МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 524.882

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ ДИНАМИКА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР В КЛАСТЕРАХ

Студент	________ К. М. Гордильо Гарсия
Научный руководитель, ассистент каф. 40	________ В. Д. Стасенко

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ДИНАМИКА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР В КЛАСТЕРАХ

Студент	________ К. М. Гордильо Гарсия
Научный руководитель, ассистент каф. 40	________ В. Д. Стасенко
Рецензент, д.ф.-м.н.	________ В. А. Гани
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	________ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	________ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

После открытия гравитационных волн коллабарацией LIGO-Virgo, сливающиеся первичные черные дыры (ПЧД) активно рассматриваются как их возможный источник [1—4]. Также существует ряд других указаний на существование ПЧД: наблюдение сверхмассивных черных дыр на больших красных смещениях [5], при некоторых массовых диапазонах ПЧД возможно объяснение темной материи [6], недавно обнаружен стохастический гравитационно-волновой фон может объяснен либо формированием ПЧД [7], либо их слиянием [8].

На ПЧД наложены существенные наблюдательные ограничения на их вклад в состав темной материи $f = \Omega_{PBH}/\Omega_{DM}$ [6; 9]. В контексте данной работы в частностности, вклад ПЧД с массами $\sim 10\,M_\odot$ ограничен на уровне $f \lesssim 10^{-3}$ по наблюдению темпа слияний черных дыр таких масс коллабарацией LIGO-Virgo-KAGRA (LVK). Это ограничение предполагает, что двойные ПЧД формируются в ранней Вселенной на РД стадии, что соответвует времени $< t_{eq} \approx 70$ тыс. лет (индекс eq означает момент перехода от РД к МД стадии). Далее сформированные двойные постепенно закручиваются из-за излучения гравитационных волн и в конечном итоге сливаются. Если доля ПЧД будет $f \gtrsim 10^{-3}$, то темп слияний ПЧД будет превышать наблюдения LVK. Однако эти ограничения не учитывают возможное разрушение двойных от момента ее формирования глубоко в ранней Вселенной до современного момента $t_0 = 13.8$ млрд. лет. В работах [10; 11] было показано, что при больших долях ПЧД $f \gtrsim 0.01$ активно происходит кластеризация ПЧД при красных смещениях $z > 10$. В таких кластерах ПЧД активно рассеиваются друг на друге в результате чего возможно разрушение или возмущение параметров двойной системы, что ведет к ослаблению ограничений до $f \sim 0.1$.

С другой стороны существует ряд моделей предсказывающих изначальную кластеризацию ПЧД [12; 13] для которых ослабление ограничений за счет возмущения двойных систем также релевантно. Формально статистика пар двойных ПЧД в этом случае строится полностью аналогично формализму работы [1] — отцепление пар от Хаббловского потока глубоко на РД стадии. Однако в случае когда двойные оказывается погруженными в плотную среду кластера, то они подвергаются активном возмущениями из-за рассеяния на ней окружающих черных дыр. В результате этого могут изменяться параметры двойной: ее большая полуось, эксцентриситет и, следовательно, время слияния. В данной работе мы сосредотачиваемся на возможное изменение времени жизни системы как результат таких рассеиваний и влияние этого процесса на темп слияния ПЧД. Для получения количественных результатов относительно разрушения или возмущения параметров двойной ПЧД, в данной работе моделируется задача трех тел — рассеяние двойной системы ПЧД на третьей ПЧД в кластере.

1 ФОРМИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ПЧД В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ И ИХ ТЕМП СЛИЯНИЯ

1.1 ФОРМИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ПЧД В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В этой главе дается обзор формирования двойных ПЧД в ранней Вселенной [1; 14; 15]. На качественном уровне идея формирования двойных ПЧД на РД стадии состоит в том, что плотность двух ПЧД в некоторый момент времени t_d (индекс d означается decouple) окажется больше, чем плотность излучения. Происходит это из-за того, что плотность излучения падает как $\rho_r \propto s^{-4}$, в то время как плотность вещества $\rho_M \propto s^{-3}$, где s— это масштабный фактор. Также считается, что ПЧД случайно распределены в пространстве, в результате чего локально плотность двух ПЧД может быть сильно повышенной, что ведет в момент t_d к формированию пары.

Оценим момент формирования пары t_d. Введем среднее расстояние между ПЧД на момент t_{eq}

$$\overline{x} = \left(\frac{M}{\rho_{PBH}}\right)^{1/3} = \frac{1}{s_{eq} f^{1/3}} \left(\frac{M}{\Omega_{DM}\rho_c}\right)^{1/3}, \tag{1.1}$$

где $\rho_{PBH} = f\rho_{DM}$ — плотность ПЧД, а также полагается современный масштабный фактор нормирован на единицу $s_0 = 1$, $\rho_c = 127\, M_\odot$ кпк$^{-3}$ — современная критическая плотность Вселенной и $\Omega_{DM} = \rho_{DM}/\rho_c = 0.25$ — доля темной материи в составе Вселенной. Пара ПЧД становится гравитационно-связанной в момент выполнения условия

$$\frac{M}{R^3} = \rho_r(t_d) = \rho_{r,eq} \left(\frac{s_{eq}}{s_d}\right)^4 \tag{1.2}$$

где $R = xs_d/s_{eq}$, где x — расстояние между двумя ПЧД на момент t_{eq}, если бы они продолжили расширяться вместе со Вселенной (собственное расстояние). Отметим, что в рассматриваемом предположении x меняется в пределах от 0 до $\overline{x}$. Тогда получим

$$\frac{s_{eq}}{s_d} = \frac{1+z_d}{1+z_{eq}} = f\left(\frac{\overline{x}}{x}\right)^3, \tag{1.3}$$

где $z_{eq} = 3400$— красное смещение РД-МД перехода. Видно, что чем ближе пара (маленькие x) тем раньше она формируется (больше z_d). Также отметим, что в момент РД-МД перехода z_{eq} формируются пары для которых $x = f^{1/3}\overline{x}$.

После отцепления от расширения Вселенной две ПЧД будут иметь ненулевой момент импульса, который создается приливными силами от третьей ближайшей ПЧД, поэтому лобовое столкновение двух ПЧД не происходит. В случае $f < 0.01$ момент импульса будет уже создавать инфляционными адиабатическими возмущениями [15]. Перпендикулярную составляющая скорости на момент формирования пары можно оценить

$$v_\perp \sim F_t\tau, \tag{1.4}$$

где $F_t = GMR/d^3$ — приливная сила на единицу массу от третьей ПЧД и $d = ys_d/s_{eq}$ — расстояние до нее и y имеет тот же смысл что и переменная x. Поскольку расстояние до третьей ПЧД должно быть больше, чем расстояние между ПЧД формирующих пару, то $x < y$, также должны быть выполнено $y < \overline{x}$. Время в формуле (1.4) оценим как время действия приливной силы $\tau \sim H^{-1}$ — возраст Вселенной на момент формирования двойной $\tau \sim 1/\sqrt{G\rho_{r,d}}$. После формирования приливные силы “выключаются” и на динамику двойной не влияют. Тогда момент импульса будет

$$l \sim Rv_\perp \sim \left(\frac{R}{d}\right)^3 \sqrt{GMR}, \tag{1.5}$$

где мы учли $\rho_{r,d} = M/R^3$ на момент формирования пары. Введем безразмерный угловой момент $j = \sqrt{1-e^2}$, где e — эксцентриситет, тогда из результатов задачи Кеплера следует

$$j = \sqrt{\frac{|E|l^2}{M^3G^2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3, \tag{1.6}$$

где энергия была оценена как $E = -GM/R$. Большая полуось в свою очередь с помощью (1.2) оценивается как $a = R$

$$a = \frac{x}{f}\left(\frac{x}{\overline{x}}\right)^3. \tag{1.7}$$

Полученные результаты с точностью до множителя порядка единицы совпадают с численным исследованием формирования двойной [15; 16].

