

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 524.1

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
ПОИСК ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЯСНЕНИЯ
ИЗБЫТКА ПОЗИТРОНОВ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ**

Студент _____ Ф. В. Костромин

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., внс. _____ К. М. Белоцкий

Научный консультант,
к.ф.-м.н., инж. _____ М. Л. Соловьёв

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ПОИСК ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЯСНЕНИЯ
ИЗБЫТКА ПОЗИТРОНОВ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ**

Студент _____ Ф. В. Костромин

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., внс. _____ К. М. Белоцкий

Научный консультант,
к.ф.-м.н., инж. _____ М. Л. Соловьев

Рецензент,
к.ф.-м.н., снс. _____ А. Г. Майоров

Секретарь ГЭК,
к.ф.-м.н. _____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,
д.ф.-м.н., проф. _____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Методология	5
1.1 Получение спектров от заданного профиля плотности. Описание используемых вычислительных средств.	5
1.2 Составление профиля плотности из набора областей	7
1.3 Неравномерная сетка и пошаговая детализация	12
2 Промежуточный анализ результатов	19
3 Развитие методологии. Поиск всех возможных профилей плотности.	23
4 Анализ результатов	30
4.1 Модель произвольного плоского профиля	31
4.2 Модель центрально-симметричного плоского профиля	35
4.3 Модель произвольного центрально-симметричного профиля	39
5 Заключение	43
Список использованных источников	45

ВВЕДЕНИЕ

Согласно классическим представлениям о механизмах образования космического излучения, космические позитроны имеют вторичное происхождение, т.е. они рождаются при взаимодействии других высокоэнергетических частиц с межзвездной средой. Ожидалось, что их спектр и доля в общем потоке должны падать с увеличением энергии. Однако, в 2008 году на эксперименте PAMELA был зарегистрирован рост доли позитронов от общего потока электронов и позитронов, начинающийся на энергиях порядка 10 ГэВ [1]. В дальнейшем это наблюдение было подтверждено и уточнено экспериментом AMS-02 [2], а также экспериментом DAMPE [3; 4]. На данный момент избыток позитронов в космических лучах, называемый «позитронной аномалией», не имеет общепринятого объяснения и порождает большое количество работ развивающих различные модели.

Одним из возможных направлений являются модели, использующие нестабильную скрытую массу (тёмную материю). Так как ее природа на сегодняшний день остается неизвестна, можно сделать предположение, что скрытая масса может состоять из частиц, способных распадаться или аннигилировать с образованием позитронов в конечном состоянии.

Основным недостатком таких моделей является перепроизводство гамма-излучения в процессе распада или аннигиляции частиц скрытой массы. Было показано [5–7], что простые модели гало нестабильной тёмной материи, способные описать избыток позитронов в космических лучах, не способны выдержать ограничений, накладываемых наблюдаемыми данными по изотропному фону гамма-излучения (IGRB), предоставляемыми Fermi-LAT [8].

Одним из возможных путей разрешения данного противоречия является изменение пространственного распределения источников. Так, например, на кафедре была разработана так называемая модель «тёмного диска» [6; 9], предполагающая существование нестабильной компоненты ТМ, образующей диск, в дополнение к основной и стабильной компонен-

те, образующей гало. Такое предположение сразу помогает отсеять области гало, не дающие вклад в наблюдаемые потоки заряженных частиц, но производящие при этом гамма-излучение. Также на кафедре рассматривались распределения в виде колец и спиральных рукавов вокруг центра галактики.

Данная работа продолжает развитие этого направления и рассматривает более общие методы построения профиля плотности источников излучения на основе экспериментальных данных.

1. МЕТОДОЛОГИЯ

1.1. ПОЛУЧЕНИЕ СПЕКТРОВ ОТ ЗАДАННОГО ПРОФИЛЯ ПЛОТНОСТИ.

ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ.

В данной работе в качестве источника первичных позитронов рассматривались частицы нестабильной скрытой массы (тёмной материи) с массами ≥ 500 ГэВ, способные аннигилировать по одному из трёх каналов:

$$X\bar{X} \rightarrow e^+e^-$$

$$X\bar{X} \rightarrow \tau^+\tau^-$$

$$X\bar{X} \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Скорость реакции для моделирования определялась параметром $\langle\sigma v\rangle = 10^{-23}\frac{\text{см}^3}{\text{с}}$.

Для моделирования распространения релятивистских заряженных частиц в Галактике и образующегося при этом диффузного излучения использовался программный пакет GALPROP [10]. Это программа с открытым исходным кодом, которая численно решает уравнение переноса, описывающее распространение космических лучей. При этом программа включает в себя как можно больше актуальных астрофизических данных.

На кафедре GALPROP был модифицирован для возможности более гибкой работы с тёмной материей: добавлена возможность задания произвольных профилей плотности и спектров инжекции в виде таблиц.

Запуская GALPROP для заданного профиля плотности, мы получаем на выходе набор файлов в формате FITS, представляющих из себя многомерные массивы с информацией о потоках заряженных частиц в каждой точке Галактики. С помощью программы на Python из них извлекались и

очищались от нефизических значений спектры позитронов и вторичного гамма излучения для области, расположенной в 8,5 кпк от центра Галактики, что соответствует положению Солнечной системы.

Спектры первичного гамма излучения вычислялись отдельно по формуле:

$$\Phi = \frac{dN}{dE} \frac{\langle \sigma v \rangle}{4} \frac{1}{\Delta\Omega} \int \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\rho^2}{M^2} dV$$

$$\Phi = \underbrace{\frac{dN}{dE}} \underbrace{\frac{\langle \sigma v \rangle}{4} \frac{1}{\Delta\Omega} \frac{1}{4\pi M^2}} \underbrace{\int \frac{\rho^2}{r^2} dV}$$

Здесь первый выделенный множитель - это спектр инжекции от единичной реакции. Расчёт таких спектров можно произвести с помощью Монте-Карло генератора Pythia [11].

Второй выделенный множитель - числовой коэффициент рассчитанный для указанных выше параметров, где $\Delta\Omega$ - область для которой угол с галактическим горизонтом составляет $\theta > 20^\circ$ (область, соответствующая данным IGRB эксперимента Fermi-LAT).

Третий выделенный множитель - интеграл по пространству, который вычислялся с помощью математического пакета Wolfram Mathematica.

Рассчитанные таким образом спектры первичного гамма излучения, суммируются с вторичным. Полученные таким образом позитронные и гамма спектры далее сравниваются с экспериментальными данными.

Для позитронного потока сравнение производилось с данными о доле позитронов в общем потоке электронов и позитронов, предоставляемыми AMS-02. При этом для расчёта фоновых потоков использовались эмпирические формулы из [12]:

$$\Phi_{e^-}^{bkg}(E) = \left(\frac{82.0\epsilon^{-0.28}}{1 + 0.224\epsilon^{2.93}} \right) \Gamma\text{эВ}^{-1}\text{М}^{-2}\text{с}^{-1}\text{ср}^{-1}$$

$$\Phi_{e^-}^{bkg}(E) = \left(\frac{38.4\epsilon^{-4.78}}{1 + 0.0002\epsilon^{5.63}} + 24.0\epsilon^{-3.41} \right) \Gamma\text{эВ}^{-1}\text{М}^{-2}\text{с}^{-1}\text{ср}^{-1}$$

где $\epsilon = E/1\text{ГэВ}$.

