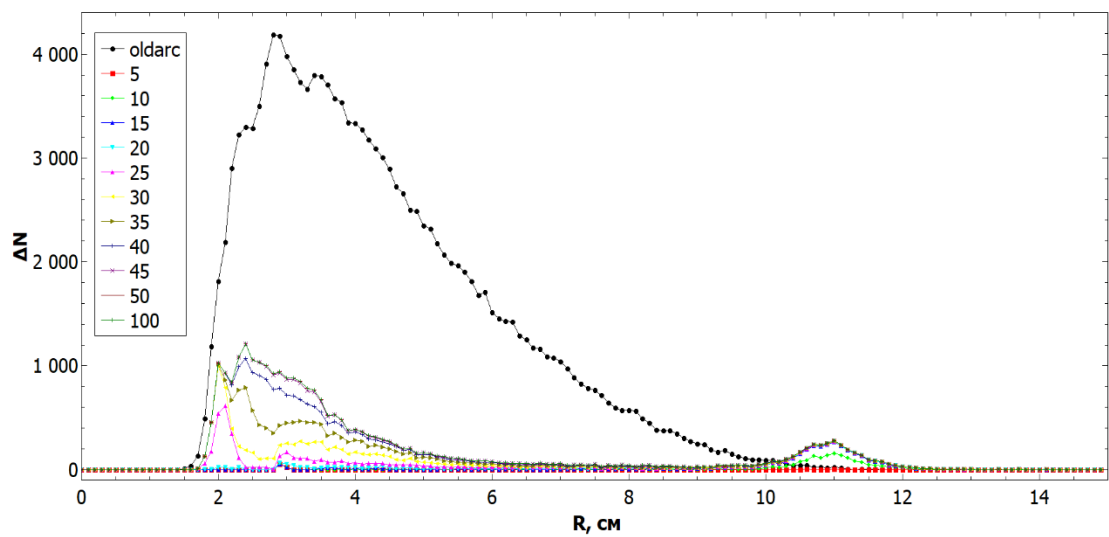
Рисунки 10-12. Примеры использования критерия длины дуги
для отбора черенковских колец

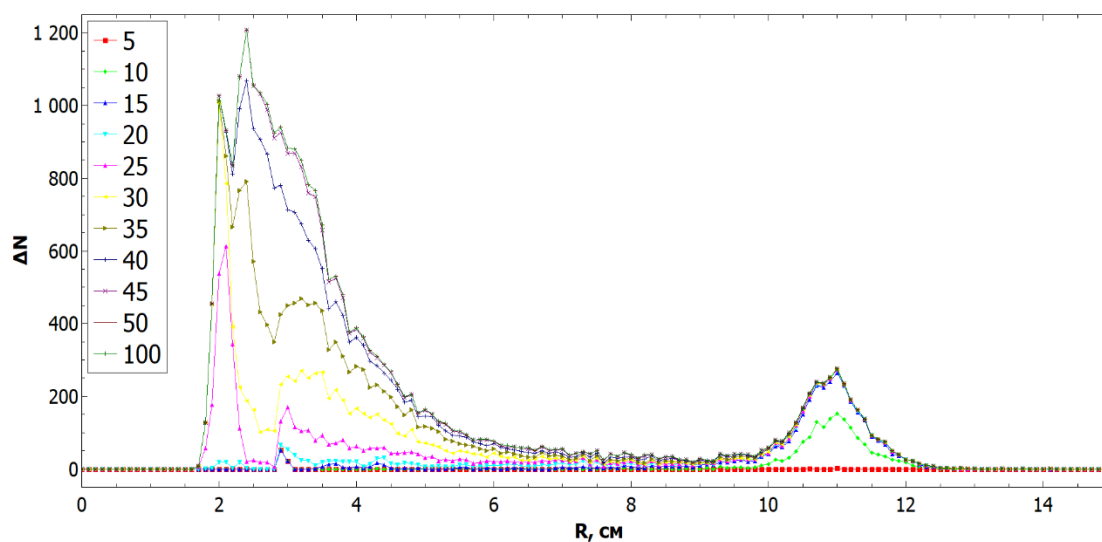
Распределение радиусов черенковских колец

