

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

Отчет

о научно-исследовательской работе

**Оптимизация статистического анализа событий
гравитационного линзирования для сравнения гипотез
одиноким первичным чёрным дыр и кластеризованных**

Научный руководитель

д.ф. - м.н.

_____ К. М. Белоцкий

Студент

_____ О. В. Иванова

Москва 2025

Содержание

1	Введение	3
2	Вычисление вероятности наблюдения 20 событий микролинзирования	5
2.1	Анализ распределений временных интервалов	5
2.2	Оценка вероятности наблюдения событий с помощью распределения Пуассона	7
3	Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд	8
3.1	"Глобальная" карта плотности звёзд	9
3.2	Локальная карта плотности звёзд	14
3.3	Анализ результатов	19
4	Заключение	20

1 Введение

Гравитационное линзирование — одно из наиболее мощных астрономических средств исследования скрытой массы во Вселенной. Согласно общей теории относительности, массивные объекты искривляют пространство-время, из-за чего свет от более удалённых источников может отклоняться и усиливаться, проходя рядом с такими объектами. В особом случае — гравитационного микролинзирования — линзирующий объект слишком мал, чтобы создавать видимые искажения изображения, но может временно увеличивать яркость далёкой звезды. Этот эффект позволяет выявлять компактные объекты, включая те, которые не излучают свет, — такие как первичные чёрные дыры.

Первичные чёрные дыры (ПЧД) — это гипотетические чёрные дыры, образовавшиеся в ранней Вселенной из плотностных флуктуаций (небольших отклонений плотности вещества от среднего, существовавших вскоре после Большого взрыва), а не в результате коллапса звёзд. В последние годы ПЧД привлекают внимание как возможный компонент тёмной материи [1–3]. Их масса и способ распределения в пространстве — особенно если они образуют кластеры — существенно влияют на характеристики микролинзирования, которое наблюдается в оптических и гравитационно-волновых данных [4].

Статистический анализ множества линзирующих событий, таких как аномалии в светимости квазаров или микролинзирование гравитационных волн, позволяет тестировать гипотезы о плотности и распределении ПЧД. Ранее многие исследования считали, что ПЧД распределены однородно. Однако современные теоретические модели предсказывают их сгруппированную структуру [5, 6]. Это влечёт за собой значительное усиление микролинзирующего эффекта, а значит, позволяет жёстче оценить, какую долю тёмной материи могут составлять такие объекты.

Для анализа использованы наблюдательные данные эксперимента МАСНО, включающие 18 одиночных и одно двойное событие микролинзирования [7]. В таблице 1 представлены события микролинзирования, а также их координаты.

№	Событие	RA	Dec
1	1a	78.68	-68.80
2	1b	78.68	-68.80
3	4	79.30	-70.78
4	5	79.17	-70.49
5	6	81.55	-70.35
6	7a	76.01	-69.56
7	7b	76.02	-69.56
8	8	81.29	-69.80
9	9	80.08	-69.25
10	13	81.01	-68.82
11	14	83.68	-70.42
12	15	76.44	-69.73
13	18	86.34	-71.16
14	20	73.58	-70.04
15	21	74.31	-69.46
16	22	78.63	-71.15
17	23	76.57	-70.98
18	25	75.57	-68.01
19	27	76.65	-69.35

Таблица 1: События микролинзирования. Событие №9 - двойное событие микролинзирования

Цель — проверить, лучше ли эти события объясняются гипотезой H_0 о равномерном распределении одиночных ПЧД на сфере радиусом 10 кпк [6] или гипотезой H_1 , согласно которой ПЧД образуют кластеры, равномерно распределённые по той же сфере.

2 Вычисление вероятности наблюдения 20 событий микролинзирования

2.1 Анализ распределений временных интервалов

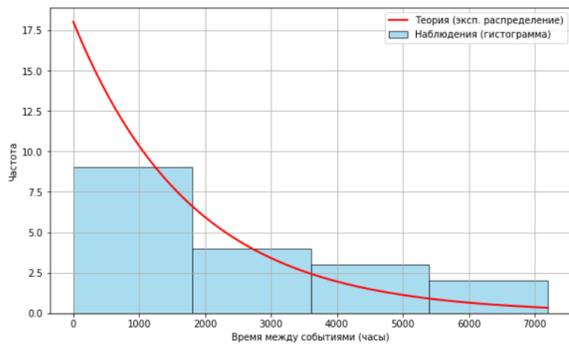
В рамках данной работы сначала была проведена проверка статистических моделей, описывающих интервалы между зарегистрированными событиями микролинзирования. Рассматривались три вероятностных распределения, которые часто применяются для описания времени между случайными событиями: экспоненциальное, гамма-распределение и распределение Вейбулла [8–10].

Каждая из этих моделей отражает различные предположения о процессе возникновения событий:

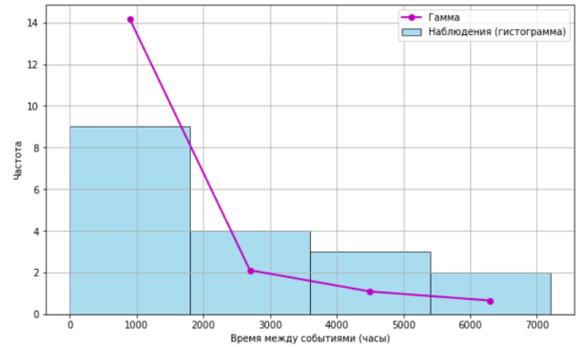
- Экспоненциальное распределение соответствует случаю, когда события происходят независимо и с постоянной вероятностью во времени.
- Гамма-распределение представляет собой обобщение экспоненциального распределения и описывает время до наступления события, которое зависит от последовательного прохождения нескольких независимых стадий. Каждая такая стадия предполагается случайной по длительности и описывается экспоненциальным распределением, а общее время до наступления события — их суммой. В физическом контексте это может соответствовать ситуации, когда событие происходит не моментально, а только после накопления определённых условий — таких как подходящая конфигурация скоростей, плотностей и расстояний. Таким образом, гамма-распределение позволяет учитывать возможные задержки или предварительные стадии формирования условий, необходимых для микролинзирования, и является более гибкой моделью по сравнению с простым экспоненциальным распределением.
- Распределение Вейбулла — это обобщение экспоненциального распределения, которое позволяет учитывать изменение частоты событий со временем. Если события происходят с постоянной частотой, оно сводится к экспоненциальному распределению, но если частота увеличивается или уменьшается, оно учитывает это изменение. Это распределение задаётся двумя параметрами: параметром формы k , который определяет, как изменяется вероятность наступления события во времени, и параметром масштаба λ , который задаёт характерный временной масштаб процесса.