Для потока гамма излучения сравнение производилось с данными по изотропному фону гамма-излучения (IGRB), предоставляемыми Fermi-

LAT. В качестве фона использовались данные из [13].

Вся описанная процедура расчёта требовала в дальнейшей работе многократного автоматического выполнения с различными параметрами и была объединена одной программой на Python. Вследствие чего к процессу расчёта добавились такие шаги, как автоматическая генерация настроечных файлов с необходимыми параметрами для GALPROP, запуск GALPROP непосредственно из Python кода, обращение к ядру Wolfram Mathematica из Python кода для подсчёта пространственных интегралов, сохранение и загрузка полученных данных для большого числа циклов расчёта.

1.2. СОСТАВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПЛОТНОСТИ ИЗ НАБОРА ОБЛАСТЕЙ

Ключевой идеей данной работы является использование свойства аддитивности, которым обладает исследуемая задача. Другими словами, если мы разобьём исследуемое пространство Галактики, заполненное источниками, на несколько областей, то, очевидно, что спектр, создаваемый всей Галактикой, равен сумме спектров, создаваемых каждой из областей в отдельности.

В этой связи, можно предложить следующий способ построения интересующего нас профиля плотности:

- 1) Выберем разбиение пространства Галактики некоторым набором областей $\{D_1, D_2, D_3 \dots D_N\}$. Это может быть прямоугольная сетка, набор колец или нечто иное - форма областей может быть выбрана произвольно.
- 2) Заполним каждую область источниками единичной плотности, то есть для каждой из областей рассмотрим профиль с плотностью $1 \text{ ГэВ}/\text{см}^3$ внутри и 0 вне области. Выполним расчёт наблюдаемых спектров позитронов и гамма-излучения для каждого из таких профилей.

$$\rho_i(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in D_i \\ 0, & (x, y, z) \notin D_i \end{cases} \quad i \in [0, N]$$

- 3) Представим искомый спектр (экспериментальные точки), как линейную комбинацию полученных спектров с некоторыми положительными коэффициентами $\{k_1, k_2, k_3 \dots k_N\}$.
- 4) По найденным коэффициентам легко восстановить оптимальные значения плотности для каждой из областей. В данной работе рассматриваются процессы аннигиляции и скорость реакции пропорциональна квадрату плотности, как следствие нужная плотность в каждой из области определяется как корень из соответствующего коэффициента. Таким образом искомый профиль мы получим в виде:

$$\rho(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \sqrt{k_i} \rho_i(x, y, z)$$

Стоит отметить, что профили ρ_i не обязательно должны иметь указанный вид и быть локализованы в некой области. Мы можем исключить первый шаг и не делать разбиение, а вместо этого выбрать в качестве ρ_i , например, многочлены, тригонометрические функции или другую систему функций, определённых на всём пространстве. Указанные выше шаги никак не изменятся и мы получим представление искомого профиля в виде разложения по выбранной системе функций. Такой подход возможен, однако в данной работе он не использовался, так как в этом случае условие неотрицательности плотности перестаёт быть эквивалентно условию неотрицательности коэффициентов, находимых в пункте 3, вследствие чего расчёты существенно усложняются. К тому же подход с областями единичной плотности кажется более наглядным и понятным с точки зрения анализа результатов. Схематично описанная процедура показана на рисунке 1.

Остаётся обсудить то, как происходил расчёт коэффициентов $\{k_1, k_2 \dots k_N\}$. Из спектров полученных от каждой области выделим только значения при энергиях, соответствующих экспериментальным точкам для позитронов $\phi_{i1}^{e+}, \phi_{i2}^{e+}, \dots \phi_{im}^{e+}$ и гамма-излучения $\phi_{i1}^{\gamma}, \phi_{i2}^{\gamma}, \dots \phi_{il}^{\gamma}$, объединим эти значения в общую совокупность и представим ее в виде некоторого

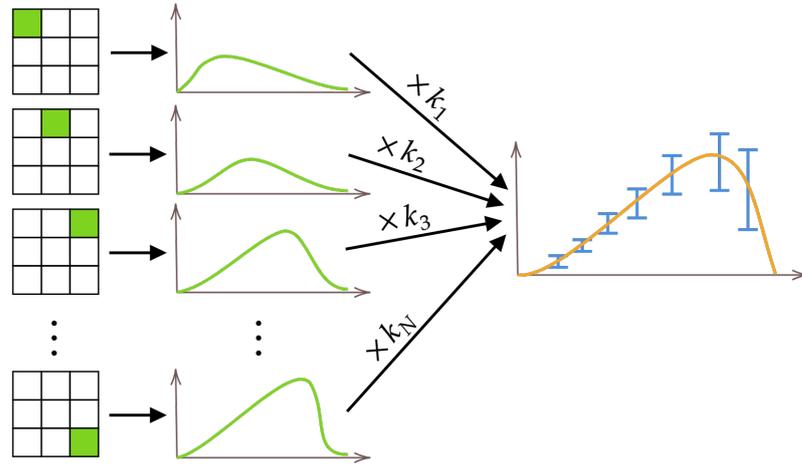


Рисунок 1 — Схема процедуры расчёта. Слева зелёным цветом условно обозначены области, заполняемые источниками единичной плотности. Далее показаны спектры получаемые при моделировании. Справа оранжевым цветом схематично показан результат их суммирования, сравниваемый с экспериментальными данными.

вектора вида:

$$D_i \rightarrow \rho_i \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{i1}^{e+} \\ \phi_{i2}^{e+} \\ \vdots \\ \phi_{im}^{e+} \\ \phi_{i1}^{\gamma} \\ \phi_{i2}^{\gamma} \\ \vdots \\ \phi_{il}^{\gamma} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{iM} \end{bmatrix}$$

Здесь $i \in [1, N]$, m - число экспериментальных точек для позитронов, l - для гамма-излучения, $M = m + l$.

Поиск оптимального разложения одного вектора по набору других с положительными коэффициентами – задача линейной алгебры, имеющая известное решение [14]. Более того это решение уже реализовано в таких программных пакетах как MATLAB или SciPy (Python).

Все эти методы минимизируют норму отклонения: $\|A\vec{k} - \vec{b}\| \rightarrow \min$, где A - матрица из векторов, по которым идёт разложение, \vec{b} - вектор, который нужно получить, \vec{k} - искомые коэффициенты.

