

Оптимизация статистического анализа событий гравитационного линзирования для сравнения гипотез одиночных первичных чёрных дыр и кластеризованных

Выполнила: О. В. Иванова, гр. М24-114

Научный руководитель: д.ф.- м.н. К. М. Белоцкий

Введение

№	Событие	RA	Dec
1	1a	78.68	-68.80
2	1b	78.68	-68.80
3	4	79.30	-70.78
4	5	79.17	-70.49
5	6	81.55	-70.35
6	7a	76.01	-69.56
7	7b	76.02	-69.56
8	8	81.29	-69.80
9	9	80.08	-69.25
10	13	81.01	-68.82
11	14	83.68	-70.42
12	15	76.44	-69.73
13	18	86.34	-71.16
14	20	73.58	-70.04
15	21	74.31	-69.46
16	22	78.63	-71.15
17	23	76.57	-70.98
18	25	75.57	-68.01
19	27	76.65	-69.35

Цель работы: выяснить, какая из двух гипотез лучше объясняет наблюдаемые события микролинзирования:

1. ПЧД одиночные;
2. ПЧД образуют кластеры.

В первом приближении считаем, что ПЧД распределены на сфере радиусом 10 кпк

Таблица 1: События микролинзирования. Событие №9 — двойное событие микролинзирования.
Для анализа использованы наблюдательные данные эксперимента MACHO.

Анализ распределений временных интервалов

- В работе рассмотрены три распределения, описывающие временные интервалы между событиями микролинзирования:

1. Экспоненциальное распределение:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- События происходят независимо и с постоянной вероятностью во времени.
- Простая модель для случайных процессов.

2. Гамма-распределение:

$$f_X(x) = \begin{cases} x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Учитывает накопление условий (например, подходящих скоростей и плотностей).
- Более гибкая модель по сравнению с экспоненциальной.

3. Распределение Вейбулла:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Обобщение экспоненциального: учитывает изменение частоты событий во времени.
- Задаётся параметрами:
 - k (форма):
 - $k = 1 \rightarrow$ экспоненциальное поведение,
 - $k > 1 \rightarrow$ вероятность растёт,
 - $k < 1 \rightarrow$ вероятность убывает.
 - λ (масштаб): задаёт временной масштаб.