Если параметр формы $k = 1$, распределение Вейбулла становится экспоненциальным, и вероятность события не зависит от времени. Если $k > 1$, вероятность события увеличивается с течением времени, что указывает на рост вероятности события по мере его наступления. При $k < 1$ вероятность события уменьшается со временем, что означает, что события становятся менее вероятными с увеличением времени.

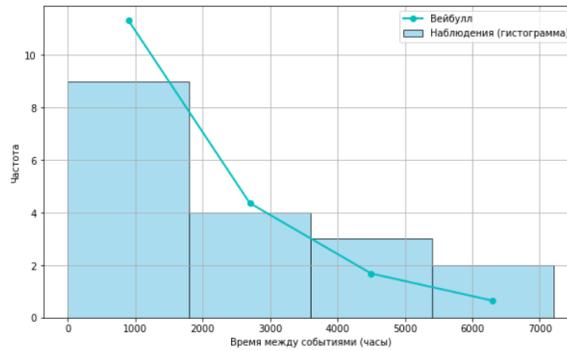
На рисунке 1 представлены гистограммы временных интервалов между событиями с наложенными кривыми трёх выбранных распределений. В таблице 2 приведены результаты сравнения качества подгонки этих распределений.



(a) Экспоненциальное



(b) Гамма



(c) Вейбулла ($k \approx 1$)

Рис. 1: Сравнение трёх распределений временных интервалов между событиями

Распределение	Хи-квадрат (χ^2)	p-value (%)	Ошибка (%)	Качество подгонки
Экспоненциальное	5.4	14	12	Приемлемо
Гамма	9.8	2	0.9	Плохое
Вейбулла	4.4	22	15	Лучшее

Таблица 2: Сравнение качества подгонки трёх распределений

Анализ показал, что наилучшее соответствие экспериментальным данным демонстрировало распределение Вейбулла. Однако при оценке его параметров оказалось, что показатель формы $k \approx 1$, что означает, что распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное. Это критически важное наблюдение: оно указывает, что временные интервалы между событиями не зависят друг от друга, а сами события микролинзирования происходят случайным образом и равновероятно во времени.

Такой результат подтверждает корректность применения распределения Пуассона для оценки вероятности наблюдаемых событий. Экспоненциальное распределение описывает временные интервалы между последовательными событиями. В свою очередь, распределение Пуассона моделирует количество событий, происходящих за фиксированный промежуток времени. Поэтому, если временные интервалы между событиями подчиняются экспоненциальному закону, применение распределения Пуассона для подсчёта вероятностей количества событий за заданный интервал является естественным и обоснованным выбором.

2.2 Оценка вероятности наблюдения событий с помощью распределения Пуассона

Пуассоновское распределение описывает вероятность наблюдать k событий в фиксированном интервале при известном среднем числе событий λ , если события происходят независимо и случайно. Формула вероятности имеет вид:

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

В нашем случае:

- $k = 20$ — число наблюдаемых событий микролинзирования;

- λ — среднее число событий микролинзирования.

Для оценки среднего числа событий λ используем следующую формулу:

$$\lambda = \frac{S \cdot N_{\text{ПЧД}}}{4\pi r^2} \cdot N_{\text{зв}}$$

где:

- $S = t \cdot v \cdot 2R_E$ — площадь, которую проходит звезда за время $t = 10$ лет при скорости $v = 200$ км/с,
- $R_E = 0.4 \cdot 10^{-4}$ пк — радиус Эйнштейна,
- $r = 10$ кпк — расстояние до Магелланова Облака,
- $N_{\text{ПЧД}} = 10^{11}$ — число первичных чёрных дыр на фоне БМО,
- $N_{\text{зв}} = 22,253,638$ — число наблюдаемых звёзд.

Подставляя значения:

$$S = 10 \text{ лет} \cdot 200 \text{ км/с} \cdot 2R_E \approx 1.63 \cdot 10^{-8} \text{ пк}^2$$

Подставим в формулу:

$$\lambda = \frac{S \cdot N_{\text{ПЧД}}}{4\pi r^2} \cdot N_{\text{зв}} = \frac{1.63 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{11}}{1.26 \cdot 10^9} \cdot 2.225 \cdot 10^7 \approx 2.9$$

Подставляя значения $k = 20$, $\lambda = 2.9$ в формулу Пуассона:

$$P(20; 0.685) = \frac{2.9^{20} \cdot e^{-2.9}}{20!} \approx 3.5 \cdot 10^{-11}$$

Таким образом, вероятность наблюдать 20 событий микролинзирования при равномерной модели распределения ПЧД крайне мала. Оценка вероятности наблюдения требует дополнительного рассмотрения.

3 Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

В анализе зависимости числа микролинзирующих событий y от звёздной плотности x рассматривалось две модели:

1. $y = ax$.

В этой модели предполагается, что при нулевой плотности звёзд ($x = 0$) отсутствуют и микролинзирующие события ($y = 0$), то есть количество событий прямо пропорционально плотности.

2. $y = ax + b$.

Параметр b в уравнении $y = ax + b$ не следует интерпретировать как физический фон микролинзирующих событий при нулевой плотности звёзд — такое предположение противоречит физике процесса. Вместо этого b отражает систематические сдвиги, шумы и влияние дополнительных факторов, не учтённых в модели простой пропорциональности. Добавление параметра b расширяет модель, позволяя более адекватно описать реальные данные с учётом возможных нефизических и статистических отклонений.