$\delta_{кр}, \%$	$N_{кр}$	$\frac{N_{кр}}{N}, \%$	$R, \text{см}$	$\delta R, \%$	$(N_{кр})_{дуг}$	$\left(\frac{N_{кр}}{N}\right)_{дуг}, \%$	$R_{дуг}, \text{см}$	$\delta R_{дуг}, \%$
0	0	0	-	-	0	0	-	-
5	887	0,602	4,36967	60	77	0,052	3,23896	70
10	16972	11,523	9,48453	13	1583	1,075	10,5584	3
15	44669	30,326	8,99821	17	3245	2,203	10,3665	5
20	68423	46,453	8,1574	25	4076	2,767	9,45034	13
25	94657	64,264	7,28206	33	7456	5,062	6,60951	39
30	118323	80,331	6,68633	38	11825	8,028	5,42044	50
35	134258	91,15	6,35238	42	17787	12,076	4,72811	56
40	142906	97,021	6,18822	43	23182	15,739	4,40729	59
45	146355	99,362	6,12889	44	25653	17,416	4,33162	60
50	147026	99,818	6,11776	44	25912	17,592	4,33022	60
55	147271	99,984	6,11243	44	25916	17,595	4,3304	60
60	147292	99,999	6,11206	44	25916	17,595	4,3304	60
65	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
70	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
75	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
80	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
85	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
90	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
95	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
100	147294	100	6,11202	44	25916	17,595	4,3304	60
Классика	147294	100	4,3729	60	-	-	-	-



Рисунки 13-14. Распределение радиусов черенковских колец
без учёта критерия длины дуги кольца





Рисунки 15-16. Распределение радиусов черенковских колец с учётом критерия длины дуги кольца

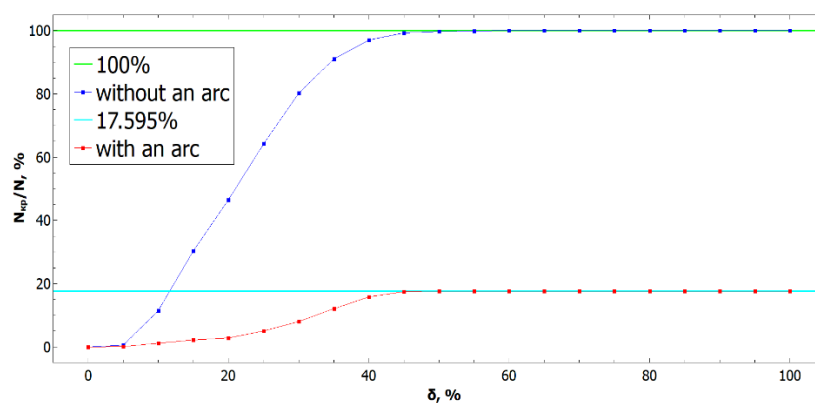


Рисунок 17. График зависимости доли отобранных событий от предельного относительного отклонения радиуса

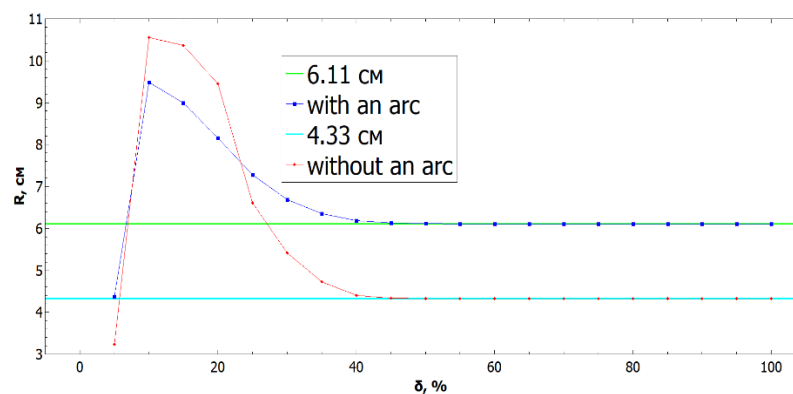


Рисунок 18. График зависимости среднего радиуса черенковского кольца от предельного относительного отклонения радиуса

Как видно из рисунков 13-14, с уменьшением δ -критерия отбрасывается всё больше и больше некорректных событий, в результате чего средний радиус черенковского кольца приближается к теоретическому. Наилучший результат с отклонением в $\delta R = 13\%$ наблюдается при $\delta = 10\%$.

Как видно из рисунков 15-16, применение критерия длины дуги черенковского кольца позволяет выделить отдельный пик с центром в районе теоретического значения, что даёт основание отбросить события левее этого пика, как некорректные. С увеличением δ -критерия также наблюдается смещение теоретического радиуса в сторону теоретического значения. Наилучший результат с отклонением в $\delta R = 3\%$ наблюдается при $\delta = 10\%$.