Анализ распределений временных интервалов

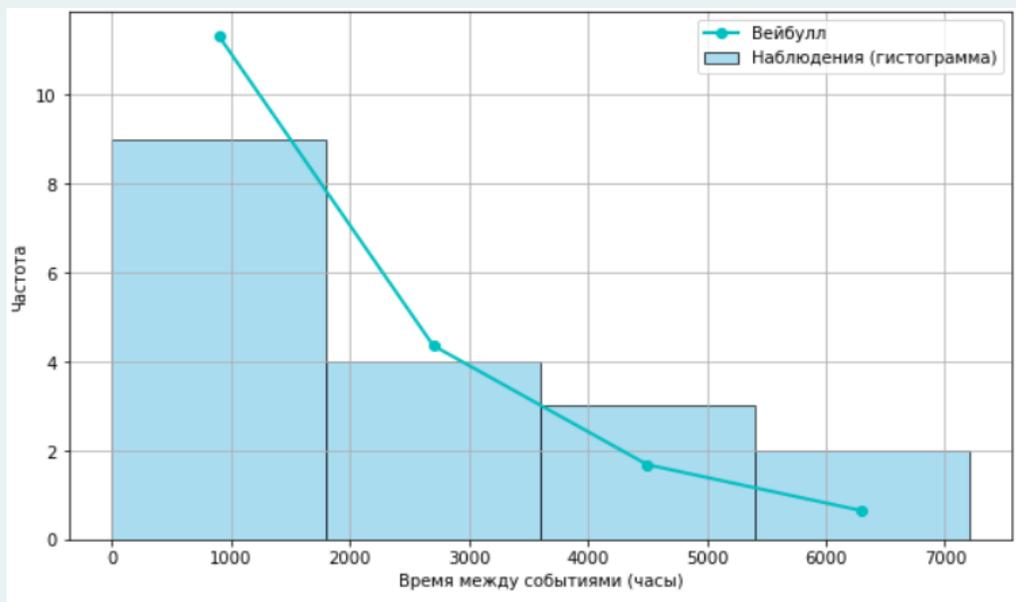
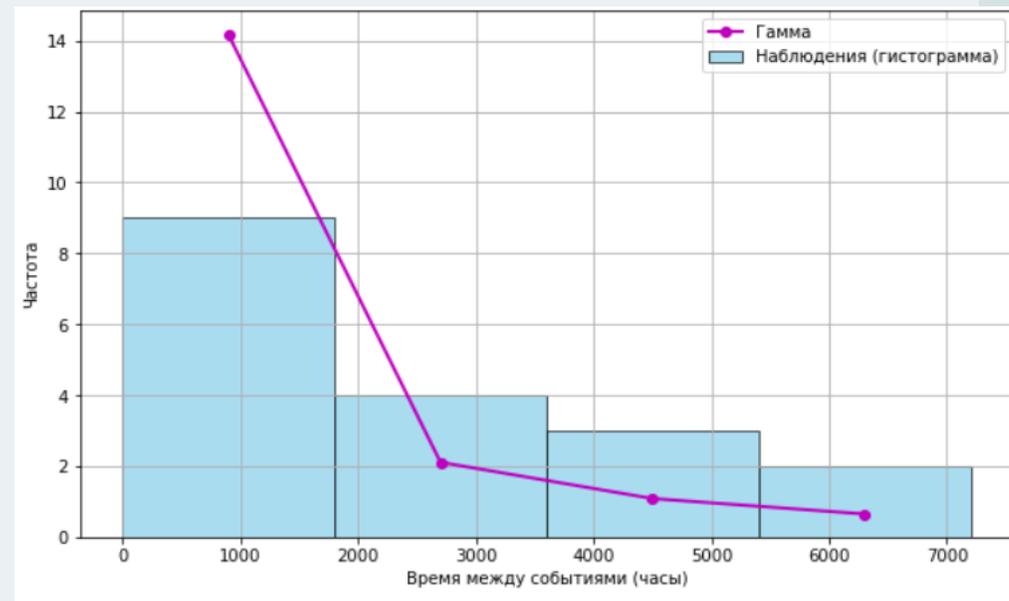
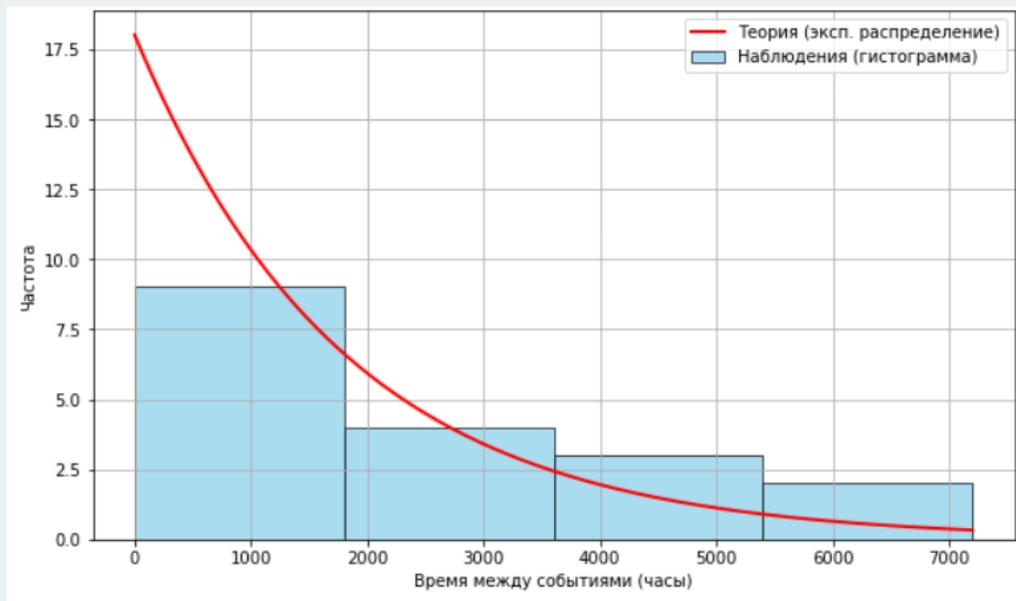


Рис. 1: Сравнение трёх распределений временных интервалов между событиями

Анализ распределений временных интервалов

Анализ показал, что наилучшее соответствие экспериментальным данным демонстрировало распределение Вейбулла. Однако при оценке его параметров оказалось, что показатель формы $k \approx 1$, что означает, что распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное.

Такой результат подтверждает корректность применения распределения Пуассона для оценки вероятности наблюдаемых событий.

Распределение	Хи-квадрат (χ^2)	p-value (%)	Ошибка (%)	Качество подгонки
Экспоненциальное	5.4	14	12	Приемлемо
Гамма	9.8	2	0.9	Плохое
Вейбулла	4.4	22	15	Лучшее

Таблица 2: Сравнение качества подгонки трёх распределений

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

Для анализа была построена реальная карта плотности звёзд по данным эксперимента МАСНО.