3.1 "Глобальная" карта плотности звёзд

Для анализа зависимости числа событий микролинзирования от плотности звёзд была построена реальная карта плотности звёзд по данным эксперимента МАСНО. Для построения были использованы координаты более 22 миллионов звёзд с последующим разделением области Большого Магелланова Облака (БМО) на сетку 200×200 . Карта плотности звёзд, построенная по этим данным, представлена на рисунке 2.

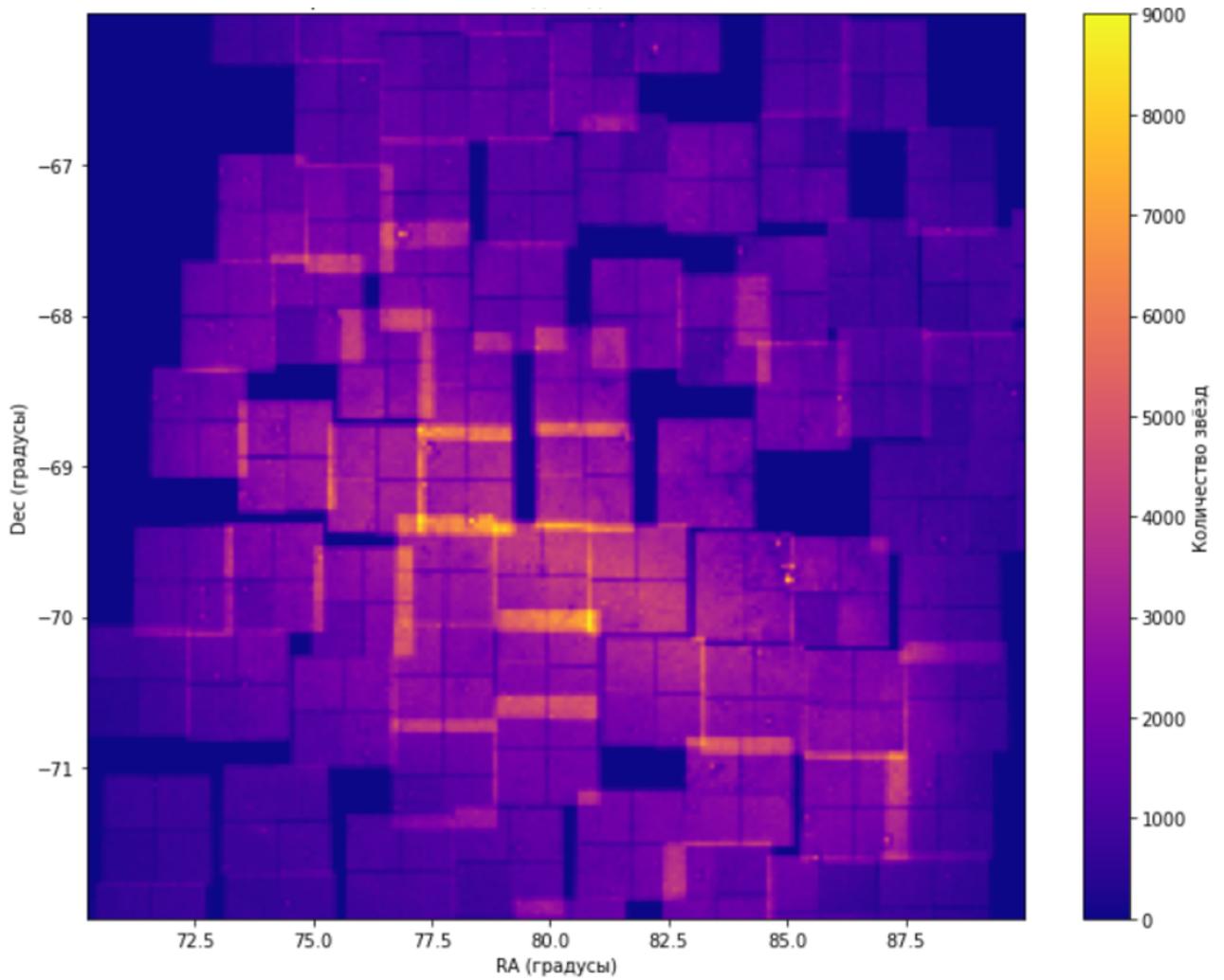


Рис. 2: Карта плотности звёзд по данным МАСНО (БМО)

На основе карты область была разбита на крупные бины, при этом рассматривались варианты с количеством бинов, равным 3, 4, 5 и 6. В каждом из полученных бинов была подсчитана средняя плотность звёзд и количество наблюдаемых микролинзирующих событий. Далее были построены графики, представленные на рисунках 3 и 4, показывающие зависимость числа событий от звёздной плотности. Для каждого бина были также подсчитаны ошибки, которые рассчитывались как квадратный корень из числа событий. Эти данные представлены в таблице 3.