Как видно из рисунков 17-18, зависимости доли отобранных событий от предельного относительного отклонения радиуса и среднего радиуса черенковского кольца от предельного относительного отклонения радиуса имеют схожее поведение на всём интервале значений δ -критерия, что численно подтверждается значениями корреляции, приведёнными далее. Это даёт основания полагать, что δ -критерий и критерий длины дуги окружностей работают независимо друг от друга и нацелены на отбрасывание событий, некорректность которых имеет различную природу.

Расчёт плотности распределения фотонов в кольце

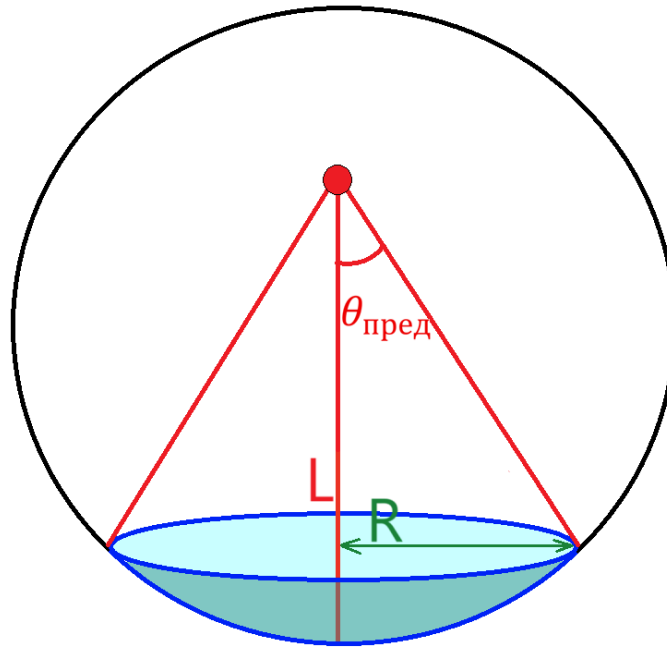


Рисунок 19. Определение числа черенковских фотонов, падающих на зеркало телескопа

Количество фотонов в черенковском конусе, испущенных на длине L :

$$N = 2\pi\alpha L \sin^2 \theta_{пред} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda \quad (\text{Формула Тамма - Франка}^2)$$

(фотоны в черенковском конусе распределены равномерно по телесному углу)

Выберем высоту мюона таким образом, что все испущенные им черенковские фотоны полностью покрыли собой зеркало:

$$\operatorname{tg} \theta_{пред} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow L = \frac{R}{\operatorname{tg} \theta_{пред}}$$

Доля площади зеркала, фотоны с которой попадут в n -й пиксель кольца:

$$0 < S_n < 1$$

Количество черенковских фотонов, попадающих в n -й пиксель кольца:

$$N_n = 2\pi\alpha S_n L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi\alpha S_n R \sin^2 \theta_{\text{пред}}}{\text{tg } \theta_{\text{пред}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \frac{2\pi\alpha S_n R \sin^2 \theta_{\text{пред}} \cos \theta_{\text{пред}}}{\sin \theta_{\text{пред}}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \pi R \alpha S_n \sin 2\theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

Численный расчёт интеграла квантовой чувствительности³:

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \int_{200 \text{ нм}}^{640 \text{ нм}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = 463055 \text{ м}^{-1}$$