Вероятность того, что расстояние между двумя ПЧД будет $(x, x+dx)$ и расстояние до третьей ПЧД $(y, y+dy)$, которая создает угловой момент двойной, дается соотношением [1]

$$dP = \frac{9}{\overline{x}^6}x^2y^2dxdy \tag{1.8}$$

где пределы $0 < x < \overline{x}$ и $x < y < \overline{x}$. Видно, что часть распределения по y преимущественно набирается при больших значения $y \lesssim \overline{x}$, а значит $j \ll 1$, что соответствует орбитам из высокоэксцентричных эллипсов. Для того, чтобы это явно показать перейдем от переменных x, y в распределении (1.8) к a, j с помощью формул перехода (1.6) и (1.7)

$$dP = \frac{3}{4}\left(\frac{f}{\overline{x}}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{a}}{j^2}dadj \tag{1.9}$$

где пределы $(af/\overline{x})^{3/4} < j < 1$ и $0 < a < \overline{x}/f$. В этой формуле более явно видно, что распределение по j сильнее при $j \ll 1$.

После формирования двойная система постепенно закручивается за счет излучения гравитационных волн и ее время слияния определяется как [17]

$$t_{gw} = \frac{3\,c^5a^4j^7}{170\,G^3M^3}, \tag{1.10}$$

где c — скорость света. Оценим характерные начальные параметры двойной, сливающихся за время t_{gw}. Т.к. распределение (1.9) максимально при малых j, то будет считать, что характерное значение $j_* \sim (af/\overline{x})^{3/4}$ при заданной большой полуоси a, тогда

$$a_* = \left(\frac{170 G^3 M^{19/4} t_{gw}}{3 c^5 f^7 \rho_{DM,eq}}\right)^{4/37} \approx 137\, f^{-28/37} \left(\frac{M}{10\, M_\odot}\right)^{19/37} \left(\frac{t_{gw}}{10\,\mathrm{Gyr}}\right)^{4/37} \mathrm{au} \tag{1.11}$$

характерное значение больших полуосей для двойных, сливающихся в современную эпоху. Характерное значение углового момента в свою очередь

$$j_* \approx 0.014\, f^{16/37} \left(\frac{M}{10\, M_\odot}\right)^{5/37} \left(\frac{t_{gw}}{10\,\mathrm{Gyr}}\right)^{3/37}, \tag{1.12}$$

как и ожидалось двойные имеют очень маленькие угловые моменты, что соответствует эксцентристету близкие к 1 для случая $f = 1$. Также отметим, что полученные зависимости от f и M и значения по порядку величины соответствуют более тщательному расчету [4].

1.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕМПА СЛИЯНИЯ ДВОЙНЫХ ПЧД

Теоретическая оценка темпа слияния двойных ПЧД является ключевой задачей для сопоставления сценария ПЧД с наблюдательными данными, в частности, с событиями, детектируемыми гравитационно-волновыми детекторами. В работе [1], основываясь на механизме формирования двойных ПЧД, предложенном ранее в [14], был выполнен детальный расчет темпа слияния для ПЧД, который здесь воспроизводится.

Отправной точкой является распределение начальных параметров двойных систем, формирующихся на радиационно-доминированной стадии Вселенной (1.9). Для определения темпа слияний удобно перейти от переменной большой полуоси a к времени t с помощью соотношения (1.10). Тогда дифференциальная вероятность слияния в единицу времени дается выражением

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{16}\frac{f^2}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^{-5/8}\int\limits_{j_{\min}}^{1} j^{-37/8}\,dj, \tag{1.13}$$

где нижний предел определяется как $j_{\min} = (t/T)^{3/37} f^{16/37}$ (что также соответствует выражению (1.12)), и

$$T = \frac{3c^5\overline{x}^4 f^{4/3}}{170G^3M^3} \sim 10^{34}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-5/3} \text{ yr} \tag{1.14}$$

физически соответствует времени слияния двойной ПЧД на круговой орбите с максимально возможной большой полуосью в случае $f = 1$. После элементарного интегрирования выражения (1.13), получим сопутствующий темп слияний ПЧД

$$\begin{aligned} R &= \frac{f\Omega_{\rm DM}}{M}\frac{3H_0^2}{8\pi G}\frac{dP}{dt} \\ &\approx \frac{2.15\times10^5}{\text{Gpc}^3\,\text{yr}} f^{53/37}\left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^{-32/37}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-34/37}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

где вторая дробь в первом равенстве есть критическая плотность $\rho_{\rm crit}$ и $t_0 = 13.8$ Gyr — современный возраст Вселенной.

Анализ этой зависимости (Рисунок 1 в [1]) показывает, что темп слияния двойных ПЧД с массами $\sim 10\,M_\odot$, формирующихся по данному механизму, согласуется с диапазоном темпов событий, оцененным коллаборациями LIGO/Virgo $R = 18 \div 44$ Gpc^{-3} yr^{-1} [18], если доля ПЧД в темной материи составляет $f \sim 10^{-3}$. Этот результат делает сценарий ПЧД интересным кандидатом для объяснения наблюдений LIGO/Virgo и указывает на возможность его проверки будущими гравитационно-волновыми экспериментами.

Следует отметить, что представленный в данном разделе теоретический расчет темпа слияния основывается на предположении об изолированном формировании и эволюции двойных систем. Он не учитывает динамические взаимодействия с другими объектами в плотных средах, таких как кластеры, что мы предлагаем в данной работе. В таких динамически активных средах, тройные и множественные взаимодействия, могут существенно изменять орбитальные параметры двойных систем, ускоряя или замедляя их слияние, или даже приводя к их разрушению и формированию новых пар. Именно эти сложные динамические эффекты, не учтенные в аналитической модели здесь, будут далее обсуждаться в контексте их влияния на темп слияний ПЧД.

2 ЗАДАЧА О РАССЕЯНИИ ПЧД НА ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Для исследования динамических исходов взаимодействия компактного объекта, такого как черная дыра, с двойной системой в кластере, было проведено численное моделирование задачи трех тел в пакете MATLAB R2023b. Рассматривалась система, состоящая из двух черных дыр и налетающей к ней третьей дыры. Целью моделирования является анализ изменения параметров исходной двойной системы, возможности ее разрушения или формирования новых связанных объектов в результате гравитационного взаимодействия.

2.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Динамика системы трех тел описывается уравнениями движения под действием сил взаимного гравитационного притяжения согласно закону Ньютона. Для каждого тела уравнения движения определяются суммой гравитационных сил, действующих на него со стороны двух других тел:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^{3} \mathbf{F}_{ij}, \tag{2.1}$$

где m_i — масса i-го тела, $\mathbf{r}_i$ — его радиус-вектор, а $\mathbf{F}_{ij}$ — сила гравитационного взаимодействия между телами i и j:

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \tag{2.2}$$

При моделировании очень близких сближений точечных тел прямое применение закона Ньютона может приводить к вычислительным трудностям из-за сингулярности силы при нулевом расстоянии. Для предотвращения этого и стабилизации расчетов, особенно при использовании фиксированного или не очень мелкого шага интегрирования вблизи сближений, вводится параметр сглаживания гравитационного потенциала:

$$\mathbf{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \tag{2.3}$$

где ϵ — параметр сглаживания. Этот подход позволяет избежать формального "деления на ноль" в численных вычисления.

Система уравнений движения является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Она решается численно с использованием метода Рунге—Кутты—Фельберга (RKF45). Выбор такого метода обусловлен необходимостью достижения высокой точности при моделировании гравитационных взаимодействий, особенно при близких пролетах, где силы меняются быстро.