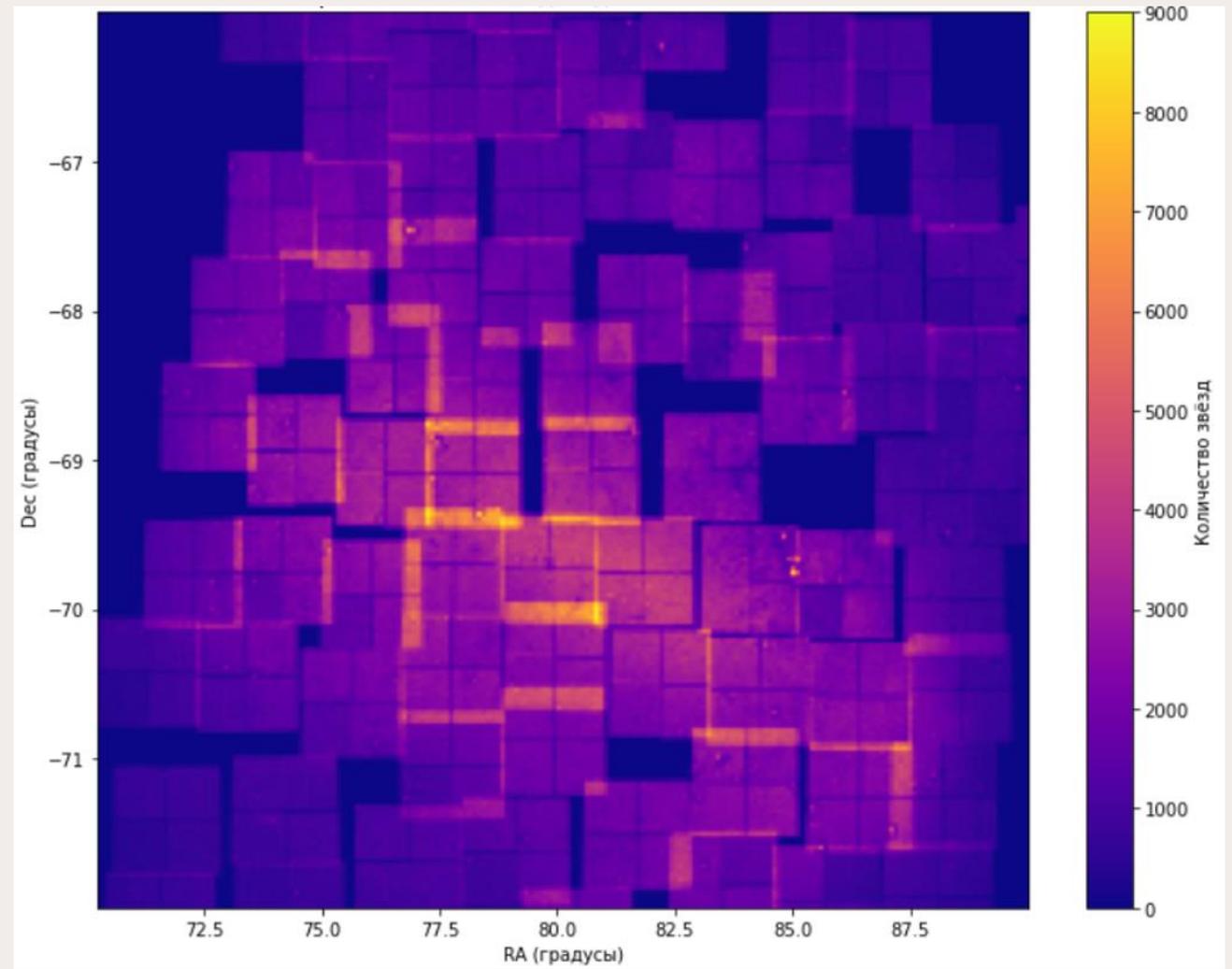


Рис. 2: Карта плотности звёзд по данным МАСНО (БМО)