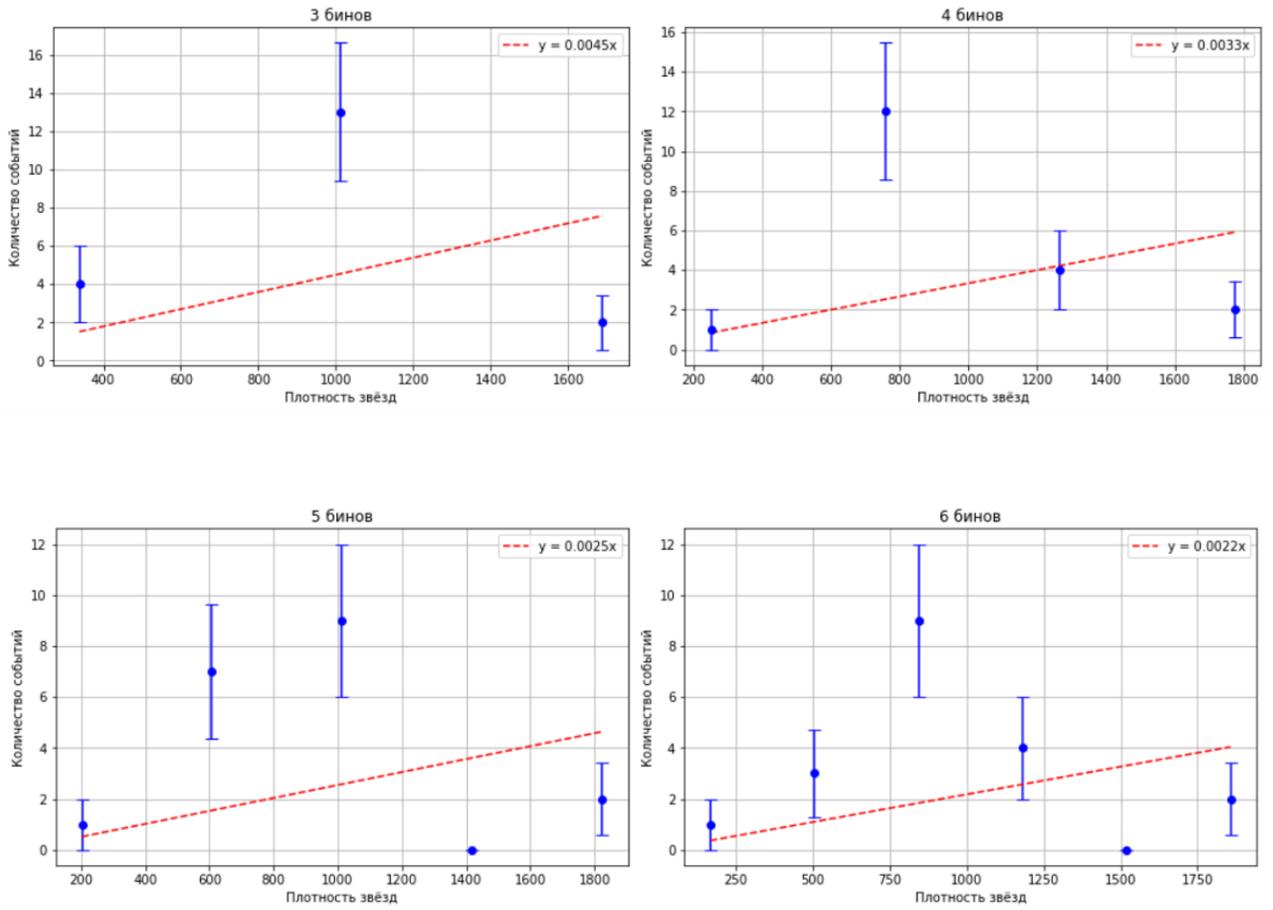


Рис. 3: Зависимость количества событий микролинзирования от плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax$)

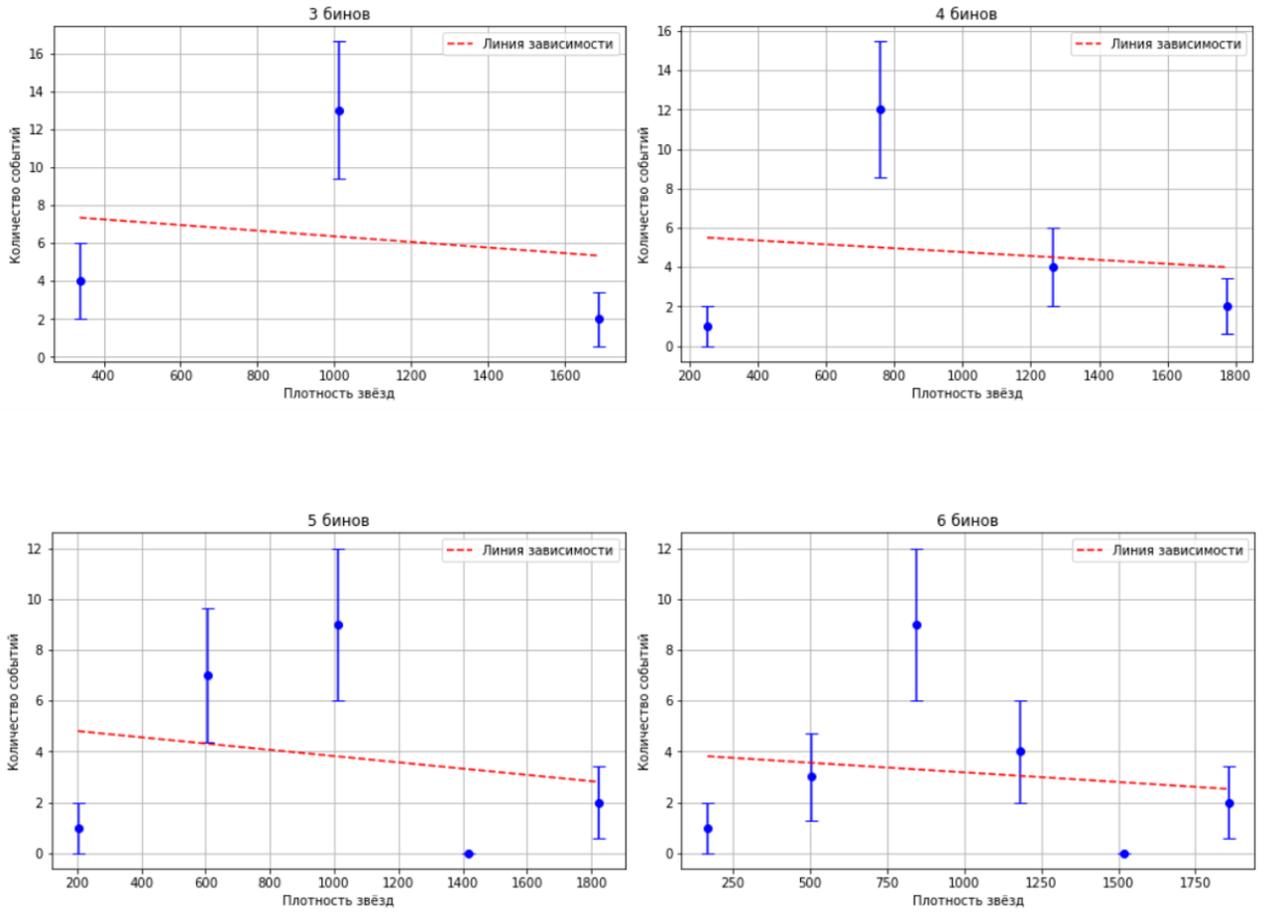


Рис. 4: Зависимость количества событий микролинзирования от плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax + b$)