В нашем случае, вектор \vec{b} следует составить из экспериментальных

точек позитронного и гамма спектра, делённых на их погрешности:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{e^+}/\sigma_1 \\ \Phi_2^{e^+}/\sigma_2 \\ \vdots \\ \Phi_{M-1}^\gamma/\sigma_{M-1} \\ \Phi_M^\gamma/\sigma_M \end{bmatrix}$$

Матрицу A следует составить из рассчитанных нами позитронных и гамма спектров от каждой области, делённых на соответствующие погрешности экспериментальных точек:

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{11}/\sigma_1 & \phi_{21}/\sigma_1 & \cdots & \phi_{N1}/\sigma_1 \\ \phi_{12}/\sigma_2 & \phi_{22}/\sigma_2 & \cdots & \phi_{N2}/\sigma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1M}/\sigma_M & \phi_{2M}/\sigma_M & \cdots & \phi_{NM}/\sigma_M \end{bmatrix}$$

Тогда выражение $\|A\vec{k} - \vec{b}\| \rightarrow \min$ перейдёт в:

$$\chi^2 = \sum_{datapoints} \frac{\Delta\Phi_{e^+}^2}{\sigma_e^2} + \sum_{datapoints} \frac{\Delta\Phi_\gamma^2}{\sigma_\gamma^2} \rightarrow \min$$

Где $\Delta\Phi_{e^+(\gamma)} = \Phi^{e^+(\gamma)} - \Phi^{e^+(\gamma)} = \Phi^{e^+(\gamma)} - \sum_i k_i \phi_i$. Однако, гамма излучение мы не хотим воссоздать точно, а хотим лишь не превысить и следовательно минимизировать должны не приведённое выше выражение, а:

$$\chi^2 = \chi_\theta^2 = \sum_{datapoints} \frac{\Delta\Phi_{e^+}^2}{\sigma_e^2} + \sum_{datapoints} \frac{\Delta\Phi_\gamma^2}{\sigma_\gamma^2} \theta(\Delta\Phi_\gamma)$$

Где θ - функция Хэвисайда.

Чтобы перейти от минимизации χ^2 к минимизации χ_θ^2 можно сделать следующее: проведём минимизацию χ^2 и получим коэффициенты \vec{k} . Далее рассмотрим векторы \vec{b} и $A\vec{k}$ и просто выбросим из рассмотрения точки, для которых $(\vec{b})_i > (A\vec{k})_i$. Затем проделываем предыдущие шаги для новых укороченных векторов, и повторяем весь цикл до тех пор, пока не окажется так, что все использованные при минимизации расчётные точ-

ки, относящиеся к гамма излучению, лежат выше экспериментальных. Так за небольшое число шагов (меньшее чем число точек гамма) мы получим коэффициенты минимизирующие χ^2 .

Может показаться неочевидным, что эта процедура приводит к верному результату. Допустим такую ситуацию (на примере двух точек данных b_1 и b_2): используя обе точки (b_1 и b_2), мы нашли коэффициенты $\vec{k}^{(a)}$, минимизирующие χ^2 , построили расчётные точки $(A\vec{k}^{(a)})_1$ и $(A\vec{k}^{(a)})_2$, и оказалось, что первая экспериментальная точка выше расчётной (рисунок 2 случай А). Тогда мы выбросили эту точку из рассмотрения и для оставшейся нашли новые коэффициенты $\vec{k}^{(b)}$ минимизирующие χ^2 , но оказалось, что точка которую мы выбросили теперь лежит ниже расчётной и должна учитываться (рисунок 2 случай Б). Если такое возможно, то метод не работает.

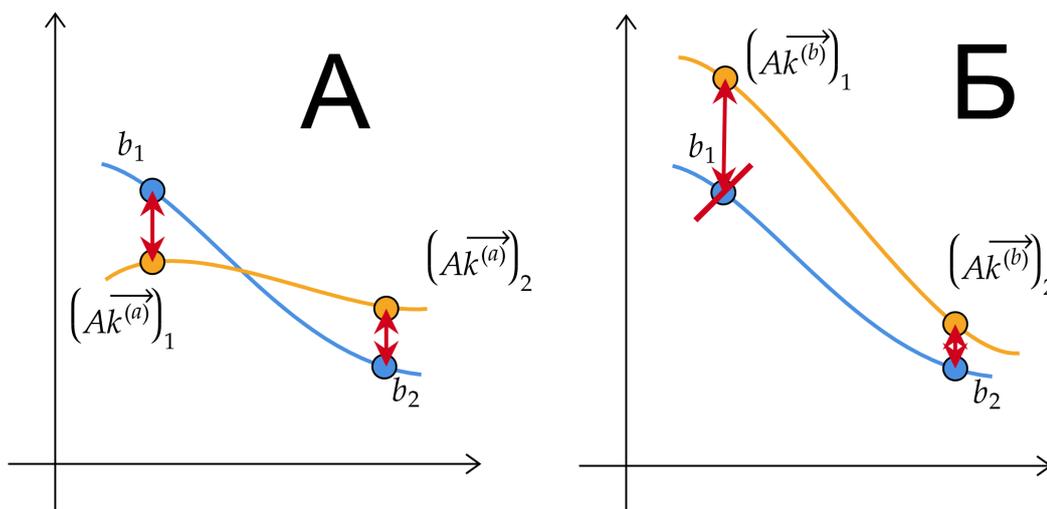


Рисунок 2 — Схема доказательства применимости алгоритма. Синим цветом условно обозначены экспериментальные точки, оранжевым - вычисляемые значения.

Можно показать, что такого быть не может (от противного).

Пусть $\Delta_2^{(a)} = (A\vec{k}^{(a)})_2 - b_2$ и $\Delta_2^{(b)} = (A\vec{k}^{(b)})_2 - b_2$. Тогда из того, что при минимизации в случае Б использовалась только вторая точка следует, что $\Delta_2^{(b)} \leq \Delta_2^{(a)}$, причём в нашем случае равенство не реализуется.

Пусть $\vec{k}(t) = \vec{k}^{(a)}(1 - t) + \vec{k}^{(b)}t$, где t - параметр меняющийся от 0 до 1.

Тогда $\Delta_1 = (A\vec{k}(t))_1 - b_1$ и $\Delta_2 = (A\vec{k}(t))_2 - b_2$ - линейно зависят от t . $\Delta_1^{(a)} < 0$ и $\Delta_1^{(b)} > 0$ тогда найдётся $t_0 \in (0, 1)$ для которого $\Delta_1(t_0) = 0$. При этом в силу линейности $0 < \Delta_2(t_0) < \Delta_2^{(a)}$.

Значит, мы нашли коэффициенты $\vec{k}(t_0)$ при которых χ^2 для двух точек меньше чем при коэффициентах $\vec{k}^{(a)}$, что противоречит изначальному предположению. Значит такого не может быть.

Это рассуждение легко обобщается на большее количество точек и позволяет нам отбрасывать ненужные точки описанным выше способом.

Таким образом, мы можем получать оптимальные значения плотности для каждой области выбранного разбиения пространства. А значит, полученный в результате профиль плотности будет тем точнее, чем мельче выбрано разбиение.