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

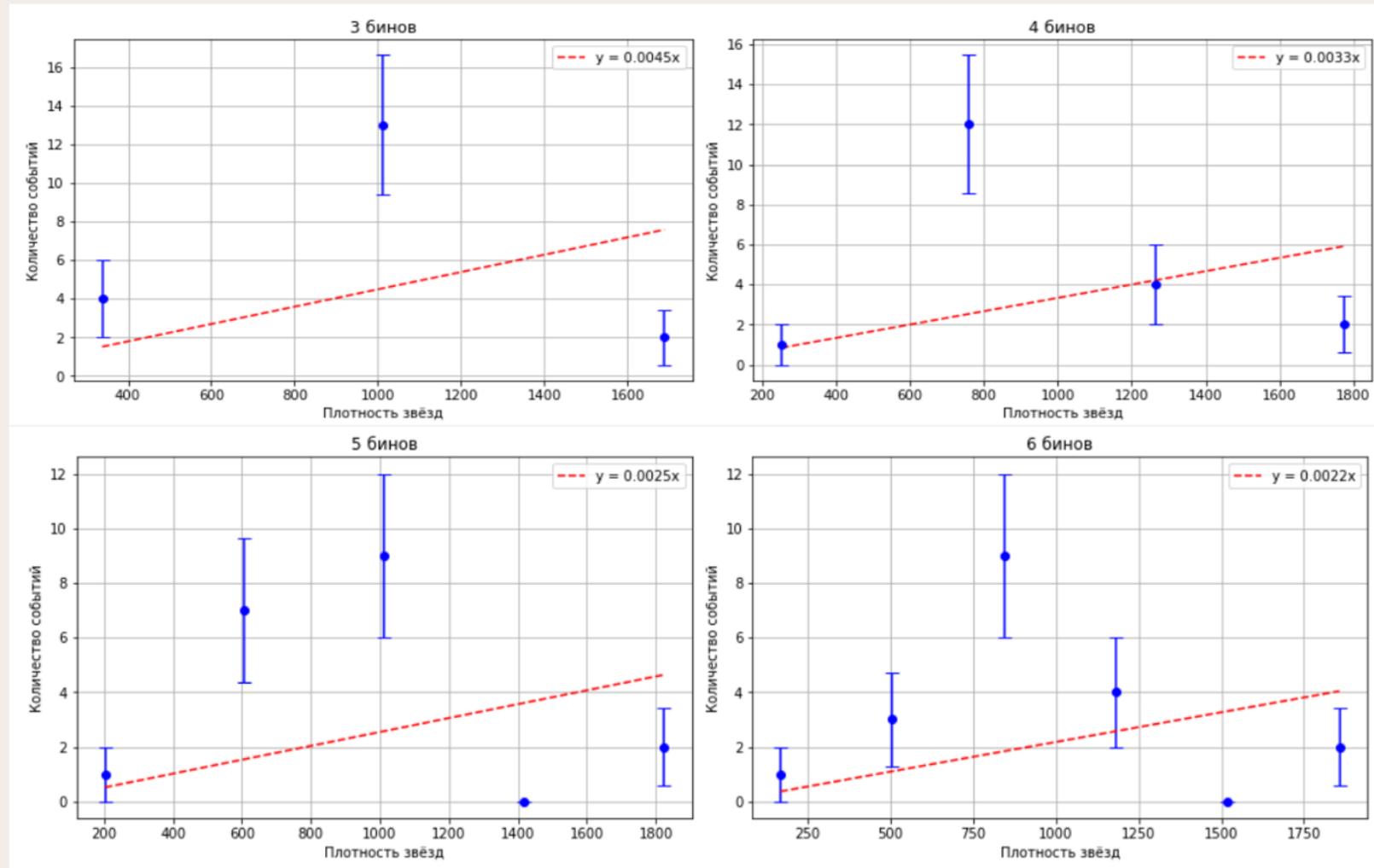


Рис. 3: Зависимость количества событий микролинзирования от плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax$)