Бины	Интервал плотности	Событий	Ошибка
3	[0.0, 675.3]	4	2.00
	[675.3, 1350.7]	13	3.61
	[1350.7, 2026.0]	2	1.41
4	[0.0, 506.5]	1	1.00
	[506.5, 1013.0]	12	3.46
	[1013.0, 1519.5]	4	2.00
	[1519.5, 2026.0]	2	1.41
5	[0.0, 405.2]	1	1.00
	[405.2, 810.4]	7	2.65
	[810.4, 1215.6]	9	3.00
	[1215.6, 1620.8]	0	0.00
	[1620.8, 2026.0]	2	1.41
6	[0.0, 337.7]	1	1.00
	[337.7, 675.3]	3	1.73
	[675.3, 1013.0]	9	3.00
	[1013.0, 1350.7]	4	2.00
	[1350.7, 1688.3]	0	0.00
	[1688.3, 2026.0]	2	1.41

Таблица 3: Результаты подсчёта числа событий и ошибок для разных бинов для "глобальной" плотности

Результаты показали линейную зависимость количества событий микролинзирования. Однако связь оказалась не совсем точной, что можно объяснить как статистическими флуктуациями, так и возможным влиянием кластеризации первичных чёрных дыр.

Особое внимание следует уделить наличию "нулевых бинов" при разделении области наблюдений на 5 и 6 бинов. Область была разделена на относительно большие участки, и в большинстве из них не было зафиксировано ни одного события микролинзирования. Эти "нулевые бины" создавали трудности при статистическом анализе, поскольку из-за малой выборки было невозможно надёжно оценить зависимость между числом событий и плотностью звёзд.

3.2 Локальная карта плотности звёзд

Для более точного анализа после построения карты "глобальной" плотности была построена карта локальной плотности звёзд, где для каждого события микролинзирования рассчитывалась плотность звёзд в радиусе, соответствующему типичному размеру потенциальных кластеров первичных чёрных дыр (около 1 парсека в радиусе, что соответствует ~ 0.0001 радиан на расстоянии 10 кпк). На рисунке 5 представлена локальная карта плотности с нанесёнными на неё событиями микролинзирования. Локальная плотность для каждого события указана в таблице 4.

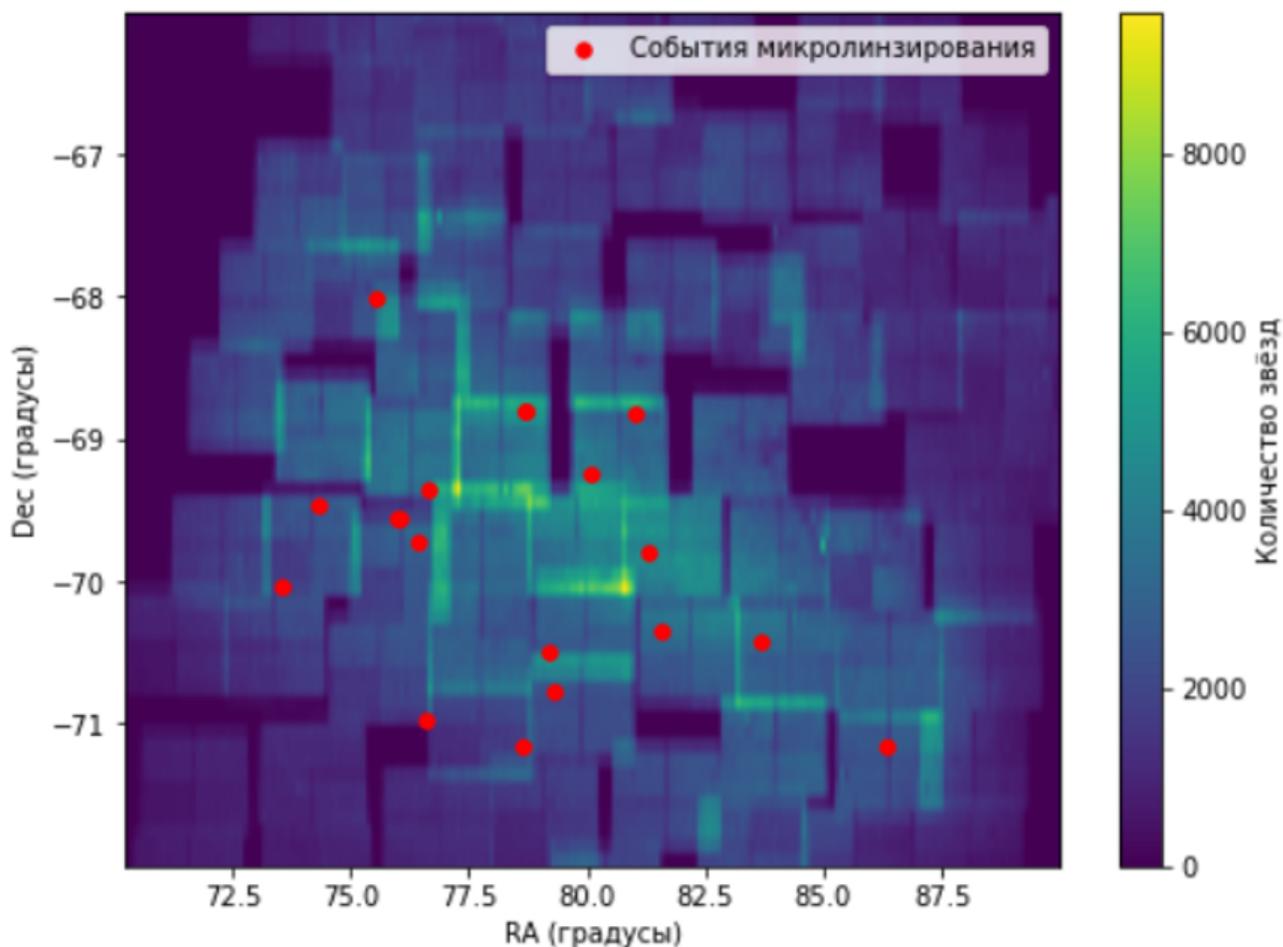


Рис. 5: Карта плотности звёзд по данным МАСНО (БМО)