При численном интегрировании мы используем *адаптивный шаг по времени*. Это означает, что размер временного шага, на который продвигается решение, не фиксирован, а динамически подстраивается в зависимости от текущего состояния системы. При сближении тел, когда гравитационные силы возрастают, и динамика становится более быстрой, шаг интегрирования автоматически уменьшается для поддержания заданной точности. Наоборот, когда тела находятся далеко друг от друга, и силы малы, шаг увеличивается, что значительно ускоряет расчеты. Адаптивный шаг регулируется таким образом, чтобы относительная ошибка на каждом шаге не превышала заданного порога.

2.2 АДАПТИВНЫЙ РАСЧЁТ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ

Для обеспечения численной устойчивости и точности при моделировании трехчастичного рассеяния используется адаптивный шаг по времени. Он вычисляется на каждом шаге интегрирования на основе текущих расстояний и относительных скоростей между телами. Этот алгоритм реализован следующим образом: пусть N — общее количество тел. Для каждой пары тел (i, j), где $i < j$, производится расчёт:

1) Вычисляется вектор относительного положения:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \tag{2.4}$$

   и вектор относительной скорости:

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i \tag{2.5}$$

2) Далее находятся их модули:

$$r_{ij} = \|\vec{r}_{ij}\|, \qquad v_{ij} = \|\vec{v}_{ij}\| \tag{2.6}$$

3) Для данной пары тел оценивается характерное время эволюции оценивается как:

$$\Delta t_{ij} = \frac{r_{ij}}{v_{ij}} \tag{2.7}$$

4) Минимальное значение среди всех пар используется для дальнейших расчётов:

$$\Delta t_{\min} = \min_{i<j} \left(\frac{r_{ij}}{v_{ij}} \right) \tag{2.8}$$

5) Итоговый шаг по времени вычисляется как:

$$\Delta t = \varepsilon \cdot \Delta t_{\min} \tag{2.9}$$

   где $\varepsilon \ll 1$ — малый коэффициент, задающий точность расчёта. В наших вычислениях было определено, что при $\varepsilon \lesssim 0.05$ достигается требуемая точность вычисление и дальнейшее уменьшение ε не играет существенной роли

Этот алгоритм позволяет автоматически уменьшать шаг при приближении тел друг к другу, обеспечивая при этом достаточную точность вычислений вблизи точек, где силы принимают огромные значения: вблизи прохождения точек минимального сближения.

2.3 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Исход рассеяния, которые мы рассматривает, зависит от выбора начальных условий, которые в работе разыгрываются случайным образом. К тому же начальное состояние системы должно соответствовать ситуации, когда третья черная дыра приближается к двойной системе издалека, практически “с бесконечности”.

Начальное состояние системы характеризуется следующими параметрами:

- Массы компонентов двойной звезды (m_1, m_2).
- Масса налетающего третьей черной дыры (m_3).
- Параметры исходной орбиты двойной системы: большая полуось a и эксцентриситет e.
- Параметры относительного движения третьего тела относительно центра масс двойной системы на большом расстоянии: относительная скорость $v_{\mathrm{rel,inf}}$ и прицельный параметр b.

Прицельный параметр b представляет собой минимальное расстояние, на которое прошло бы третье тело от центра масс двойной, если бы между ними не действовала гравитация (движение по прямой). Скорость $v_{\mathrm{rel,inf}}$ — это их относительная скорость на бесконечности, когда они еще не начали взаимодействовать.

Начальные положения и скорости между третьей черной дырой и двойной на достаточно большом расстоянии друг от друга, чтобы гравитационное взаимодействие в начальный момент времени было пренебрежимо малым. Начальные условия для движения третьего тела относительно центра масс двойной задаются таким образом, чтобы соответствовать выбранным параметрам b и $v_{\mathrm{rel,inf}}$. Исходные положения и скорости компонентов двойной системы определяются ее орбитальными параметрами (a, e) относительно их общего центра масс. Абсолютные начальные условия всех трех тел получаются путем соответствующего преобразования относительных величин.

Чтобы результаты моделирования не зависели от конкретной, заранее заданной ориентации траектории налетающего тела, ее начальные положение и скорость подвергаются случайному трехмерному повороту [19].

Это обеспечивает изотропное распределение возможных ориентаций взаимодействия, что важно для получения статистически значимых результатов о вероятности различных исходов (например, разрушения двойной или захвата одного из компонентов).

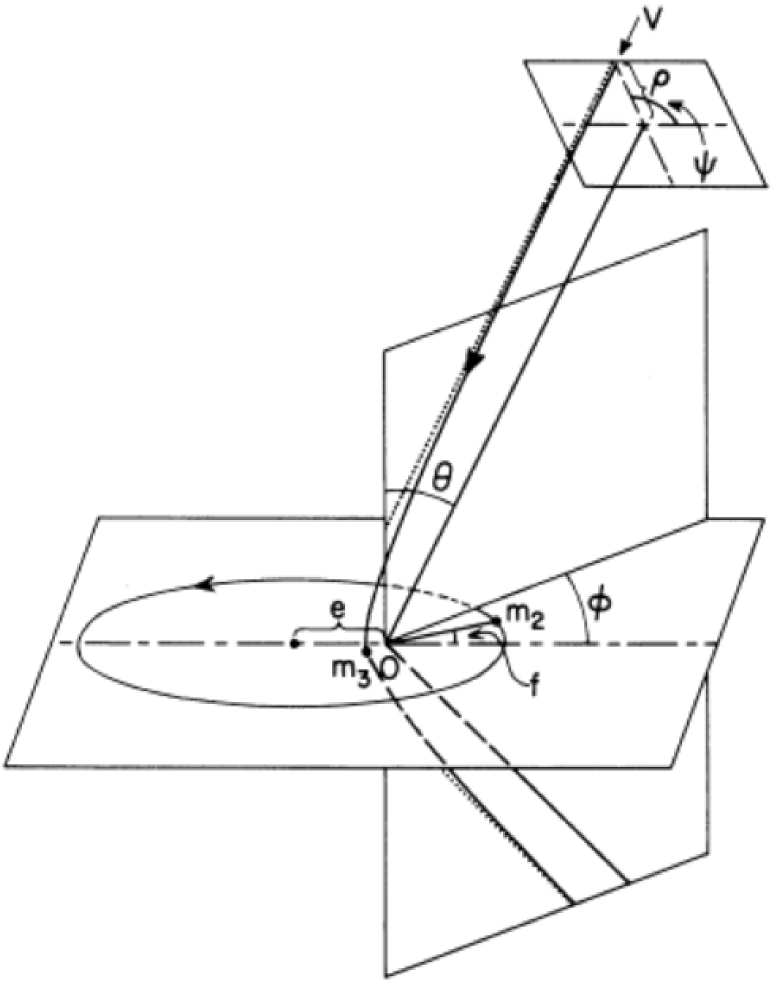

Рисунок 2.1 — Геометрия гиперболической траектории налетающего тела (m_3) относительно двойной системы (m_1, m_2), показывающая случайную ориентацию начального положения и скорости. Параметры ϕ, ψ и θ определяют случайный поворот плоскости налета и ρ здесь прицельный параметр (Взято из работы [19])

2.4 ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В процессе численного интегрирования динамики трех тел непрерывно отслеживаются параметры, характеризующие состояние исходной двойной системы и возможность формирования новых связанных объектов.