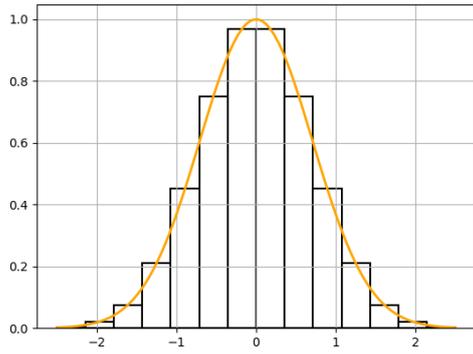
Однако расчёт спектров от каждой области в GALPROP требует значительного времени, в связи с чем, просто задать достаточно мелкое разбиение всего пространства и обсчитать его не всегда представляется возможным.

1.3. НЕРАВНОМЕРНАЯ СЕТКА И ПОШАГОВАЯ ДЕТАЛИЗАЦИЯ

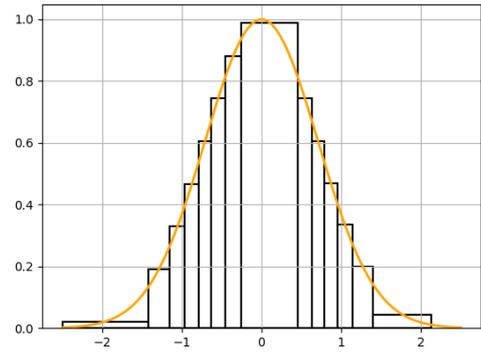
Мы можем строить приближение искомого профиля плотности в виде кусочно-постоянной функции, зависящей от разбиения пространства. При этом чем мельче разбиение, тем точнее полученное приближение. Однако мы не всегда можем позволить себе обсчитать разбиение достаточно мелкое для того, чтобы полученный результат поддавался анализу.

В первую очередь, напрашивается идея о том, чтобы использовать неравномерное разбиение и детализировать более "интересные" участки профиля. Проиллюстрирую эту идею на примере приближения к Гауссовой функции (Рисунок 3).

На рисунках представлено кусочно-гладкое приближение к Гауссовой функции при этом на обоих графиках использовано одно и то же число областей. Однако на первом графике выбрано равномерное распределение, а на втором графике ширина областей выбиралась так, чтобы перепад функции на каждом из участков был одинаков. Такой выбор разбиения детализирует участки быстрого изменения искомой функции. Видно, что во втором случае приближение получается более информативным и близким к искомой функции.



(a)



(б)

Рисунок 3 — Иллюстрация различных типов разбиения.

Так же неудовлетворительным кажется то обстоятельство, что проведя расчёт для некоторого разбиения и не получив желаемой точности мы вынуждены задать новое, более мелкое разбиение и провести расчёт заново. Хотелось бы сделать процесс детализации пошаговым и постепенным, так чтобы в любой момент можно было остановить расчет, увидеть результат и, в случае необходимости, продолжить дальнейшую детализацию с последнего состояния.

Далее изложен метод, который использовался в данной работе для решения указанных задач.

В работе использовалась неравномерная сетка из параллелепипедов и выполнялись следующие шаги:

- 1) Задавалось начальное грубое равномерное разбиение пространства. Описанным в пункте 1 методом рассчитывались наблюдаемые спектры для каждой области.
- 2) Описанным в пункте 2 методом для каждой области выбранного разбиения вычислялась оптимальная плотность. С учётом этих плотностей каждому участку присваивалось значение, пропорциональное его вкладу в хи-квадрат.
- 3) Далее алгоритм принимал решение о разбиении одной из областей вдоль одной из трёх осей на две равные дочерние области. Решение на каждом шаге принималось так, чтобы минимизировать перепад значений между соседними областями и, соответственно, сгладить профиль и улучшить хи-квадрат.

- 4) Далее для одной из двух полученных дочерних областей наблюдаемые спектры рассчитывались описанным в пункте 1 методом, а для другой находились вычитанием их из спектров родительской области спектров обчисленной дочерней области.
- 5) Таким образом получалось новое, более мелкое разбиение и все шаги, начиная со второго, повторялись заново.

Такая сетка хранилась в виде двух (для двухмерного случая) или трёх (для трёхмерного случая) двоичных деревьев разбиений вдоль каждой из осей (смотри Рисунок 4).

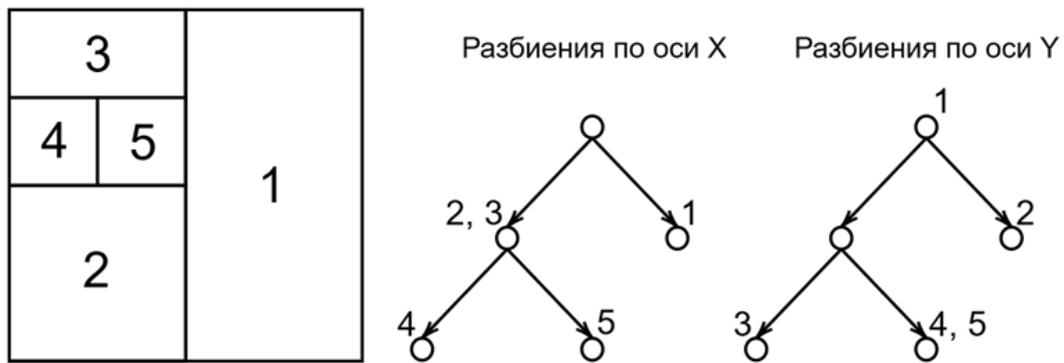


Рисунок 4 — Схема работы с неравномерной сеткой.

Каждому узлу в каждом дереве сопоставлено множество областей, так что пересечение любых множеств любых двух узлов из разных деревьев содержит не более одного элемента. Такой подход к работе с сеткой, помимо удобства хранения данных, позволяет для каждой области быстро выделить множества областей, граничащих с ней с каждой из сторон, что предельно уменьшает время поиска.

Можно сформулировать простые правила отбора. Например, мы хотим найти множество областей, граничащих с областью 2 сверху. Тогда из дерева разбиений по оси X нужно взять все узлы, дочерние по отношению к узлу содержащему область 2 (смотри Рисунок 5). Получим множество областей 2, 3, 4, 5. В дереве разбиений по оси Y из узла содержащего область 2 нам следует подняться на одну вершину выше, спуститься на один шаг влево и далее спускаться по дереву, сворачивая только вправо. Получим множество областей 4, 5. Пересечение полученных множеств, даст искомое множество 4, 5.