№	RA	Dec	Локальная плотность
1	78.68	-68.80	4891
2	78.68	-68.80	4891
3	79.30	-70.78	2514
4	79.17	-70.49	2646
5	81.55	-70.35	3378
6	76.01	-69.56	1938
7	76.02	-69.56	1938
8	81.29	-69.80	4464
9	80.08	-69.25	4063
10	81.01	-68.82	3053
11	83.68	-70.42	3311
12	76.44	-69.73	3101
13	86.34	-71.16	2661
14	73.58	-70.04	1882
15	74.31	-69.46	2689
16	78.63	-71.15	1823
17	76.57	-70.98	1501
18	75.57	-68.01	3417
19	76.65	-69.35	3413

Таблица 4: Таблица значений локальной плотности для событий микролинзирования

Такой переход обоснован необходимостью учесть влияние мелкомасштабной неоднородности: если первичные чёрные дыры действительно образуют кластеры, их распределение будет сильно отличаться от равномерного именно на малых масштабах. Локальный анализ позволяет выявить такие кластеры и понять, насколько в них число микролинзирующих событий превышает ожидаемое по звёздной плотности. Также использование локальной плотности позволило избежать нулевых бинов при построении графиков, так как теперь для каждого события микролинзирования рассчитывалась локальная плотность звёзд вокруг него. В результате в каждом бине оказалось хотя бы одно событие, и нулевых значений не возникало. Графики зависимости числа событий от локальной плот-

ности и таблица с ошибками для каждого события аналогичны тем, что были построены для "глобальной" плотности, и представлены на рисунках 6–7, а также в таблице 5.

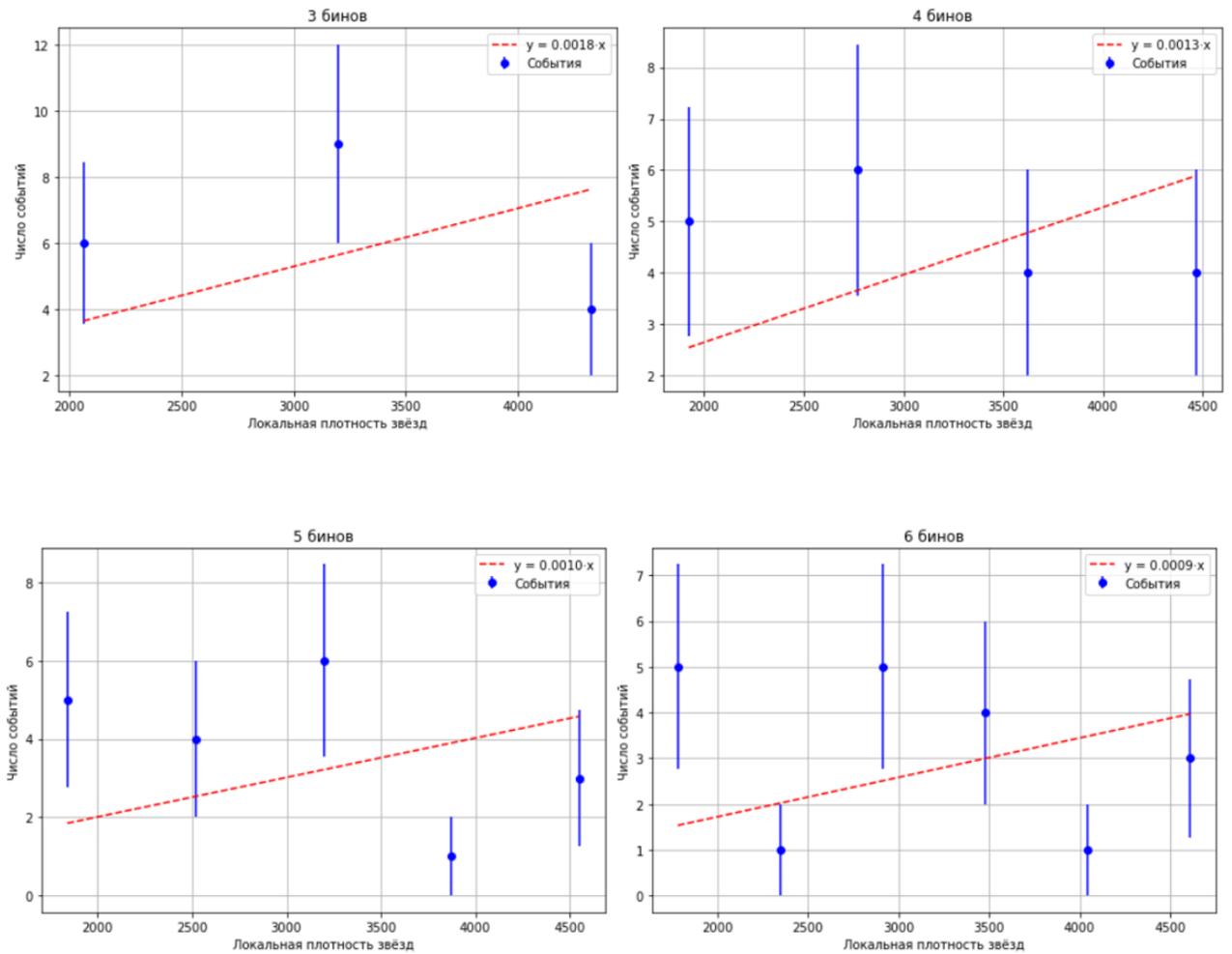


Рис. 6: Зависимость количества событий микролинзирования от локальной плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax$)