Параметры исходной двойной системы:

Для определения состояния исходной двойной системы (Тело 1 и Тело 2) вычисляются относительные положения $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и скорости $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ее компонентов. На основе этих данных рассчитывается полная энергия связи двойной системы E_b. По энергии связи определяется большая полуось a_b и эксцентриситет e_b орбиты двойной.

$$E_b = \frac{1}{2}\mu_{12}|\mathbf{v}_{12}|^2 - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|} \tag{2.10}$$

$$a_b = -\frac{G m_1 m_2}{2E_b} \tag{2.11}$$

$$e_b = \sqrt{1 + \frac{2E_b L_b^2}{\mu_{12}(G m_1 m_2)^2}} \tag{2.12}$$

где $\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса двойной, $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{v}_{12}$ — относительные положение и скорость, L_b — модуль углового момента, который определяется как:

$$L_b = |\mu_{12}(\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12})| \tag{2.13}$$

Возможное формирование новых двойных систем:

Аналогично, в процессе моделирования отслеживается возможность образования новых гравитационно связанных пар: между Телом 1 и Телом 3, и между Телом 2 и Телом 3. Для каждой из этих потенциальных пар рассчитываются их относительные энергии связи. Отрицательная энергия связи пары указывает на то, что она является гравитационно связанной. Для связанных пар также могут быть вычислены соответствующие большие полуоси и эксцентриситеты их орбит.

Определение исходов взаимодействия:

После завершения фазы тесного взаимодействия (например, когда тела вновь расходятся на большое расстояние) анализируется конечное состояние системы для классификации исхода рассеяния. Основные исходы могут быть следующими:

- **Выживание двойной системы:** Исходная двойная система (1-2) остается гравитационно связанной. В результате взаимодействия ее орбита может быть возмущена — меняются большая полуось, эксцентриситет.
- **Разрушение двойной системы:** Исходная двойная система распадается. Это происходит, если ее энергия связи становится положительной, или если одно из тел двойной системы и/или налетающее тело выбрасываются из системы, и связанные пары не образуются.
- **Формирование новой двойной системы:** В результате взаимодействия может образоваться новая связанная пара за счет гравитационного захвата: либо между Телом 1 и Телом 3, либо между Телом 2 и Телом 3. Критерием образования связанной пары является отрицательная энергия ее относительного движения.

В конечном анализе проверяется, какие пары остались связанными (энергия связи отрицательна). Для выживших или вновь образованных связанных пар вычисляются их финальные орбитальные параметры.

3 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЙ

В данной главе представлены и проанализированы результаты численного моделирования взаимодействия компактного объекта с двойной системой. Особое внимание уделено изменению орбитальных параметров исходной двойной системы, вероятности её разрушения или формирования новых связанных объектов, а также влиянию этих процессов на время жизни двойных систем за счет излучения гравитационных волн. Для всех численных экспериментов рассматривались черные дыры с фиксированной массой $30\,M_\odot$ для каждого из трех тел ($m_1 = m_2 = m_3 = M = 30\,M_\odot$). Выбор данной массы обусловлен привязкой к данным по слиянию черных дыр, регистрируемых коллаборацией LIGO-Virgo-KAGRA.

Начальные орбитальные параметры исходной двойной системы были выбраны на основе ее времени слияния (1.10). Чтобы отобранные двойные системы могли сохраниться до текущей эпохи, их начальное время жизни t_{gw} было зафиксировано равным возрасту Вселенной, приблизительно 1.38×10^{10} лет. Исходя из этого условия, были выбраны следующие четыре пары значений (a_0, j_0) для исходной двойной системы:

- **Пара 1:** $a_0 = 28$ а.е., $j_0 = 0.022$
- **Пара 2:** $a_0 = 58$ а.е., $j_0 = 0.014$
- **Пара 3:** $a_0 = 88$ а.е., $j_0 = 0.011$
- **Пара 4:** $a_0 = 118$ а.е., $j_0 = 0.0095$

Для каждой из этих четырех начальных конфигураций двойной системы (определяемых парой (a, j)) были исследованы три различных сценария взаимодействия с третьей налетающей черной дырой, характеризующихся минимальным расстоянием сближения r_{min} между налетающим телом и центром масс двойной системы (если рассматривать двойную как точечный объект):

- $r_{min} = a$**:** Минимальное расстояние сближения равно большой полуоси исходной двойной системы. Этот сценарий соответствует режиму *жесткого рассеяния*, при котором ожидаются сильные гравитационные возмущения.

- $r_{min} = 5a$**:** Минимальное расстояние сближения в пять раз превышает большую полуось двойной. Этот сценарий представляет собой "промежуточный" режим взаимодействия.
- $r_{min} = 10a$**:** Минимальное расстояние сближения в десять раз превышает большую полуось двойной. Этот сценарий соответствует режиму *мягкого рассеяния* с относительно слабыми гравитационными возмущениями.

Начальное положение и скорость налетающего тела были установлены таким образом, чтобы обеспечить заданные r_{min} и соответствовать движению "с бесконечности". Ориентация орбиты двойной системы и траектории налетающего тела были разыграны случайным образом для получения статистически значимых результатов, отражающих всевозможные исходы подобных взаимодействий. Всего для каждого рассматриваемого ниже примера было произведено $N = 10^4$ моделирований.

3.1 АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ УГЛОВОГО МОМЕНТА

После завершения фазы тесного взаимодействия были проанализированы финальные орбитальные параметры двойных систем, которые остались гравитационно связанными. Особое внимание было уделено распределению значений параметра $j = \sqrt{1 - e^2}$, характеризующего эксцентриситет орбиты ($j = 1$ для круговой орбиты и $j \to 0$ для высокоэксцентрической орбиты).

На рисунках 3.1 – 3.4 представлены распределения вероятности финальных значений параметра j двойных систем при различных начальных больших полуосях a и минимальных расстояниях сближения r_{min}.

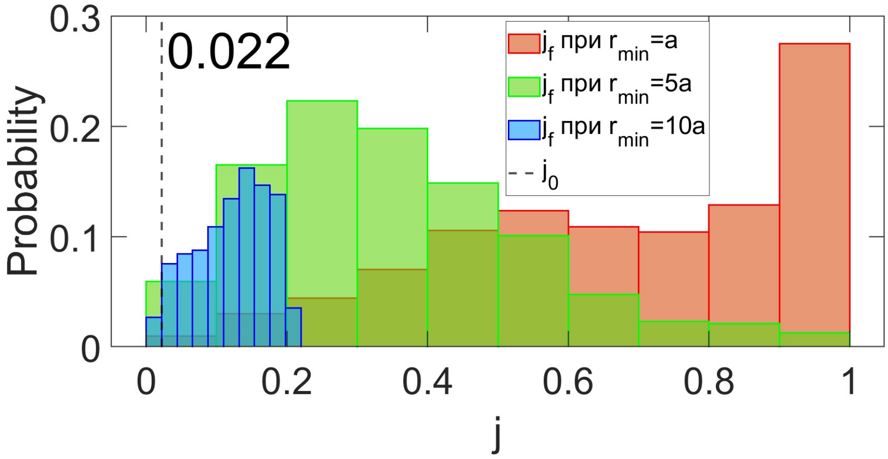

Рисунок 3.1 — Распределения конечных значений параметра $j = \sqrt{1-e^2}$ для исходной двойной системы с начальными параметрами $j_0 = 0.022$ и $a = 28$а.е..

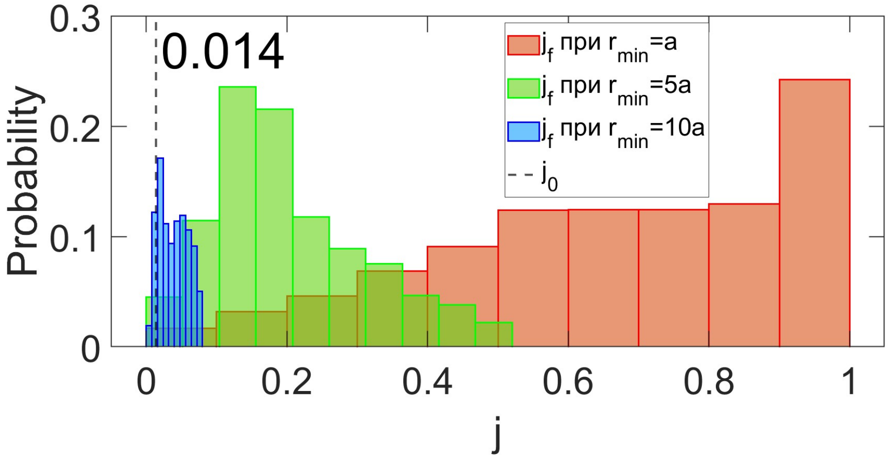

Рисунок 3.2 — Распределения конечных значений параметра $j = \sqrt{1-e^2}$ для исходной двойной системы с начальными параметрами $j_0 = 0.014$ и $a = 58$а.е..