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

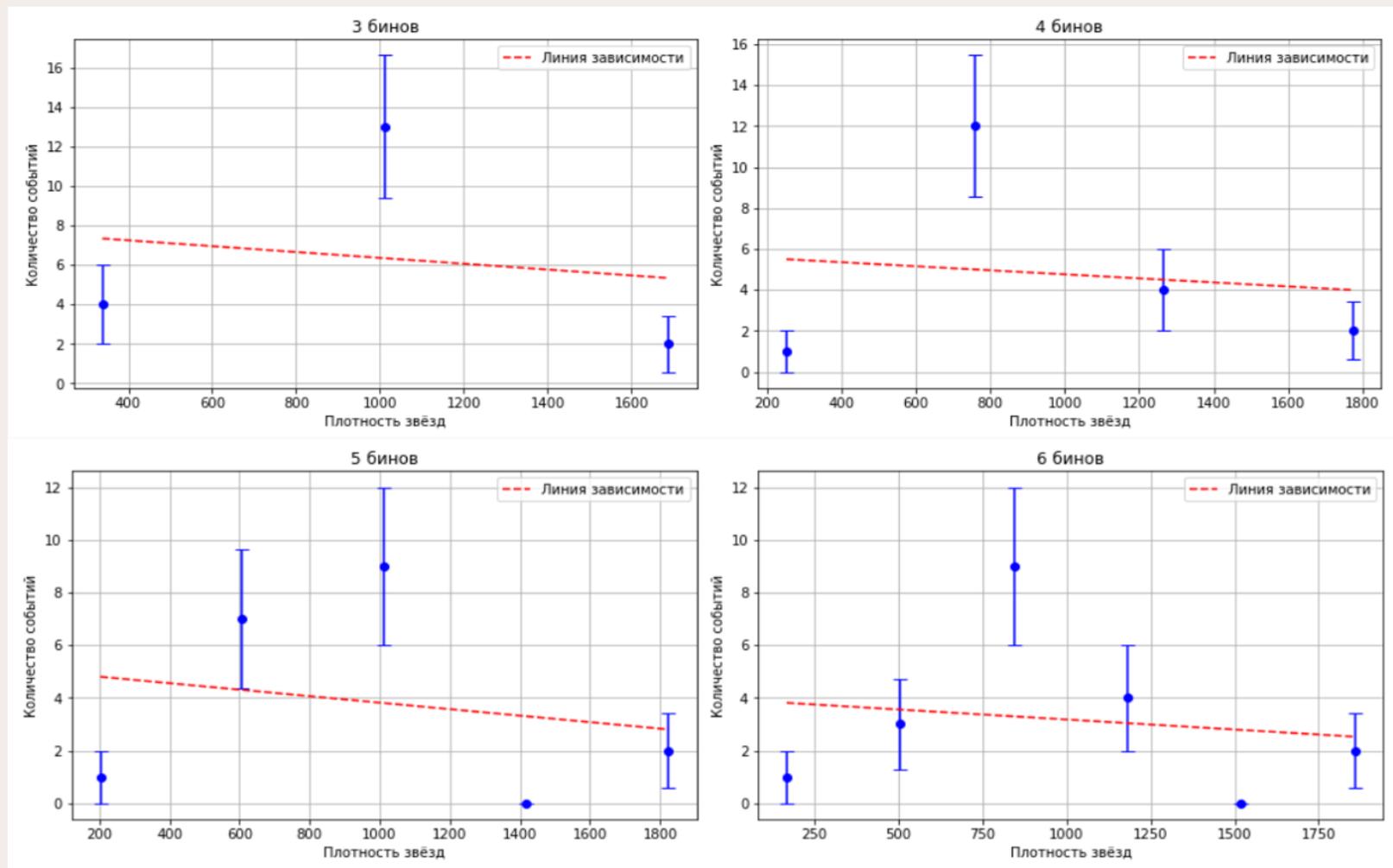


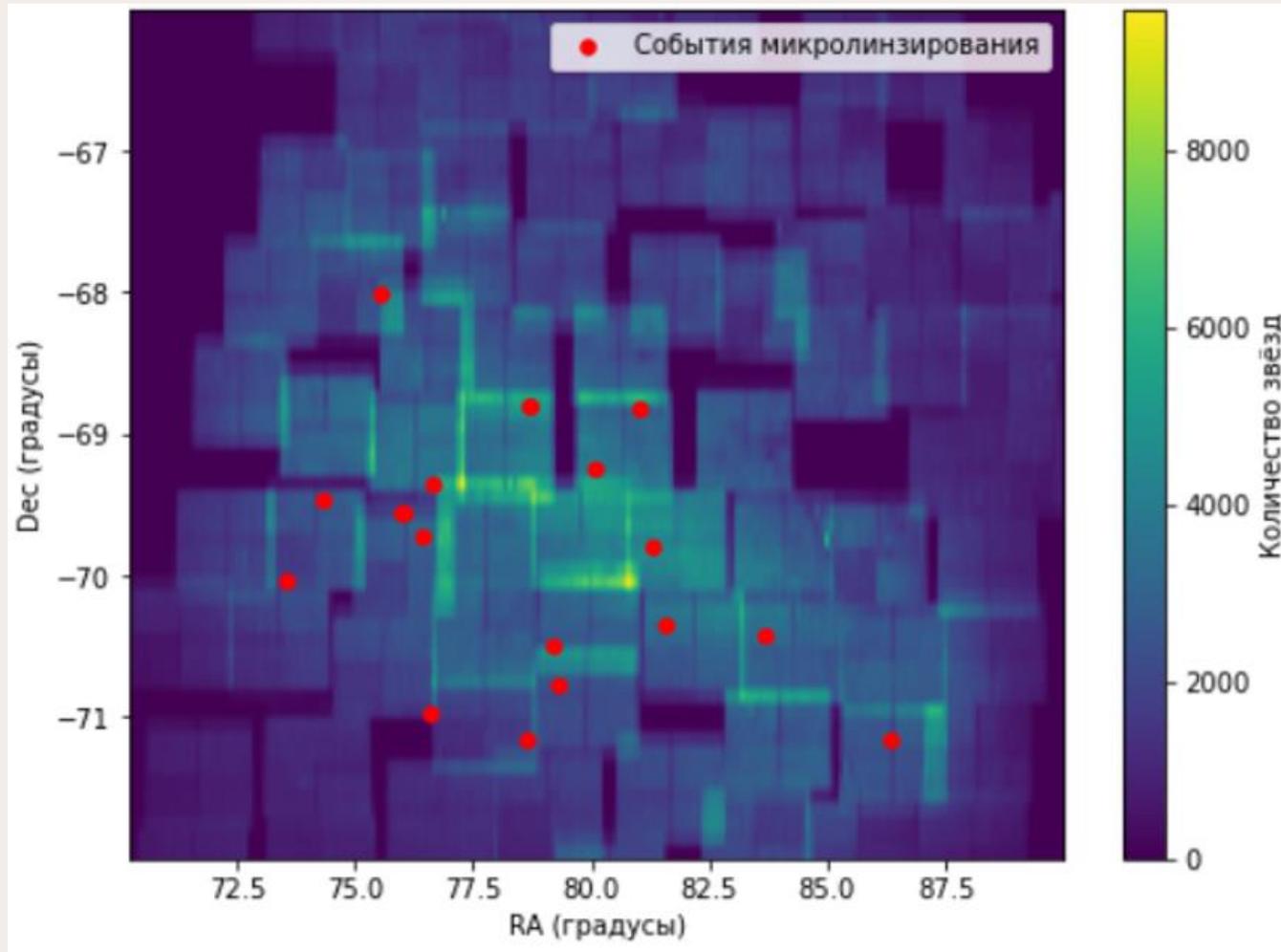
Рис. 4: Зависимость количества событий микролинзирования от плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax + b$)

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

- Обнаружена линейная зависимость числа микролинзирования от плотности звёзд.
- Связь неидеальна — возможны статистические флуктуации и влияние кластеризации первичных чёрных дыр.
- При разделении области на 5–6 бинов возникли так называемые "нулевые бины" — участки без событий микролинзирования.
- Большие размеры бинов и отсутствие событий в них осложнили статистический анализ.