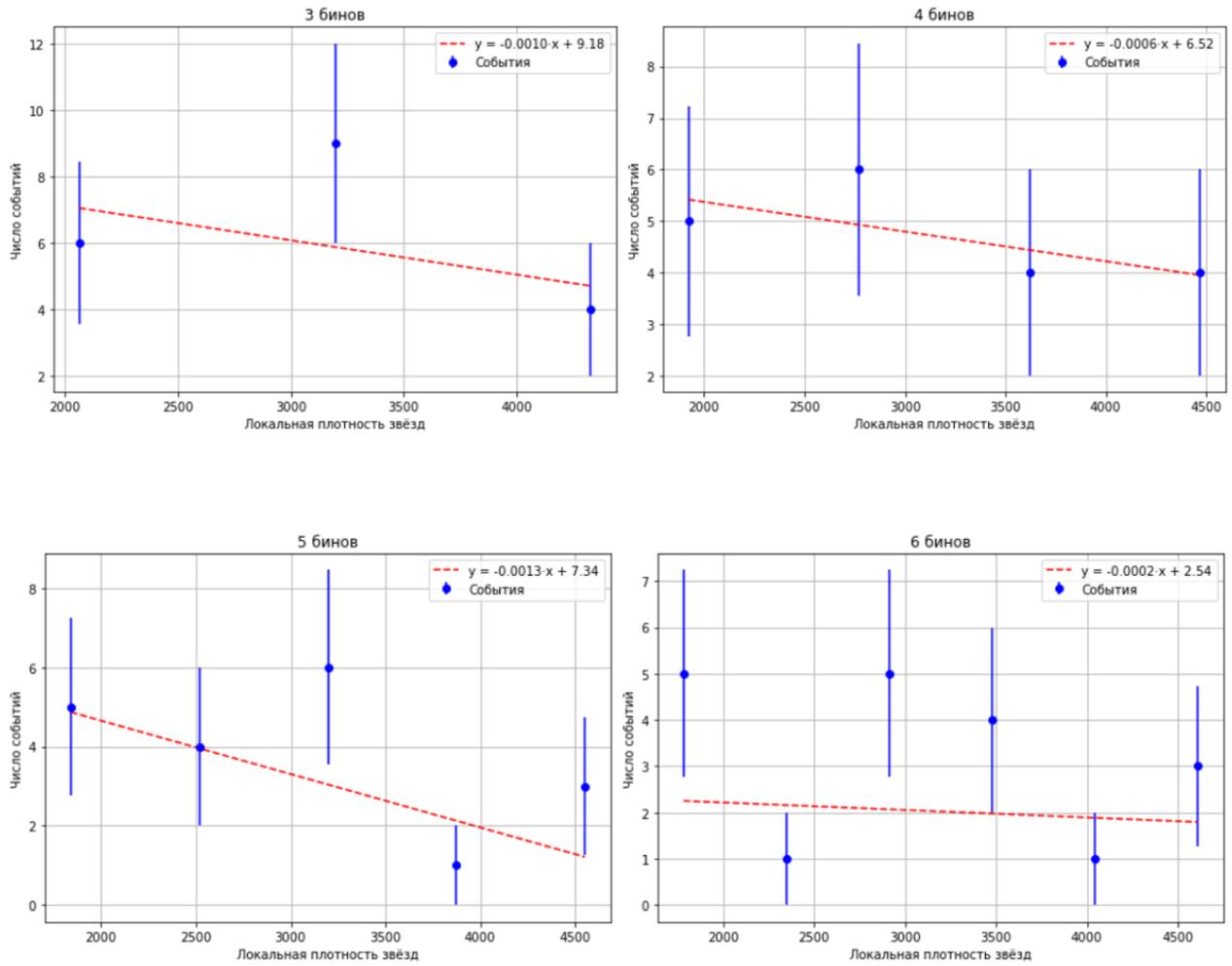


Рис. 7: Зависимость количества событий микролинзирования от локальной плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax + b$)

Бины	Интервал плотности	Событий	Ошибка
3	[1497.61, 2631.0]	6	2.45
	[2631.0, 3761.0]	9	3.00
	[3761.0, 4891.0]	4	2
4	[1497.61, 2348.5]	5	2.24
	[2348.5, 3196.0]	6	2.45
	[3196.0, 4043.5]	4	2.00
	[4043.5, 4891.0]	4	2.00
5	[1497.61, 2179.0]	5	2.24
	[2179.0, 2857.0]	4	2.00
	[2857.0, 3535.0]	6	2.45
	[3535.0, 4213.0]	1	1.00
	[4213.0, 4891.0]	3	1.73
6	[1497.61, 2066.0]	5	2.24
	[2066.0, 2631.0]	1	1.00
	[2631.0, 3196.0]	5	2.24
	[3196.0, 3761.0]	4	2.00
	[3761.0, 4326.0]	1	1.00
	[4326.0, 4891.0]	3	1.73

Таблица 5: Результаты подсчёта числа событий и ошибок для разных бинов для локальной плотности

Результаты графиков зависимости числа событий от плотности звёзд, построенные для "глобальной" и локальной плотности, оказались аналогичными. Однако в случае локальной плотности наклон линии оказался более выраженным, что может свидетельствовать о более сильной зависимости числа событий от плотности звёзд на малых масштабах. Это подтверждает, что микролинзирующие события более чувствительны к изменениям плотности звёзд вблизи каждого события.

3.3 Анализ результатов

Для количественной оценки качества моделей зависимости числа событий микролинзирования от плотности звёзд была построена сравнительная таблица полученных значений χ^2 , представленных в таблице 6. В таблицу вошли результаты анализа как глобального распределения (по крупным областям с усреднённой плотностью), так и локального (по малым участкам, соответствующим масштабу кластеров). Для каждого случая сравнивались обе модели: строго пропорциональная зависимость ($y = ax$) и линейная зависимость со свободным членом ($y = ax + b$). Основным показателем качества модели является χ^2/DoF (хи-квадрат, делённый на степень свободы). Модель хорошо описывает данные, если значение этого показателя ≈ 1 .