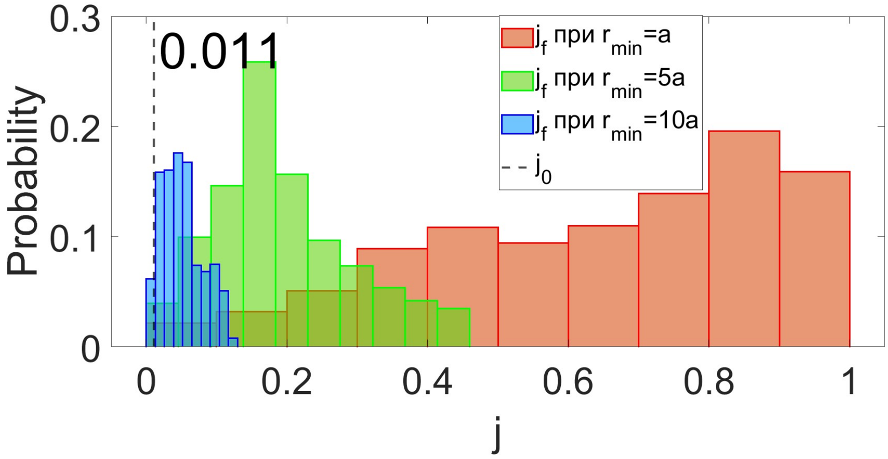

Рисунок 3.3 — Распределения конечных значений параметра $j = \sqrt{1-e^2}$ для исходной двойной системы с начальными параметрами $j_0 = 0.011$ и $a = 88$а.е..

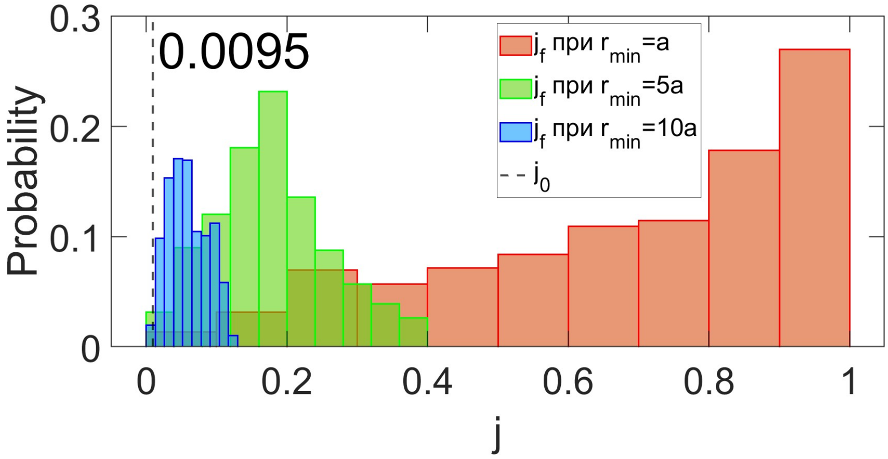

Рисунок 3.4 — Распределения конечных значений параметра $j = \sqrt{1-e^2}$ для исходной двойной системы с начальными параметрами $j_0 = 0.0095$ и $a = 118$а.е..

Обсуждение Распределений j

Как видно из рисунков 3.1 – 3.4, распределение финального углового момента j для двойных систем демонстрирует четкую зависимость от минимального расстояния сближения r_{min} налетающего объекта, что отражает различные режимы взаимодействия.

- **Для жесткого рассеяния** ($r_{min} = a$, **красные кривые**): Эти распределения соответствуют случаям наиболее сильного гравитационного взаимодействия, часто приводящего к разрушению исходной двойной системы и формированию новой. Можно видеть значительный пик вероятности при высоких значениях j (близких к 1), что указывает на тенденцию к *значительной циркуляризации* формирующихся двойных систем. Это может быть результатом перераспределения энергии и углового момента в ходе энергетически интенсивного взаимодействия, приводящего к более компактным и круговым орбитам.

- **Для промежуточных сближений ($r_{min} = 5a$, зеленые кривые):** Распределение j заметно смещается в сторону *промежуточных значений углового момента.* "Выжившие" двойные системы в этом случае, как правило, увеличивают свой угловой момент j по сравнению с начальным состоянием ($j \approx 0.01$). Это проявляется в виде пика в диапазоне j примерно от 0.1 до 0.3 для большинства рассмотренных начальных больших полуосей a. Вероятность формирования почти круговой орбиты ($j \approx 1$) крайне низка, что указывает на то, что данные сближения, хотя влияют на параметры двойной не так сильно как жесткие рассеяния.
- **Для дальних сближений ($r_{min} = 10a$, синие кривые):** В данном случае гравитационное взаимодействие является наиболее слабым. Распределение j еще больше концентрируется на *низких значениях j* (высоких эксцентриситетах), но с более узким распределением и более выраженным пиком, чем в промежуточных случаях. Изменения менее выражены, чем при $r_{min} = 5a$. Вероятность проявления почти круговой орбиты ($j \approx 1$) в этом режиме отсутствует.

Форма распределений: Форма распределений заметно меняется в зависимости от r_{min}. Распределения для $r_{min} = 5a$ (зеленые) и $r_{min} = 10a$ (синие) имеют форму, близкую к нормальному распределению, пик которого превышает начальное значение j, хотя не очень существенно по сравнению с жесткими рассеяниями. Напротив, распределение для $r_{min} = a$ (красное) демонстрирует чисто возрастающее поведение с максимумом при $j \approx 1$. Это указывает на то, что взаимодействия в режиме "жесткого рассеяния"могут разрушать двойную систему и образовать новую, с *чрезвычайно циркуляризованной орбитой* (почти круговая). Существование пика при $j \approx 1$ для сильных взаимодействий является важным результатом, указывающим на возможность "циркуляризации"орбиты, индуцированной взаимодействием трех тел при очень близких сближений.

Несмотря на различия в форме и ширине распределений для разных значений $r_{\min}$, **общая тенденция заключается в увеличении углового момента** j (то есть, в циркуляризации орбит) у формирующихся двойных систем. Этот эффект является гораздо более значительным и приводит к формированию преимущественно круговых орбит в случае тесных сближений ($r_{\min} = a$), в то время как при более слабых взаимодействиях ($r_{\min} = 10a$) хотя j также имеет тенденцию к увеличению, большая часть орбит сохраняет свою первоначальную высокую эксцентричность.

Таким образом, эти результаты демонстрируют, как динамические взаимодействия трех тел существенно изменяют орбитальные свойства двойных систем, оказывая значительное влияние на их угловой момент (эксцентриситет). Близкие сближения (жесткое рассеяние) могут привести к значительной циркуляризации, то есть к сильному росту углового момента j и следовательно времени жизни t_{gw}

3.2 ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ВРЕМЯ СЛИЯНИЯ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ

В предыдущем разделе был рассмотрен процесс изменения орбитальных параметров двойных ПЧД, в частности углового момента j, под воздействием динамических возмущений при рассеянии с третьей черной дырой. Теперь мы анализируем, как эти изменения напрямую влияют на время слияния таких систем, что является ключевым фактором в подавлении общего темпа слияний. На **Рисунках 3.5 – 3.8** представлены графики интегральной вероятности слияния двойных систем как функции времени t в единицах современного возрасте Вселенной t_0, для различных значений минимального расстояния сближения $r_{\min}$.