Бины	Интервал плотности	Событий	Ошибка
3	[0.0, 675.3]	4	2.00
	[675.3, 1350.7]	13	3.61
	[1350.7, 2026.0]	2	1.41
4	[0.0, 506.5]	1	1.00
	[506.5, 1013.0]	12	3.46
	[1013.0, 1519.5]	4	2.00
	[1519.5, 2026.0]	2	1.41
5	[0.0, 405.2]	1	1.00
	[405.2, 810.4]	7	2.65
	[810.4, 1215.6]	9	3.00
	[1215.6, 1620.8]	0	0.00
	[1620.8, 2026.0]	2	1.41
6	[0.0, 337.7]	1	1.00
	[337.7, 675.3]	3	1.73
	[675.3, 1013.0]	9	3.00
	[1013.0, 1350.7]	4	2.00
	[1350.7, 1688.3]	0	0.00
	[1688.3, 2026.0]	2	1.41

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд



- После карты глобальной плотности звёзд была построена карта локальной плотности.

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

- Для каждого события микролинзирования рассчитывалась локальная плотность звёзд.
- Радиус расчёта соответствовал типичному размеру кластера ПЧД.

№	RA	Dec	Локальная плотность
1	78.68	-68.80	4891
2	78.68	-68.80	4891
3	79.30	-70.78	2514
4	79.17	-70.49	2646
5	81.55	-70.35	3378
6	76.01	-69.56	1938
7	76.02	-69.56	1938
8	81.29	-69.80	4464
9	80.08	-69.25	4063
10	81.01	-68.82	3053
11	83.68	-70.42	3311
12	76.44	-69.73	3101
13	86.34	-71.16	2661
14	73.58	-70.04	1882
15	74.31	-69.46	2689
16	78.63	-71.15	1823
17	76.57	-70.98	1501
18	75.57	-68.01	3417
19	76.65	-69.35	3413