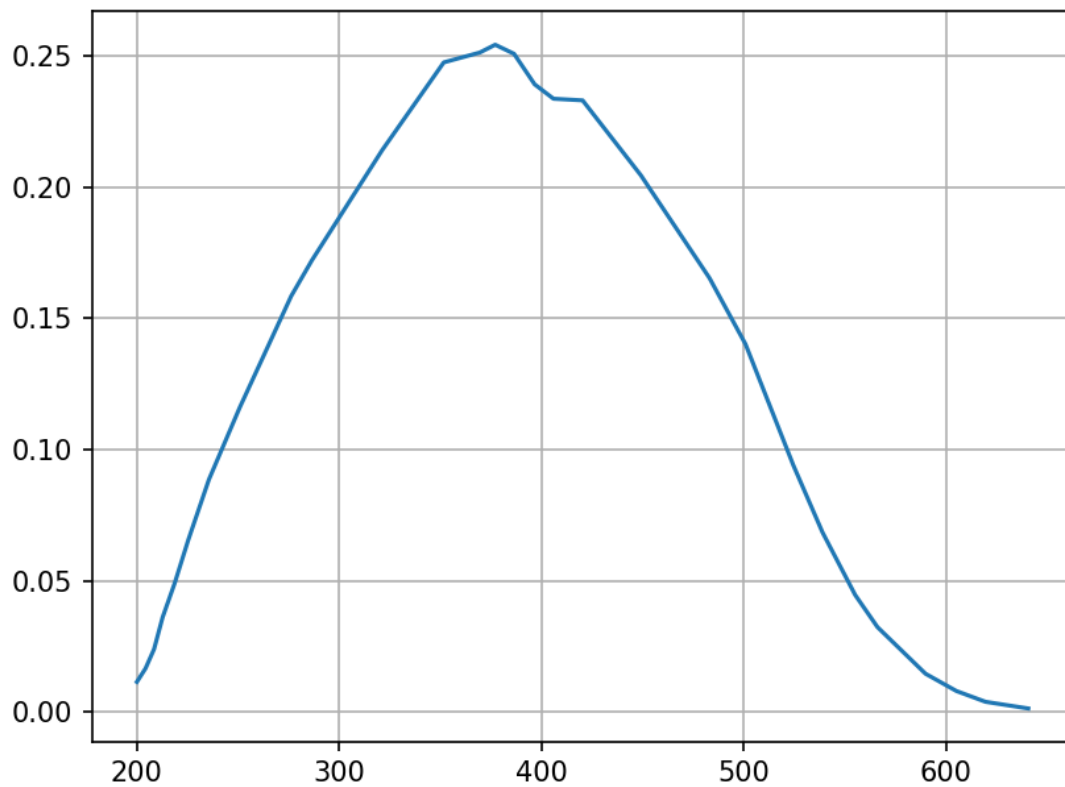


Рис. 20. Эмпирическая зависимость квантовой эффективности регистрации фотонов от их длины волны

Средняя эффективность регистрации пикселей:

$$0 < \psi < 1$$

Количество черенковских фотонов, детектирующихся в n -м пикселе кольца:

$$I_n = \pi R \alpha \psi S_n \sin 2\theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \pi R \alpha \sin 2\theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda * \psi S_n =$$
$$= 3,14 * 2,15 \text{ м} * \frac{1}{137} * \sin(2 * 1,31^\circ) * 463055 \text{ м}^{-1} * \psi S_n = 1044 \psi S_n$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow S_n = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow I_{\text{пиксель}} = \omega R \alpha \sin \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda * \psi =$$
$$= \frac{15,83^\circ * 3,14}{180^\circ} * 2,15 \text{ м} * \frac{1}{137} * \sin 1,31^\circ * 463055 \text{ м}^{-1} * \psi = 46\psi$$

На основании первого оценочного фитирования колец, полученных в ходе моделирования, было получено среднее значение интегральной квантовой эффективности:

$$\psi \sim 34\%$$

Тогда с учётом этого, среднее число фото-электронов, получаемых с одного пикселя в случаи нулевого прицельного параметра:

$$I_n = 16 \text{ фотон/пиксель}$$

Заключение

В данной работе:

- было оценено ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени - $7 \frac{\text{мюон}}{\text{мин}}$;

- было использовано преобразование Хафа для выделения одиночных мюонов по форме регистрируемых изображений на основе данных моделирования;

$$R = 10,86 \text{ см} \quad \delta R_{\text{мин}} = 13\% \quad \delta R_{\text{мин} \cap} = 3\% \quad \delta = 10\%$$

- было найдено теоретическое распределение интенсивности черенковского излучения по дуге кольца - S_n ;

- была произведена первая оценочная мюонная калибровка на основании отобранных мюонных колец, полученных в рамках моделирования:

$$\psi \sim 34\%, \quad I \sim 16 \text{ фотонов/пиксель.}$$

Ссылки

1 Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика, Т.1,2.-М.:

Энергоатомиздат, 1996

2 Тамм И. Е. Собрание научных трудов. Т. 1. — 1975 / Просмотр издания // Электронная библиотека /// История Росатома

3 Philips Photo and Electron Multipliers. Т. 9. – 1987

https://bitsavers.org/components/philips/_dataBooks/1987_T09_Philips_Photo_and_Electron_Multipliers.pdf