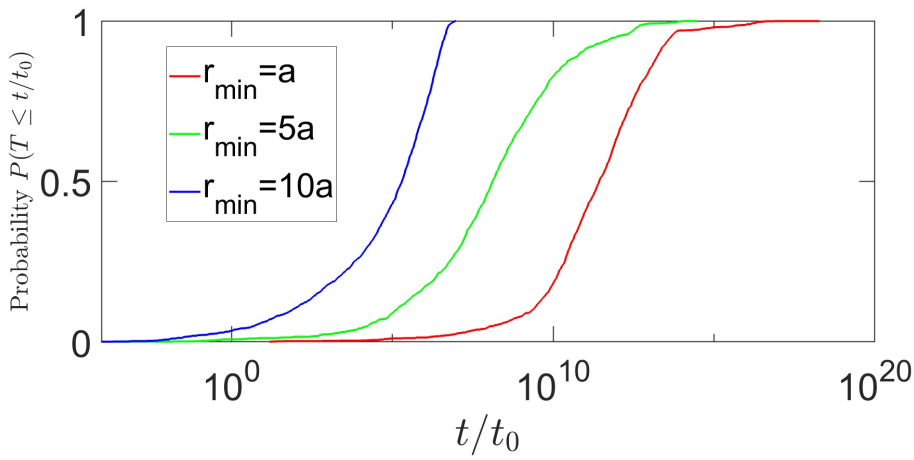

Рисунок 3.5 — Интегральные функции вероятности распределения времени слияния двойной системы в единицах современного возраста Вселенной t_0 для разных $r_{\min}$, при начальных условиях, соответствующих $j_0 \approx 0.022$. и $a_0 \approx 28$а.е..

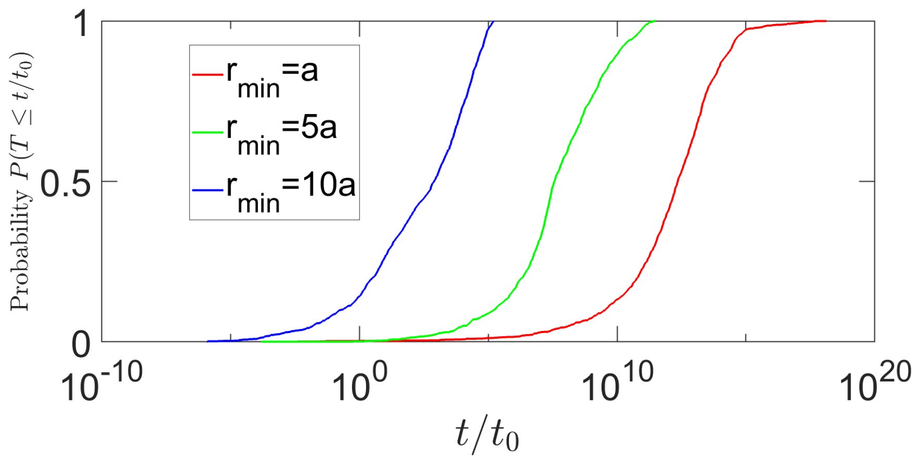

Рисунок 3.6 — Интегральные функции вероятности распределения времени слияния двойной системы в единицах современного возраста Вселенной t_0 для разных $r_{\min}$, при начальных условиях, соответствующих $j_0 \approx 0.014$. и $a_0 \approx 58$а.е..

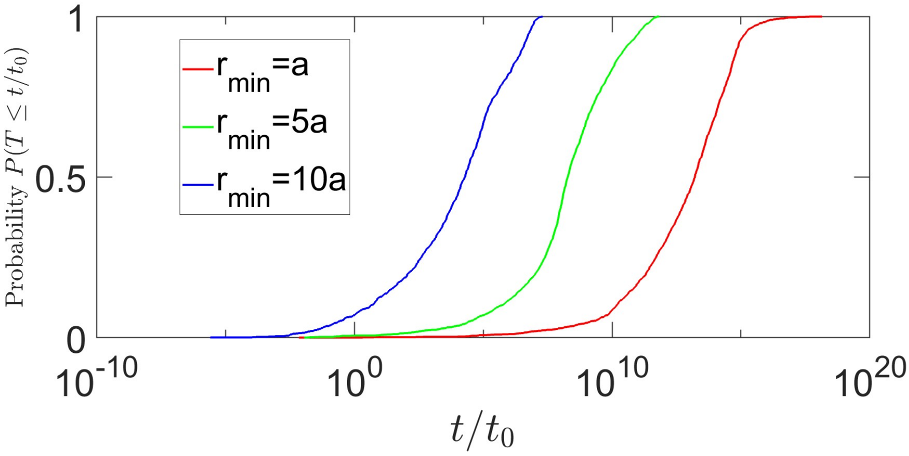

Рисунок 3.7 — Интегральные функции вероятности распределения времени слияния двойной системы в единицах современного возраста Вселенной t_0 для разных $r_{\min}$, при начальных условиях, соответствующих $j_0 \approx 0.011$. и $a_0 \approx 88$а.е..

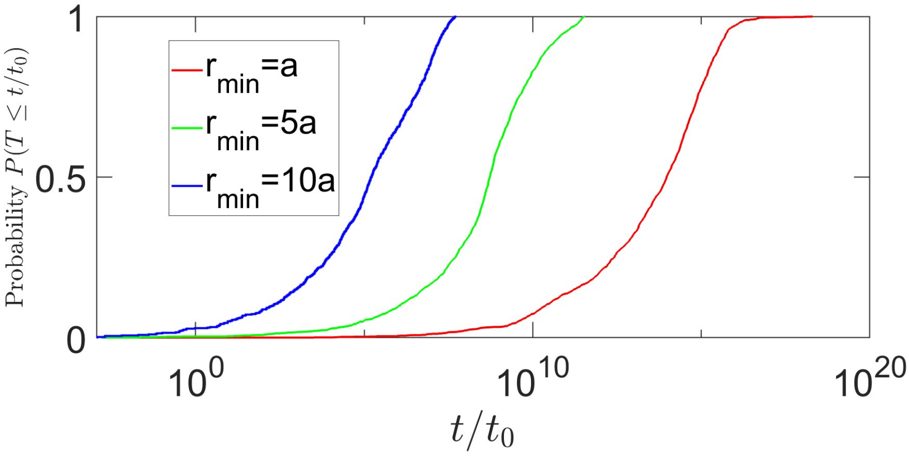

Рисунок 3.8 — Интегральные функции вероятности распределения времени слияния двойной системы в единицах современного возраста Вселенной t_0 для разных $r_{\min}$, при начальных условиях, соответствующих $j_0 \approx 0.0095$. и $a_0 \approx 118$а.е..

Эти кривые демонстрируют, что время жизни возмущенной двойной существенно зависит от силы динамического воздействия, которая, в свою очередь, регулируется параметром минимального сближения $r_{\min}$:

- **Для $r_{\min} = 10a$ (синяя кривая):** Эта кривая, соответствующая наиболее слабым динамическим возмущениям, и функция вероятность довольно быстро достигает единицы. Это согласуется с данными по распределению j, где при $r_{\min} = 10a$ большая часть двойных систем сохраняла свои высокие эксцентриситеты (низкие значения j), что приводит к более быстрому слиянию под действием гравитационных волн в соответствии с выражением для времени слияния (1.10).

- **Для $r_{\mathbf{min}} = 5a$ (зеленая кривая):** Кривая интегральной вероятности для этого случая заметно смещена вправо относительно синей кривой. Это означает, что двойным системам, подвергшимся умеренным возмущениям, требуется значительно больше времени для слияния. Данное наблюдение также коррелирует с результатами по распределению j, где для $r_{\min} = 5a$ наблюдалась существенная, но не полная, циркуляризация орбит.
- **Для $r_{\mathbf{min}} = a$ (красная кривая):** Эта кривая демонстрирует наибольшее смещение вправо по оси времени. Системы, сформированные при тесных сближения ($r_{\min} = a$), требуют на порядки большего времени для слияния, чем современный возраст Вселенной. Это является прямым и наиболее выраженным следствием сильной циркуляризации орбит (сдвиг j к значениям, близким к 1), которая доминирует в данном режиме взаимодействия.