Эти правила отбора легко обобщаются на трёхмерный случай с тремя

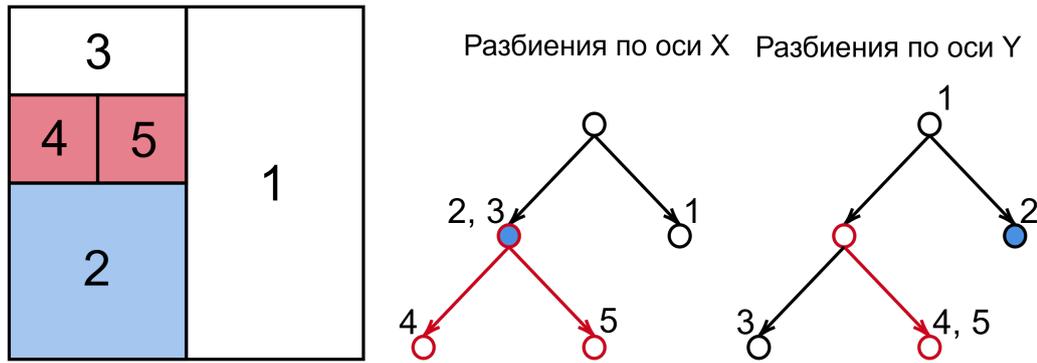


Рисунок 5 — Схема отбора граничащих областей на неравномерной сетке.

деревьями.

Теперь для выбранной области, зная значения во всех прилегающих к ней областях, мы можем оценить перепад значений вдоль одной из осей, например, вдоль оси X , следующим образом:

$$\Delta_{1x} = |X_l - X| + |X_r - X|$$

Где X - значение в рассматриваемой области, X_l и X_r - средние значения по множеству областей прилегающих слева и справа соответственно.

Так же рассматривался максимальный перепад значений на множестве областей, прилегающих к области с остальных сторон (с двух оставшихся для двухмерного случая и с четырёх оставшихся для трёхмерного случая):

$$\Delta_{2x} = X_t^{max} - X_t^{min}$$

Где X_t^{max} и X_t^{min} - максимальное и минимальное значения на указанном множестве касательных областей (процесс определения величин Δ_{1x} и Δ_{2x} схематично показан на Рисунке 6).

Для рассматриваемой области определялась величина:

$$\Delta_x = \max[\Delta_{1x}, \Delta_{2x}] * L_x$$

Где L_x - протяжённость рассматриваемой области вдоль оси X .

Таким образом для каждой области рассчитывались величины $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$. Далее из всех этих величин выбиралась наибольшая и производилось разбиение соответствующей области вдоль соответствующей оси.

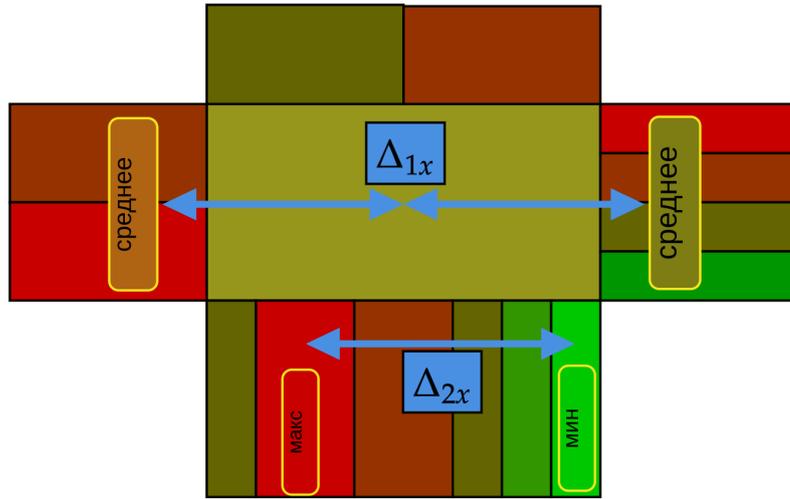


Рисунок 6 — Схема определения величин Δ_{1x} и Δ_{2x} для выбранной области. Более красным цветом условно обозначены области, которым присвоено большее значение, зелёным - меньшее.

Выбор такого способа оценки можно назвать полуэмпирическим. Проиллюстрируем на простом примере тот факт, что он приводит к желаемым результатам.

Рассмотрим произвольную функцию двух переменных на произвольном участке, например: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sin(r)$, $x, y \in [0; 5]$ (Рисунок 7):

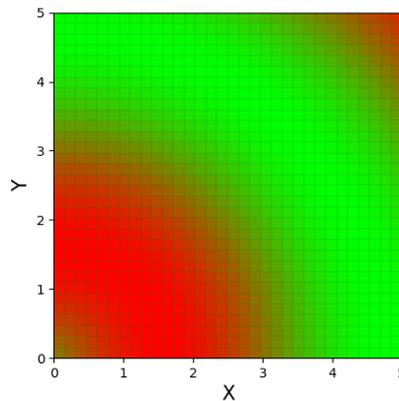


Рисунок 7 — Мелкое разбиение для функции $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sin(r)$, $x, y \in [0; 5]$

Начнём с совсем грубого разбиения этой области на 4 части и запустим описанный алгоритм. При этом на каждом шаге будем просто присваивать каждой области среднее значение функции в этой области (Рисунок 8).