Бинов	Модель	Тип плотности	χ^2	DoF	χ^2/DoF
3	$y = ax$	По карте (ячейки)	22.57	2	11.28
3	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	11.75	1	11.75
3	$y = ax$	Локальная	5.47	2	2.74
3	$y = ax + b$	Локальная	1.39	1	1.39
4	$y = ax$	По карте (ячейки)	15.17	3	5.06
4	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	26.40	2	13.20
4	$y = ax$	Локальная	3.17	3	1.06
4	$y = ax + b$	Локальная	0.28	2	0.14
5	$y = ax$	По карте (ячейки)	12.55	3	4.18
5	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	20.77	2	10.38
5	$y = ax$	Локальная	13.03	4	3.26
5	$y = ax + b$	Локальная	3.80	3	1.27
6	$y = ax$	По карте (ячейки)	9.89	4	2.47
6	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	12.12	3	4.04
6	$y = ax$	Локальная	11.42	5	2.28
6	$y = ax + b$	Локальная	6.87	4	1.72

Таблица 6: Сравнение значений χ^2/DoF для различных моделей и типов плотности. Жирным шрифтом выделены модели, которые демонстрируют наилучшее соответствие данным.

Сравнение моделей показало, что:

- Модель $y = ax + b$ лучше описывает данные, чем простая пропорциональная.
- Результаты анализа оказались намного надёжнее при использовании локальной карты плотности звёзд, где сравнение проводится вблизи самих событий. Это логично: при переходе к меньшим масштабам мы учитываем плотность в непосредственном окружении каждого события микролинзирования, а не усреднённые значения по всей области.
- Тем не менее, в модели $y = ax + b$ получается отрицательный наклон. Такой результат может объясняться несколькими причинами: малой статистикой (слишком мало событий), ограниченностью модели или нелинейностью реальной зависимости.

В целом требуется дальнейший анализ полученных результатов. Также стоит рассмотреть возможность, что полученные результаты связаны с кластеризацией первичных чёрных дыр.

4 Заключение

В данной работе была исследована статистика событий микролинзирования, зарегистрированных экспериментом MACHO, с целью анализа возможной кластеризации первичных чёрных дыр. Рассматривались различные распределения временных интервалов между событиями, такие как экспоненциальное, гамма-распределение и распределение Вейбулла. На основе статистических критериев наилучшее описание данных предоставило распределение Вейбулла, которое при определённых параметрах приближалось к экспоненциальному. Это позволяет использовать пуассоновскую модель для оценки вероятности наблюдаемых событий.

Далее были построены зависимости числа событий от плотности звёзд — как в глобальном приближении, так и с учётом локальной плотности в окрестности каждого события. Для обеих зависимостей выполнялось тестирование гипотезы о пропорциональности с учётом двух моделей: $y = ax$ и $y = ax + b$. Хотя для локальной плотности корреляция оказалась более выраженной, в некоторых случаях наблюдался неожиданный отрицательный наклон. Возможные причины этого будут рассмотрены в дальнейшем.

Тем не менее, полученные результаты не противоречат гипотезе кластеризации ПЧД

и подчёркивают необходимость более глубокого анализа. В частности, отрицательные наклоны в линейных моделях зависимости числа событий от плотности звёзд требуют дополнительного внимания, поскольку они могут указывать на кластерную структуру ПЧД. Дальнейший анализ будет направлен на более точное моделирование распределения линз с учётом гипотезы кластеризации.

Список литературы

- [1] N. Afshordi, P. McDonald, and D. N. Spergel. Primordial black holes as dark matter: The power spectrum and evaporation of early structures. *The Astrophysical Journal*, 594(2):L71–L74, August 2003.
- [2] Bernard Carr and Florian Kühnel. Primordial black holes as dark matter candidates. *SciPost Physics Lecture Notes*, May 2022.
- [3] Tristan Blaineau and Marc Moniez. Search for black holes in the galactic halo by gravitational microlensing, 2022.
- [4] Mihael Petač, Julien Laval, and Karsten Jedamzik. Microlensing constraints on clustered primordial black holes. *Phys. Rev. D*, 105:083520, Apr 2022.
- [5] Juan García-Bellido and Sebastien Clesse. Constraints from microlensing experiments on clustered primordial black holes, 2017.
- [6] Konstantin M. Belotsky, Vyacheslav I. Dokuchaev, Yury N. Eroshenko, Ekaterina A. Esipova, Maxim Yu. Khlopov, Leonid A. Khromykh, Alexander A. Kirillov, Valeriy V. Nikulin, Sergey G. Rubin, and Igor V. Svadkovsky. Clusters of primordial black holes. *The European Physical Journal C*, 79(3), March 2019.
- [7] C. Alcock, R. A. Allsman, D. R. Alves, T. S. Axelrod, A. C. Becker, D. P. Bennett, K. H. Cook, N. Dalal, A. J. Drake, K. C. Freeman, M. Geha, K. Griest, M. J. Lehner, S. L. Marshall, D. Minniti, C. A. Nelson, B. A. Peterson, P. Popowski, M. R. Pratt, P. J. Quinn, C. W. Stubbs, W. Sutherland, A. B. Tomaney, T. Vandehei, and D. Welch. The macho project: Microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations. *The Astrophysical Journal*, 542(1):281–307, October 2000.
- [8] A. O. Petters, B. Rider, and A. M. Tegui. A mathematical theory of stochastic microlensing. i. random time delay functions and lensing maps. *Journal of Mathematical Physics*, 50(7), July 2009.
- [9] Lorenzo Zaninetti. New probability distributions in astrophysics: V. the truncated weibull distribution. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 11(01):133–149, 2021.
- [10] Kansuke Nunota, Takahiro Sumi, Naoki Koshimoto, Nicholas J. Rattenbury, Fumio Abe, Richard Barry, David P. Bennett, Aparna Bhattacharya, Akihiko Fukui, Ryusei Hamada, Shunya Hamada, Naoto Hamasaki, Yuki Hirao, Stela Ishitani Silva, Yoshitaka Itow, Yutaka Matsubara, Shota Miyazaki, Yasushi Muraki, Tsutsumi Nagai, Greg Olmschenk, Clement

Ranc, Yuki K. Satoh, Daisuke Suzuki, Paul J. Tristram, Aikaterini Vandorou, and Hibiki Yama. The microlensing event rate and optical depth from moa-ii 9 year survey toward the galactic bulge, 2024.