В следующем разделе мы обсудим применение результатов по возмущению двойных систем для темпа слияний ПЧД.

4 ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ТЕМП СЛИЯНИЯ ДВОЙНЫХ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Начало анализа темпа слияния двойных первичных черных дыр (ПЧД) было положено событием гравитационных волн GW150914, обнаруженным детекторами LIGO, которое выявило существование черных дыр (ЧД) с массой около $30\,M_\odot$ в форме двойных систем. В работе [1] был представлен расчет темпа слияний таких ПЧД. Однако, этот расчет не учитывал возможные динамические взаимодействия между ними в кластерах.

Кластеризация ПЧД подразумевает, что во Вселенной существуют локальные области, для которых выполняется $\rho_{\rm PBH}/\rho_{\rm DM} > 0$. Для учета этого эффекта формально принимается $f = 1$, что соответствуют формированию кластера ПЧД вблизи РД-МД перехода при z_{eq}. Такая грубость обусловлена тем, что цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать как эффекты кластеризации подавляют темп слияний и в дальнейшим анализ может быть расширен на реалистичные модели кластеризации.

Заметное смещение кривых интегральной вероятности распределения времени слияния возмущенных двойных в сторону больших времен, особенно для случаев $r_{\rm min} = a$ и $r_{\rm min} = 5a$, приводит к подавлению темпа слияний ПЧД. Двойные системы, которые изначально имели малые угловые момента из-за динамических возмущений переходят в состоянии с более круговой орбитой (как показано на Рисунках 3.1-3.4). В результате, их время жизни увеличивается настолько, что они выходят за рамки времени жизни Вселенной, и тем самым не успевают слиться. Поэтому можно считать, что возмущенные двойные фактически "выбывают" из процесса слияний, поскольку их время жизни значительно превышает возраст Вселенной и, как следствие, они будут сливаться в далеком будущем, а не в современную эпоху. Чтобы количественно описать этот процесс поступим следующим образом: пусть N – это число двойных, тогда скорость их убыли из-за рассеяния может быть описана как $dN/dt = -Nn\sigma v$, где n – концентрация рассеивающих ЧД, σ – эффективное сечение жесткого рассеяния между двойной и третьей ЧД, и v – относительная скорость между двойной и одиночной черной дырой. Интегрирование этого выражения приводит к экспоненциальному убыванию числа двойных систем со временем, что напрямую выражается в виде подавляющего фактора $e^{-t/\tau}$, где $\tau = 1/(n\sigma v)$ представляет собой характерное время возмущения двойных систем.

В работе [1] и в разделе 1.2 темп слияния рассчитывался аналитически. В данном разделе мы используем численный подход. Для проверки корректности нашего численного метода, первым шагом было воспроизведение аналитических результатов [1] без учета динамических возмущений. Как показано на Рисунке 4.1, малиновая линия ("dP/dt analytical") представляет собой аналитический результат (1.15) (см. также работу [1]), а оранжевая линия ("dP/dt w/o suppression") — это результат нашего численного расчета, выполненного без добавления подавляющего фактора. Их совпадение подтверждает точность и надежность нашего численного метода.

Убедившись в надежности нашего численного подхода, мы приступили к включению эффекта динамических возмущений. Для этого в выражение для дифференциальной вероятности слияния вводится экспоненциальный демпфирующий член $e^{-t/\tau}$. Согласно анализу раздела 1.2 и работе [1], дифференциальная вероятность dP описывается как:

$$dP = \frac{3}{4}\left(\frac{f}{\bar{x}}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{a}}{j^2}dadj. \tag{4.1}$$

С учетом возмущений двойных систем, модифицированное выражение для dP принимает следующий вид:

$$dP = \frac{3}{4}\left(\frac{f}{\bar{x}}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{a}}{j^2}e^{-t/\tau}dadj. \tag{4.2}$$

Здесь τ представляет собой характерный временной масштаб динамических взаимодействий, который аппроксимируется как:

$$\tau \sim \frac{1}{n\sigma v} \tag{4.3}$$

Где n – это концентрация ПЧД. Которую мы выбираем как $n = 1000(M/M_\odot)$ пк$^{-3}$, что соответствует формирования кластера вблизи РД-МД перехода. Для ПЧД массой 30 $M_\odot$ концентрацию можно оценить как $n \approx 30$ пк$^{-3}$. Сечение σ описывает рассеяние двойной, как точечного объекта, и одиночной третьей черной дыры и задается выражением

$$\sigma = \pi a^2 \left(1 + \frac{6GM_{bh}}{av^2}\right) \tag{4.4}$$

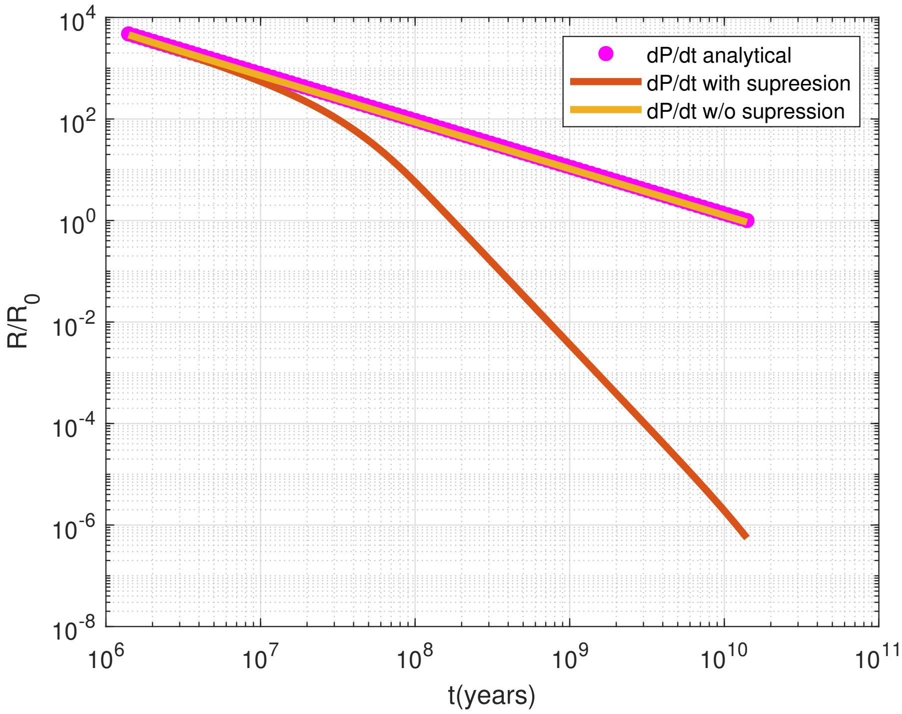

Рисунок 4.1 — Темп слияний ПЧД. График показывает отношение темпа слияния R к его значению в настоящий момент R_0 в зависимости от времени t (в годах). Малиновая линия ("dP/dt analytical") соответствует аналитическому решению, представленному в разделе 1.2 (формула (1.15), см. также [1]), оранжевая линия ("dP/dt w/o suppression") — нашему численному расчету без учета динамических возмущений, а красная линия ("dP/dt with suppression") — нашему численному расчету с учетом эффекта подавления.