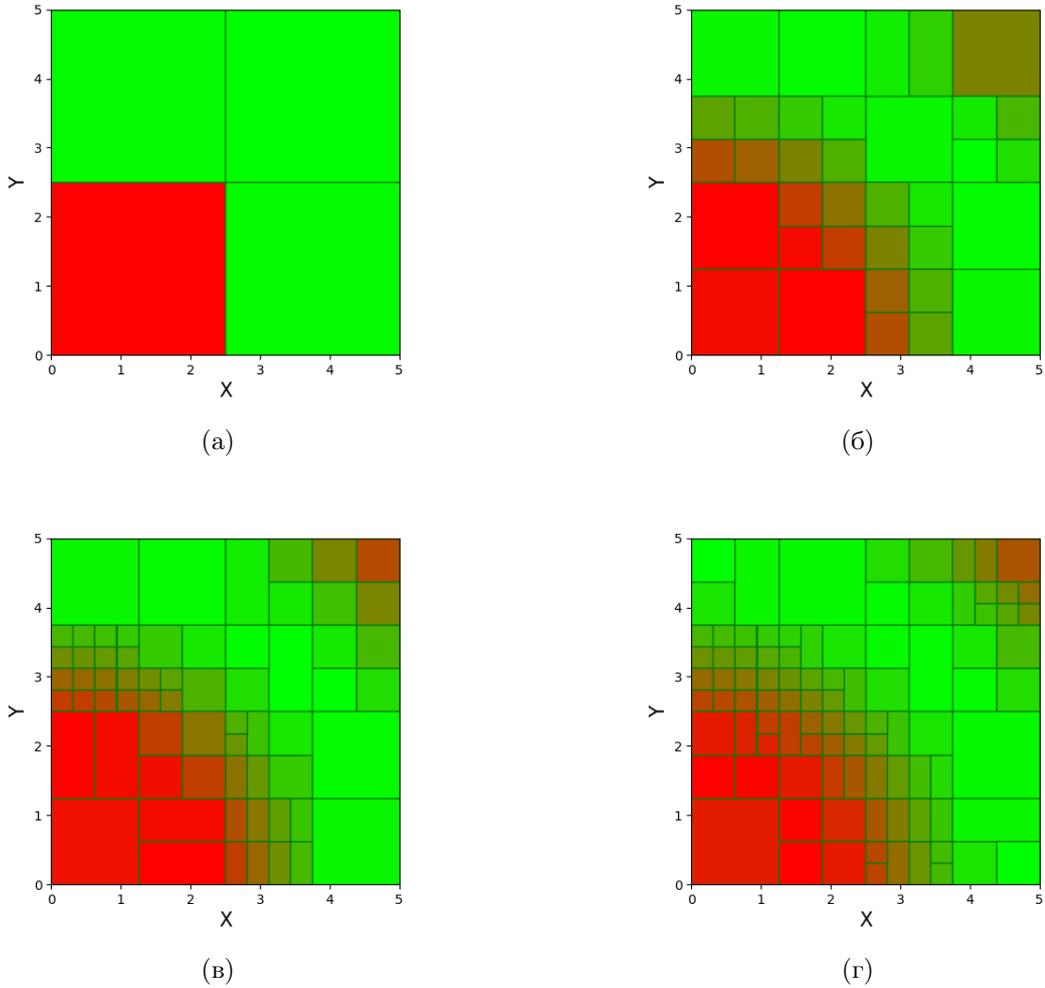


Рисунок 8 — Иллюстрация процесса пошаговой детализации на примере функции $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$. На рисунках приведены начальное разбиение и разбиения полученные через 30, 60 и 90 шагов.

Видно, что пошаговая детализация, как и ожидалось, приводит к более мелкому разбиению в областях быстрого изменения функции. Таким образом выбранную оценку можно считать вполне пригодной для дальнейшей работы.

Ещё раз оговорюсь о том, какие именно значения следует присваивались областям при поиске профиля плотности с помощью описанного алгоритма детализации.

В том случае, если речь идёт о приближении нашей оценки к некому реальному профилю плотности, областям следует присваивать значение плотности в этой области:

$$X_i = \rho_i = \sqrt{k_i}$$

где k_i - коэффициент подбираемый для области согласно пункту 2.

Однако в нашем случае целесообразнее ставить вопрос об эффективной минимизации хи-квадрата. Соответственно областям следует приписывать значения пропорциональные их вкладу в хи-квадрат. А именно:

$$X_i = \rho_i^2 * \left(\sum_j \frac{\phi_j}{\sigma_j} \right) = k_i * \left(\sum_j \frac{\phi_j}{\sigma_j} \right)$$

где ϕ_j - значения спектра исходящего от данной области при энергиях соответствующих экспериментальным точкам, σ_j - соответствующие погрешности экспериментальных точек. Суммирование проводится, как по точкам позитронного спектра, так и по точкам спектра гамма-излучения.

Также следует отметить, что GALPROP при численном моделировании потоков частиц использует пространственную сетку с некоторым шагом. В этой связи, дабы избежать существенных погрешностей при моделировании, следует ввести ограничения на разбиения, задав минимальную допустимую протяжённость областей вдоль каждой из осей.

Описанный в этой части приём детализации профиля послужил в дальнейшей работе полезным инструментом. В ряде случаев, например, в случае модели распределения источников в плоскости галактического диска, возможен расчёт достаточно мелкого разбиения и без его использования. В других случаях, например, при рассмотрении распределения источников в трёхмерном пространстве Галактики, его применение было необходимо.

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущей части была описана не вся методология данного исследования, однако для её дальнейшего развития следует рассмотреть результаты, которые можно получить на данном этапе.

Здесь для примера приведены результаты полученные для частиц массой 500 GeV , аннигилирующих по e^+e^- -каналу. Рассматривалось трёхмерное распределение в пространстве Галактики с началом отсчёта в галактическом центре и координатами $x, y \in [-20 \text{ kpc}; +20 \text{ kpc}]$ и $z \in [-3 \text{ kpc}; +3 \text{ kpc}]$. В качестве стартового было выбрано разбиение этого пространства на 64 одинаковых области размером $16 \text{ kpc} \times 16 \text{ kpc} \times 1.5 \text{ kpc}$. Разумеется после столь грубого разбиения использовался описанный выше метод детализации.

В результате был получен профиль плотности, представленный на Рисунке 9, спектры от которого отлично согласуются с экспериментальными данными (Рисунки 10 и 11).

На Рисунке 9 цветом выделены области, имеющие ненулевую плотность источников, остальное же пространство оказалось незаполненным. При этом более тёмным и красным цветом выделены области, дающие наибольший вклад в наблюдаемые спектры (более высокие пики серых линий на рисунках 10 и 11), светлым зелёным цветом обозначены области, дающие меньший вклад.

Видно, что описание экспериментальных данных оказывается вполне удовлетворительным, однако сам профиль вызывает вопросы.

Сразу бросается в глаза, что профиль получается не симметричным, несмотря на то, что исходная задача симметрична относительно плоскости, проходящей через центр Галактики и точку наблюдения перпендикулярно плоскости Галактики. Также видно, что профиль представляет из себя набор отдельных областей с высокой плотностью, которые при дальнейших разбиениях сжимаются до сколь угодно малых размеров, что выглядит

нефизично с учётом того, что спектры, создаваемые соседними областями отличаются не так уж сильно.

Вызвано это тем, что алгоритм находит одно единственное решение с наименьшим значением χ^2 . При этом, даже симметричные области могут иметь формально различающиеся на малую величину значения χ^2 из-за накопления машинных ошибок во время расчетов.

Очевидно, что перенос части источников в область соседнюю с теми, что отмечены на рисунке 9, выглядел бы логично и ухудшил бы χ^2 на доли процента, однако программа полностью игнорирует такие возможности, находя лишь единственный наилучший вариант.

Также очевидно, что мы могли бы зеркально отразить полученный профиль и выписать решение в виде

$$\alpha(\text{найденный профиль}) + (1 - \alpha)(\text{зеркальный профиль}),$$

где $\alpha \in [0, 1]$, получив, вообще говоря бесконечный набор профилей, согла-