Приложение

Условие существования хорды вследствие положительности расстояния до начала координат:

$$1) r(\varphi) = r_+(\varphi) \cap \cos \varphi > 0 \Rightarrow r > 0 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} > 0 \text{ (всегда)}$$

$$2) r(\varphi) = r_+(\varphi) \cap \cos \varphi < 0 \Rightarrow r > 0 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\rho \cos \varphi| < \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi < R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow \rho^2 < R^2 \Leftrightarrow \rho < R$$

$$3) r(\varphi) = r_-(\varphi) \cap \cos \varphi > 0 \Rightarrow r > 0 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi - \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\rho \cos \varphi| > \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi > R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow \rho^2 > R^2 \Leftrightarrow \rho > R$$

$$4) r(\varphi) = r_-(\varphi) \cap \cos \varphi < 0 \Rightarrow r > 0 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi - \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} > 0 \text{ (никогда)}$$

$$\cos \varphi > 0 \Leftrightarrow \cos |\varphi| > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$$

$$\cos \varphi < 0 \Leftrightarrow \cos |\varphi| < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < |\varphi| < 180^\circ$$

Расчёт площади зоны зеркала, собирающей свет в один пиксель

$$S_{\pm} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} r_{\pm}^2(\varphi) d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \left(\frac{\rho}{R} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \left(\frac{\rho^2}{R^2} \cos^2 \varphi + 1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi \pm 2 \frac{\rho}{R} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \left(\frac{\rho^2}{R^2} \cos 2\varphi + 1 \pm 2 \frac{\rho}{R} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{R^2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \cos 2\varphi d\varphi + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} d\varphi \pm 2 \frac{\rho}{R} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} d\varphi \right) =$$

$$= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \cos 2\varphi d(2\varphi) + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} d\varphi \pm 2 \frac{\rho}{R} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} d \sin \varphi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \cos t \, dt + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} d\varphi \pm 2 \frac{\rho}{R} \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} t^2} dt \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} \sin t \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} + \varphi \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \pm 2 \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R} t\right)^2} d\left(\frac{\rho}{R} t\right) \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} \sin 2\varphi \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm 2 \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \sqrt{1 - u^2} du \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm 2 \left(\frac{\arcsin(u)}{2} + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{2} \right) \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm (\arcsin(u) + u\sqrt{1-u^2}) \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R} t\right) + \frac{\rho}{R} t \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} t^2} \right) \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi\right) + \frac{\rho}{R} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi} \right) \Big|_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} \right) = \\
&= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_n\right) + \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{\rho}{R} \sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_n} \mp \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_{n-1}\right) \mp \frac{\rho}{R} \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) = \\
&= \pi R^2 * \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_n\right) - \right. \\
&\quad \left. \mp \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_{n-1}\right) \pm \frac{\rho}{R} \left(\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_n} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \right)
\end{aligned}$$

В случаи, если $\rho < R$:

$$\pi R^2 S_n = S_+ = \pi R^2 * \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi_n\right) - \right.$$

$$-\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \frac{\rho}{R}\left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}}\right)$$

В случаи, если $\rho > R$:

$$\pi R^2 S_n = S_+ - S_- = \pi R^2 * \frac{1}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_n\right) - \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{R} \left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}} \right) \right)$$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_n\right) - \right. \\ \left. - \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \frac{\rho}{R} \left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}} \right) \right), \rho < R \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_n\right) - \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{R} \left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}} \right) \right), \rho > R \end{cases}$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{0^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin\left(\frac{0}{R}\sin\varphi_n\right) - \right. \\ \left. - \arcsin\left(\frac{0}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \frac{\rho}{R} \left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{0^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{0^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}} \right) \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \frac{1}{2\pi} (n\omega - (n-1)\omega) = \frac{1}{2\pi} (n\omega - n\omega + \omega) = \frac{\omega}{2\pi}$$

(распределение площадей равномерно по азимутальному углу)