Таблица 4: Таблица значений локальной плотности для событий микролинзирования

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

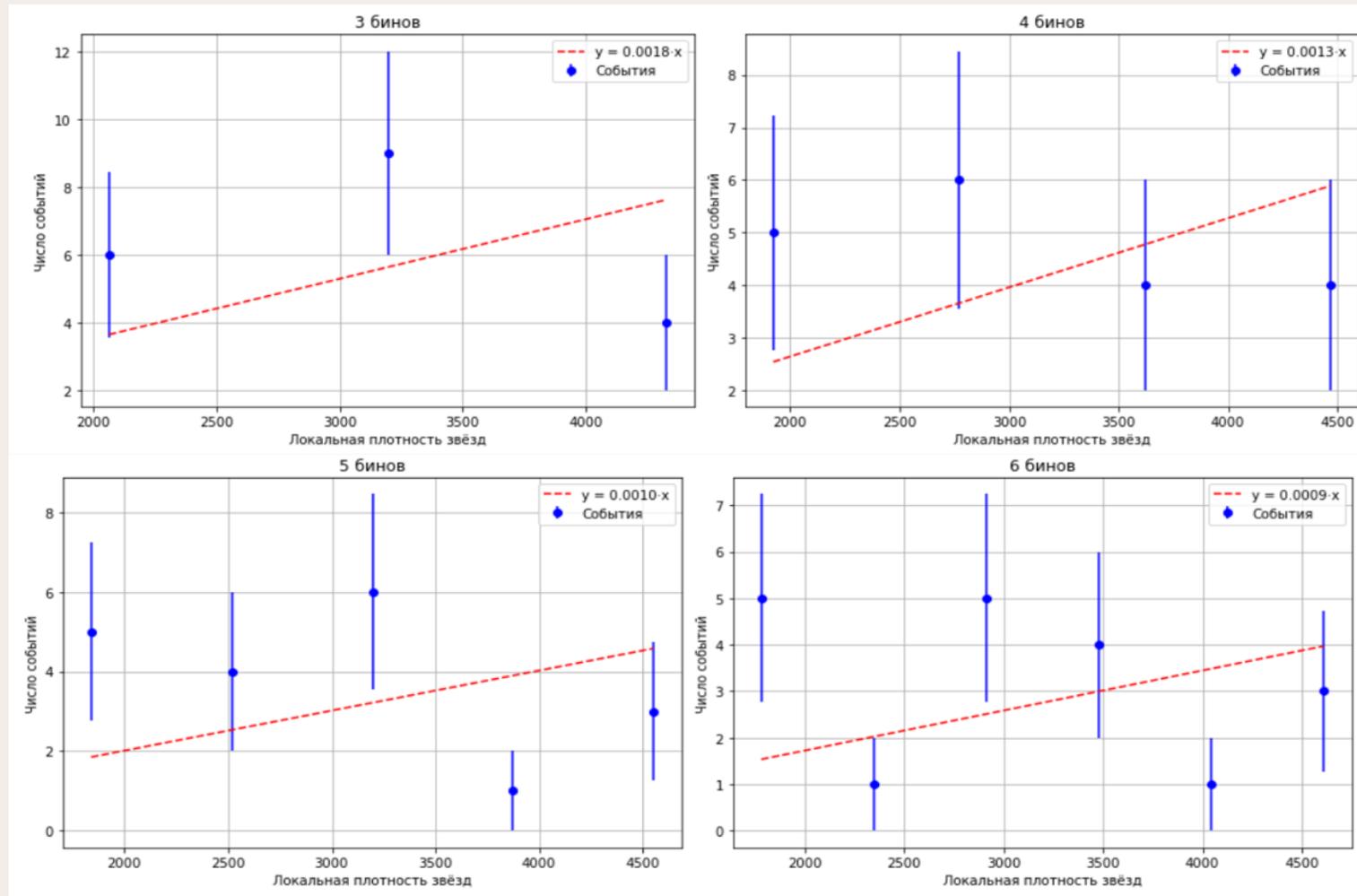


Рис. 6: Зависимость количества событий микролинзирования от локальной плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax$)

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

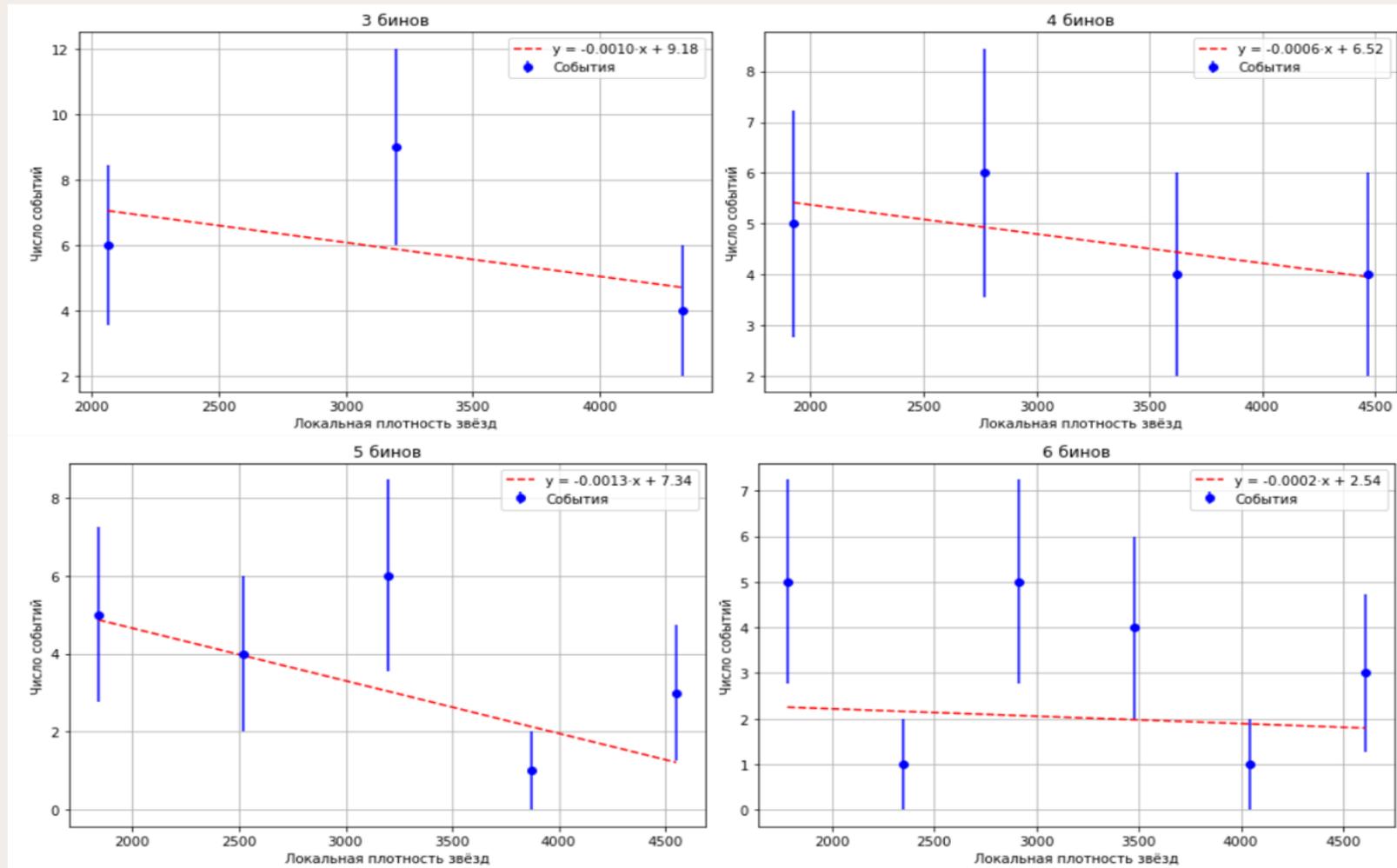


Рис. 7: Зависимость количества событий микролинзирования от локальной плотности звёзд при разном количестве бинов ($y = ax + b$)

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

- Графики зависимости числа событий от плотности звёзд похожи для обеих карт.
- При локальной плотности наклон линии более выражен.
- Это указывает на сильную зависимость числа событий от плотности на малых масштабах.
- Подтверждает, что микролинзирование чувствительно к локальной структуре звёздного распределения.