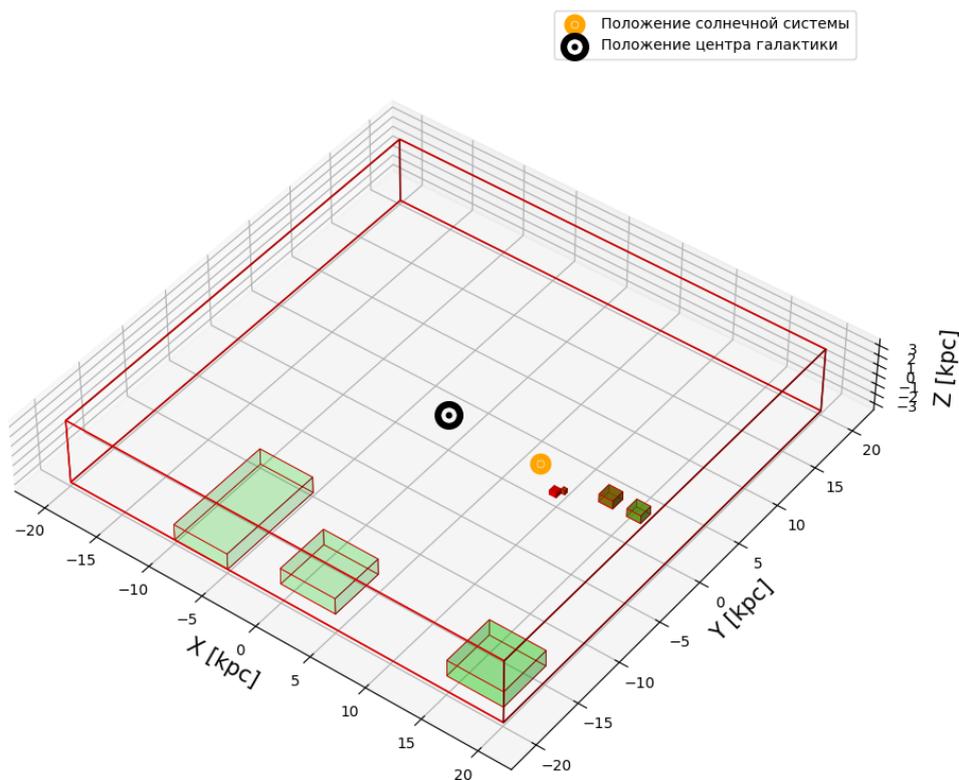


Рисунок 9 — Полученный профиль плотности. Цветом выделены области, имеющие ненулевую плотность: красным – дающие больший вклад в наблюдаемые спектры, зелёным – меньший.

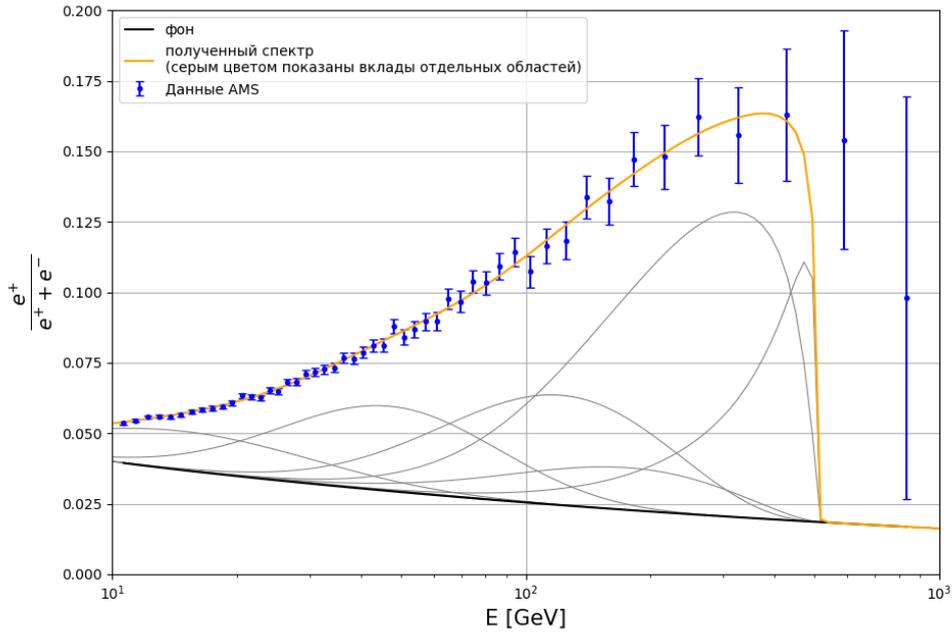


Рисунок 10 — Получаемая доля позитронов в сравнении с данными AMS-02 (оранжевая линия). Серыми линиями обозначены вклады отдельных областей. Чёрным цветом показан используемый фон.

сующихся с данными. Однако незначительные погрешности связанные с численными расчетами (в основном при работе GALPROP), различающие левые и правые области, заставляют алгоритм выбрать один единственный вариант с формально минимальным χ^2 , даже когда другие варианты почти не отличаются от него.

Таким образом полученные на данном этапе результаты позволяют делать следующие выводы:

1. Позитронная аномалия может быть объяснена выбором пространственного распределения источников.

2. Профиль плотности может быть представлен как набор отдельных локализованных источников, что потенциально может согласоваться с моделями клампов – сгустков тёмной материи [15].

3. Нельзя делать вывод о том, что профиль плотности в действительности выглядит так, как он представлен на рисунке 9. Найденные конкретные положения источников не имеют большого физического смысла.

В итоге, мы потенциально можем построить бесконечное множество профилей плотности так, что описание экспериментальных данных оста-

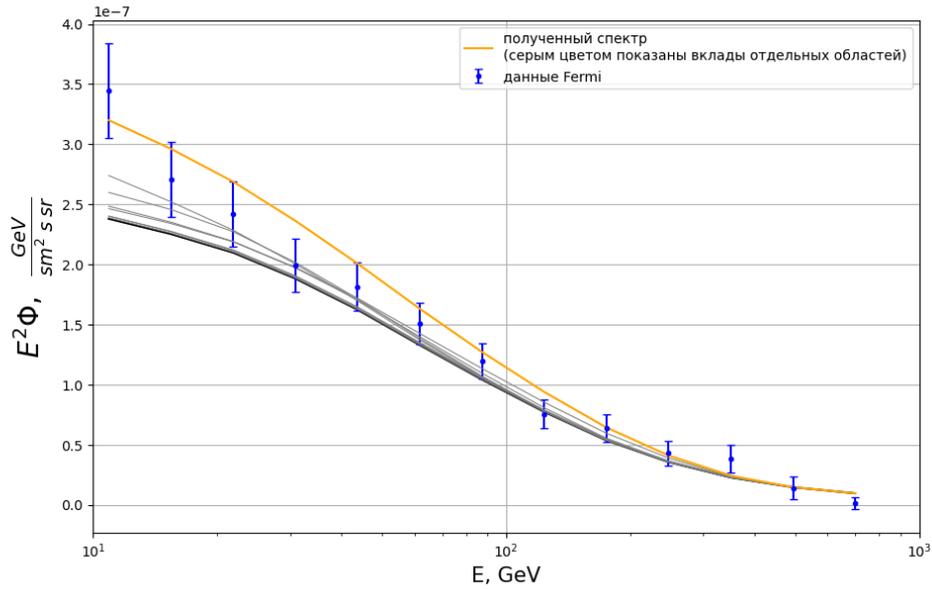


Рисунок 11 — Получаемый спектр γ -излучения в сравнении с данными Fermi-LAT (оранжевая линия). Серыми линиями обозначены вклады отдельных областей. Чёрным цветом показан используемый фон.