В случаи граничного прицельного параметра:

$$\rho = R \Rightarrow S_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R^2}{2R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin\left(\frac{R}{R}\sin\varphi_n\right) - \right. \\ \left. - \arcsin\left(\frac{R}{R}\sin\varphi_{n-1}\right) + \frac{R}{R} \left(\sin\varphi_n\sqrt{1-\frac{R^2}{R^2}\sin^2\varphi_n} - \sin\varphi_{n-1}\sqrt{1-\frac{R^2}{R^2}\sin^2\varphi_{n-1}} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}}{2} + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \sin \varphi_n \cos \varphi_n - \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}}{2} + 2\varphi_n - 2\varphi_{n-1} + \frac{\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\varphi_n - 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) \\
\rho = R \Rightarrow S_n &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{R}{R} \sin \varphi_n \right) - \arcsin \left(\frac{R}{R} \sin \varphi_{n-1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R}{R} \left(\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2} \sin^2 \varphi_n} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} (\varphi_n - \varphi_{n-1} + \sin \varphi_n \cos \varphi_n - \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1}) = \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\varphi_n - 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1})
\end{aligned}$$

(равенство площадей в граничном случае выполняется)

В случае интегрирования по всей поверхности зеркала:

$$\begin{aligned}
\varphi_{n-1} &= -\pi \cap \varphi_n = \pi \Rightarrow \\
S_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2R^2} (\sin 2\pi - \sin(-2\pi)) + \pi - (-\pi) + \arcsin \left(\frac{\rho}{R} \sin \pi \right) - \right. \\
&\quad \left. - \arcsin \left(\frac{\rho}{R} \sin(-\pi) \right) + \frac{\rho}{R} \left(\sin \pi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \pi} - \sin(-\pi) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2(-\pi)} \right) \right) = 1 \\
\varphi_{n-1} &= -\arcsin \frac{R}{\rho} \cap \varphi_n = \arcsin \frac{R}{\rho} \Rightarrow \\
S_n &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R} \sin \arcsin \frac{R}{\rho} \right) - \arcsin \left(\frac{\rho}{R} \sin \left(-\arcsin \frac{R}{\rho} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{R} \left(\sin \arcsin \frac{R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \arcsin \frac{R}{\rho}} - \sin \left(-\arcsin \frac{R}{\rho} \right) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \sin^2 \left(-\arcsin \frac{R}{\rho} \right)} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R} \frac{R}{\rho} \right) + \arcsin \left(\frac{\rho}{R} \frac{R}{\rho} \right) + \frac{\rho}{R} \left(\frac{R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \frac{R^2}{\rho^2}} + \frac{R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \frac{R^2}{\rho^2}} \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} (\arcsin(1) + \arcsin(1) + \frac{\rho}{R} \left(\frac{R}{\rho} \sqrt{1-1} + \frac{R}{\rho} \sqrt{1-1} \right)) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

(при интегрировании по всей поверхности зеркала в обоих случаях получается полная площадь его круга)

В качестве примера рассмотрим следующий случай:

$$\rho = \frac{R}{2}$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{R \sin(n\omega)}{\frac{R}{2} + R \cos(n\omega)} = \arctg \frac{2 \sin(n\omega)}{1 + 2 \cos(n\omega)}$$

$$\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} = \arctg \frac{2 \sin(n\omega)}{1 + 2 \cos(n\omega)} - \arctg \frac{2 \sin((n-1)\omega)}{1 + 2 \cos((n-1)\omega)}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R^2}{8R^2} (\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}) + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin \left(\frac{R}{2R} \sin \varphi_n \right) - \right. \\ &\quad \left. - \arcsin \left(\frac{R}{2R} \sin \varphi_{n-1} \right) + \frac{R}{2R} \left(\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{R^2}{4R^2} \sin^2 \varphi_n} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{R^2}{4R^2} \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1}}{8} + \varphi_n - \varphi_{n-1} + \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_n}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_{n-1}}{2} \right) + \frac{\sin \varphi_n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi_n}{4}} - \sin \varphi_{n-1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi_{n-1}}{4}}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left(\sin 2\varphi_n - \sin 2\varphi_{n-1} + 8\varphi_n - 8\varphi_{n-1} + 8 \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_n}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \arcsin \left(\frac{\sin \varphi_{n-1}}{2} \right) + 2 \sin \varphi_n \sqrt{4 - \sin^2 \varphi_n} - 2 \sin \varphi_{n-1} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

Расчёт корреляций

Коэффициент корреляции Пирсона двух величин:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Корреляция зависимостей среднего радиуса черенковского кольца от предельного относительного отклонения радиуса с учётом и без учёта критерия длины дуги окружности:

$$r_R = 97\%$$

Корреляция зависимостей доли отобранных событий от предельного относительного отклонения радиуса с учётом и без учёта критерия длины дуги окружности:

$$r_{N_{\text{кр}}/N} = 95\%$$