Бины	Интервал плотности	Событий	Ошибка
3	[1497.61, 2631.0]	6	2.45
	[2631.0, 3761.0]	9	3.00
	[3761.0, 4891.0]	4	2
4	[1497.61, 2348.5]	5	2.24
	[2348.5, 3196.0]	6	2.45
	[3196.0, 4043.5]	4	2.00
	[4043.5, 4891.0]	4	2.00
5	[1497.61, 2179.0]	5	2.24
	[2179.0, 2857.0]	4	2.00
	[2857.0, 3535.0]	6	2.45
	[3535.0, 4213.0]	1	1.00
	[4213.0, 4891.0]	3	1.73
6	[1497.61, 2066.0]	5	2.24
	[2066.0, 2631.0]	1	1.00
	[2631.0, 3196.0]	5	2.24
	[3196.0, 3761.0]	4	2.00
	[3761.0, 4326.0]	1	1.00
	[4326.0, 4891.0]	3	1.73

Таблица 5: Результаты подсчёта числа событий и ошибок для разных бинов для локальной плотности

Нахождение зависимости количества событий микролинзирования от плотности звёзд

Бинов	Модель	Тип плотности	χ^2	DoF	χ^2/DoF
3	$y = ax$	По карте (ячейки)	22.57	2	11.28
3	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	11.75	1	11.75
3	$y = ax$	Локальная	5.47	2	2.74
3	$y = ax + b$	Локальная	1.39	1	1.39
4	$y = ax$	По карте (ячейки)	15.17	3	5.06
4	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	26.40	2	13.20
4	$y = ax$	Локальная	3.17	3	1.06
4	$y = ax + b$	Локальная	0.28	2	0.14
5	$y = ax$	По карте (ячейки)	12.55	3	4.18
5	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	20.77	2	10.38
5	$y = ax$	Локальная	13.03	4	3.26
5	$y = ax + b$	Локальная	3.80	3	1.27
6	$y = ax$	По карте (ячейки)	9.89	4	2.47
6	$y = ax + b$	По карте (ячейки)	12.12	3	4.04
6	$y = ax$	Локальная	11.42	5	2.28
6	$y = ax + b$	Локальная	6.87	4	1.72

- Основной критерий оценки качества модели — $\chi^2/\text{DoF} \approx 1$ (хорошее соответствие модели данным).
- Модель $y = ax + b$ описывает данные лучше, чем пропорциональная.
- Локальная карта плотности даёт более надёжные результаты.

Таблица 6: Сравнение значений χ^2/DoF для различных моделей и типов плотности.

Жирным шрифтом выделены модели, которые демонстрируют наилучшее соответствие данным.

Заключение

- Проанализированы события микролинзирования из эксперимента МАСНО для проверки гипотезы о кластеризации первичных чёрных дыр (ПЧД).
- Изучались **распределения временных интервалов между событиями**. Распределение Вейбулла наилучшим образом описывает интервалы между событиями, но с параметрами, близкими к экспоненциальному.
- Локальная плотность показывает более выраженную зависимость числа событий от плотности звёзд, чем глобальная. В модели $y = ax + b$ наблюдаются отрицательные наклоны (возможно, из-за кластеризации или малой статистики).
- Результаты **не противоречат гипотезе** кластеризации ПЧД.
- Необходим дальнейший анализ и более точное моделирование распределения линз с учётом возможной кластерной структуры.

Спасибо за внимание!

Back-Up

Оценка вероятности наблюдения событий с помощью распределения Пуассона

Пуассоновское распределение описывает вероятность наблюдать k событий в фиксированном интервале при известном среднем числе событий λ , если события происходят независимо и случайно

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Для оценки среднего числа событий λ используем следующую формулу:

$$\lambda = \frac{S \cdot N_{\text{ПЧД}}}{4\pi r^2} \cdot N_{\text{ЗВ}}$$

В нашем случае:

- $k = 20$ — число наблюдаемых событий микролинзирования;
- λ — среднее число событий микролинзирования.

Оценка вероятности наблюдения событий с помощью распределения Пуассона

Подставляя значения:

$$S = 10 \text{ лет} \cdot 200 \text{ км/с} \cdot 2R_E \approx 1.63 \cdot 10^{-8} \text{ пк}^2$$

Подставим в формулу:

$$\lambda = \frac{S \cdot N_{\text{ПЧД}}}{4\pi r^2} \cdot N_{\text{зв}} = \frac{1.63 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{11}}{1.26 \cdot 10^9} \cdot 2.225 \cdot 10^7 \approx 2.9$$

Подставляя значения $k = 20$, $\lambda = 2.9$ в формулу Пуассона:

$$P(20; 0.685) = \frac{2.9^{20} \cdot e^{-2.9}}{20!} \approx 3.5 \cdot 10^{-11}$$

Вероятность наблюдать 20 событий при равномерном распределении ПЧД крайне мала. Оценка вероятности наблюдения требует дополнительного рассмотрения.