Красная линия на Рисунке 4.1 ("dP/dt with suppression") демонстрирует темп слияния с учетом экспоненциального фактора, описывающего динамическую убыль двойных из процесса слияний. Этот график четко показывает, что темп слияния значительно подавляется по сравнению со случаем ПЧД, которые изначально некластеризованы и следовательно не подвергаются возмущениям. Физически это объясняется тем, что в плотных кластерах ПЧД взаимодействие между отдельными ЧД и двойными системами с высокой вероятностью приводит к увеличению углового момента j двойных ПЧД, которые изначально имеют невероятно малые угловые моменты $j \ll 1$ (см. формулу (1.12)). Увеличение углового момента ведет к значительному росту времени жизни двойной системы, что существенно замедляет ее слияние. Таким образом, динамические взаимодействия приводят к уменьшению общему наблюдаемому темпу слияний двойных ПЧД, особенно на поздних этапах эволюции Вселенной.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей дипломной работе было проведено комплексное численное исследование возмущений двойных ПЧД в плотных кластерах. Была отслежена эволюция их орбитальных параметров и, как следствие, оценено влияние процесса возмущений на темп слияний двойных ПЧД. Актуальность работы обусловлена возрастающим интересом к ПЧД как потенциальному источнику гравитационных волн, наблюдаемых коллаборацией LIGO-Virgo-KAGRA. Ключевые результаты и выводы, полученные в ходе работы, включают:

1) **Разработка численной модели.** Была разработана и реализована математическая модель, описывающая динамику задачи трех тел — рассеяние черной дыры на двойной системе с использованием адаптивного шага интегрирования по времени.
2) **Влияние рассеяния на орбитальные параметры двойных систем.** Численное моделирование позволило детально проанализировать изменение безразмерного углового момента $j = \sqrt{1 - e^2}$ (где e — эксцентриситет орбиты) исходных двойных систем после взаимодействия с третьей черной дырой. Было показано, что в результате таких рассеяния финальное распределение по j существенно меняется:
   - При *жестком рассеянии* ($r_{\min} = a$), наблюдается значительная *циркуляризация* орбит формирующихся двойных систем (сдвиг j к значениям, близким к 1). Это указывает на существенное перераспределение энергии и углового момента, что приводит к формированию более компактных и почти круговых орбит.
   - При *умеренных* ($r_{\min} = 5a$) и *слабых* ($r_{\min} = 10a$) взаимодействиях, хотя и наблюдается тенденция к увеличению j по сравнению с начальными значениями, основная часть орбит сохраняет свою высокую эксцентричность, что соответствует более плавным возмущениям. Тем не менее, даже в этом случае на-

блюдается значительной рост времени слияний формирующейся двойной системы.

3) **Изменение времени жизни двойных систем.** Непосредственным следствием уменьшения эксцентриситета орбит является существенное увеличение времени жизни двойных систем за счет излучения гравитационных волн. Кривые интегральной вероятности распределения двойных по времени жизни, показанные на Рисунках 3.6-3.8, явно демонстрируют, что двойные системы, подвергшиеся сильным динамическим возмущениям ($r_{\text{min}} = a$), требуют на порядки большего времени для слияния по сравнению с невозмущенными случаями. Многие из таких систем, изначально сливающиеся в пределах Хаббловского времени, оказываются "замороженными" в своем эволюционном пути, не успевая слиться до сегодняшнего дня.

4) **Подавление темпа слияний ПЧД.** Наиболее важным результатом работы является демонстрация того, что динамические взаимодействия приводят к существенному **подавлению темпа слияний** двойных ПЧД. Включение подавляющего фактора, отражающего возмущение двойных систем в плотных кластерах, показывает, что темп слияний значительно ниже, чем предсказывается моделями, не учитывающими кластеризацию. Этот эффект является критически важным для переоценки ограничений на долю ПЧД в темной материи, поскольку он позволяет ослабить текущие ограничения, делая сценарии с большими значениями f более жизнеспособными. Кроме того, исследование темпа слияний черных дыр на космологических временных масштабах является одной из задач гравитационно-волновых экспериментов следующего поколения. Будущие наблюдения смогут не только дать надежные указания на существование ПЧД, но и выявить особенности их пространственного распределения.

Таким образом, данная работа подчеркивает важность учета динамических взаимодействий в плотных кластерах ПЧД для получения точных предсказаний темпа слияний. Полученные результаты имеют прямое отношение к интерпретации данных гравитационно-волновых обсерваторий и будущим исследованиям слияний черных дыр при больших красных смещениях и природы темной материи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 117, № 6. — С. 061101. — arXiv: 1603.08338 [astro-ph.CO] ; — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 121, 059901 (2018)].
2. Did LIGO detect dark matter? / S. Bird [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 20. — С. 201301. — arXiv: 1603.00464 [astro-ph.CO].
3. *Clesse S.*, *García-Bellido J.* The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO // Phys. Dark Univ. — 2017. — Т. 15. — С. 142—147. — arXiv: 1603.05234 [astro-ph.CO].
4. *Ali-Haïmoud Y.*, *Kovetz E. D.*, *Kamionkowski M.* Merger rate of primordial black-hole binaries // Phys. Rev. D. — 2017. — Т. 96, № 12. — С. 123523. — arXiv: 1709.06576 [astro-ph.CO].
5. A Luminous Quasar at Redshift 7.642 / F. Wang [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2021. — Т. 907, № 1. — С. L1. — arXiv: 2101.03179 [astro-ph.GA].
6. Observational Evidence for Primordial Black Holes: A Positivist Perspective / B. Carr [и др.]. — 2023. — arXiv: 2306.03903 [astro-ph.CO].
7. *De Luca V.*, *Franciolini G.*, *Riotto A.* NANOGrav Data Hints at Primordial Black Holes as Dark Matter // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Т. 126, № 4. — С. 041303. — arXiv: 2009.08268 [astro-ph.CO].
8. Do pulsar timing arrays observe merging primordial black holes? / P. F. Depta [и др.]. — 2023. — arXiv: 2306.17836 [astro-ph.CO].

9. *Carr B., Kuhnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Phys. Lect. Notes. — 2022. — Т. 48. — С. 1. — arXiv: 2110.02821 [astro-ph.CO].

10. *Vaskonen V., Veermäe H.* Lower bound on the primordial black hole merger rate // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 101, № 4. — С. 043015. — arXiv: 1908.09752 [astro-ph.CO].

11. *Stasenko V., Belotsky K.* Influence of early dark matter haloes on the primordial black holes merger rate // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2023. — Т. 526, № 3. — С. 4308—4314. — arXiv: 2307.12924 [astro-ph.CO].

12. Cosmic conundra explained by thermal history and primordial black holes / B. Carr [и др.] // Phys. Dark Univ. — 2021. — Т. 31. — С. 100755. — arXiv: 1906.08217 [astro-ph.CO].

13. Clusters of primordial black holes / K. M. Belotsky [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79, № 3. — С. 246. — arXiv: 1807.06590 [astro-ph.CO].

14. Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries / T. Nakamura [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 1997. — Т. 487. — С. L139—L142. — arXiv: astro-ph/9708060.

15. *Eroshenko Y. N.* Gravitational waves from primordial black holes collisions in binary systems // J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — Т. 1051, № 1. — С. 012010. — arXiv: 1604.04932 [astro-ph.CO].

16. Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation / K. Ioka [и др.] // Phys. Rev. D. — 1998. — Т. 58. — С. 063003. — arXiv: astro-ph/9807018.

17. *Peters P. C.* Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses // Phys. Rev. — 1964. — Т. 136, 4B. — B1224—B1232.

18. Population of Merging Compact Binaries Inferred Using Gravitational Waves through GWTC-3 / R. Abbott [и др.] // Phys. Rev. X. — 2023. — Т. 13, № 1. — С. 011048. — arXiv: 2111.03634 [astro-ph.HE].

19. *Hut P., Bahcall J. N.* Binary-single star scattering. I - Numerical experiments for equal masses // Astrophys. J. — 1983. — Т. 268. — С. 319—341.