нется удовлетворительным. При этом причины, по которым реализованный алгоритм выделяет лишь один из них, никак нельзя назвать физическими.

В таком случае разумным следующим шагом становится разработка алгоритма, способного отыскать все возможные варианты профиля плотности, близкие в смысле значения χ^2 . Тогда мы получим возможность проанализировать всю их совокупность, а результирующий профиль представить как их сумму с произвольными коэффициентами. То есть найти не частное, а общее решение задачи в параметризованном виде.

3. РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИИ. ПОИСК ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПЛОТНОСТИ.

Как следует из названия, эта часть посвящена решению проблемы обозначенной в конце предыдущего раздела.

Для более ясного изложения идеи дальнейшей работы начнём с подробного рассмотрения очень упрощённого случая. А именно: предположим, что близкие спектры могут быть получены только от областей, симметричных относительно плоскости, проходящей перпендикулярно Галактическому диску через Галактический центр и точку наблюдения.

Пусть мы произвели разбиение исследуемого пространства некоторой сеткой и получили набор областей. Обозначим их как $\{a, b, c, d \dots, A, B, C, D \dots\}$, так что области $\{a, b, c, d \dots\}$ симметричны областям $\{A, B, C, D \dots\}$.

Мы уже имеем быстрый алгоритм, позволяющий найти один набор коэффициентов, соответствующий минимальному χ^2 . Предположим, мы получили ненулевые коэффициенты для областей $\{a, b, c\}$ и нулевые для всех остальных. Обозначим полученный профиль плотности как $\rho(\{a, b, c\})$, а плотности в каждой из областей обозначим $\rho(a)$, $\rho(b)$, $\rho(c)$ соответственно.

Теперь исключим область a из рассмотрения (вычеркнем a) и применим наш алгоритм поиска оптимальных плотностей к оставшимся областям. Получим ещё один интересующий нас вариант – $\{A, b, c\}$. Рассмотрим таким образом все возможные вычёркивания из набора $\{a, b, c\}$ и получим на выходе сразу 8 вариантов профиля: $\{a, b, c\}$, $\{A, B, C\}$.

Тогда общее решение запишется в виде:

$$\rho^2(x, y, z) = \alpha_1 \rho^2(\{a, b, c\}) + \alpha_2 \rho^2(\{A, b, c\}) + \dots + \alpha_8 \rho^2(\{A, B, C\})$$

Где $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ - произвольные коэффициенты. Любой выбранный набор этих значений даст нам профиль, удовлетворительно описывающий данные.

На этом месте следует сделать несколько пояснений.

Во-первых, здесь складываются именно квадраты плотностей, то есть значения найденных коэффициентов, потому что, как уже было отмечено ранее, рассматривается процесс аннигиляции двух частиц. Для процесса распада следовало бы складывать плотности в первой степени.

Во-вторых, очевидно, что мы могли бы записать общее решение, используя меньшее число параметров. К примеру, в области a мы могли бы взять квадрат плотности $\alpha'_1 \rho^2(a)$ и в области A взять $(1 - \alpha'_1) \rho^2(a)$, аналогично для пар областей b, B и c, C . Тогда мы имели бы всего 3 параметра $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \in [0; 1]$. Однако при таком способе мы не можем просто складывать найденные профили, как эквивалентные с точки зрения спектров, нам нужно устанавливать отношения эквивалентности между отдельными их областями или группами их областей. В рассматриваемом упрощённом случае эти отношения тривиальны, однако в дальнейшей работе такое рассмотрение не возможно.

В-третьих, мы всё равно можем сократить число параметров. Ведь очевидно, что, например:

$$\rho^2(\{A, B, c\}) = \rho^2(\{A, b, c\}) + \rho^2(\{a, B, c\}) - \rho^2(\{a, b, c\})$$

И тогда нам не обязательно использовать все 8 профилей. Однако, при таком рассмотрении условие неотрицательности квадрата плотности не переходит в требование неотрицательности коэффициентов α_i и ограничения, которые мы должны будем наложить на эти коэффициенты, вообще говоря начинают зависеть от плотности в каждой из областей. В данном упрощённом случае такое рассмотрение возможно, но в дальнейшем не реализуемо.

В этом упрощённом примере мы, разумеется, могли не идти таким сложным путём и сразу легко выписать ответ. Однако мы специально рассмотрели процедуру поиска общего решения, которая использовала только алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов и вывод из рассмотрения некоторых областей и никак не использовала знание о симметрии задачи. Теперь её же мы можем применить к более общему случаю.

Дело в том, что выведя из рассмотрения (вычеркнув), скажем, области a, A, b, B , и запустив алгоритм поиска оптимального профиля, мы можем получить на выходе вариант содержащий, например области $\{d, e, f, c\}$, всё ещё имеющий приемлемый χ^2 . Окажется что сумма областей a, b , входившая в наше первоначальное разложение может быть заменена на некоторую сумму областей d, e, f .

Из используемого нами набора спектров от каждой из областей, многие являются "линейно зависимыми" в том смысле, что суммы одних наборов спектров с положительными коэффициентами с хорошей точностью можно представлять как суммы других наборов, опять же с положительными коэффициентами, и исследуемая задача имеет множество неочевидных "симметрий".

Но мы уже знаем, как поступить в таком случае:

- Во-первых, нам следует рассмотреть вообще все возможные вычёркивания из полного набора наших областей - все возможные способы, которыми мы можем исключить некоторое количество областей из рассмотрения.
- Во-вторых, для каждого такого вычёркивания нам следует найти наилучшие коэффициенты и соответствующее значение χ^2 .
- Далее нам нужно отобрать все случаи в которых χ^2 достаточно близок к минимально возможному и выписать общее решение, как их сумму, зависящую от параметров.

Ясно, что некоторые из наборов коэффициентов, полученных таким способом будут одинаковыми (к примеру, если мы получили решение содержащее только области $\{a, b, c\}$, то при вычёркивании области d поиск оптимальных коэффициентов не приведёт ни к чему новому) и многие слагаемые в итоговой сумме можно будет опустить. Но также ясно, что запустив такой перебор, мы действительно охватим все возможные варианты профилей, содержащих различные области и согласующихся с данными.случае

Однако число возможных вычёркиваний равно 2^N , где N - число областей порядка 100. Очевидно, что какой бы быстрой не была процедура поиска оптимальных коэффициентов проделать её 2^{100} раз за разумное время невозможно и нужно придумать способ оптимизирующий этот перебор.

- Во-первых, нужно заранее исключать из рассмотрения вычёркива-

ния, заведомо приводящие к одинаковому результату.

- Во-вторых, нужно организовать перебор в порядке возрастания χ^2 , чтобы не рассматривать все вычёркивания, а, двигаясь от минимального значения, остановить перебор, достигнув определённой границы.

Был разработан алгоритм, удовлетворяющий этим требованиям (его работа схематично проиллюстрирована на Рисунке 12 на примере набора из 5 областей).

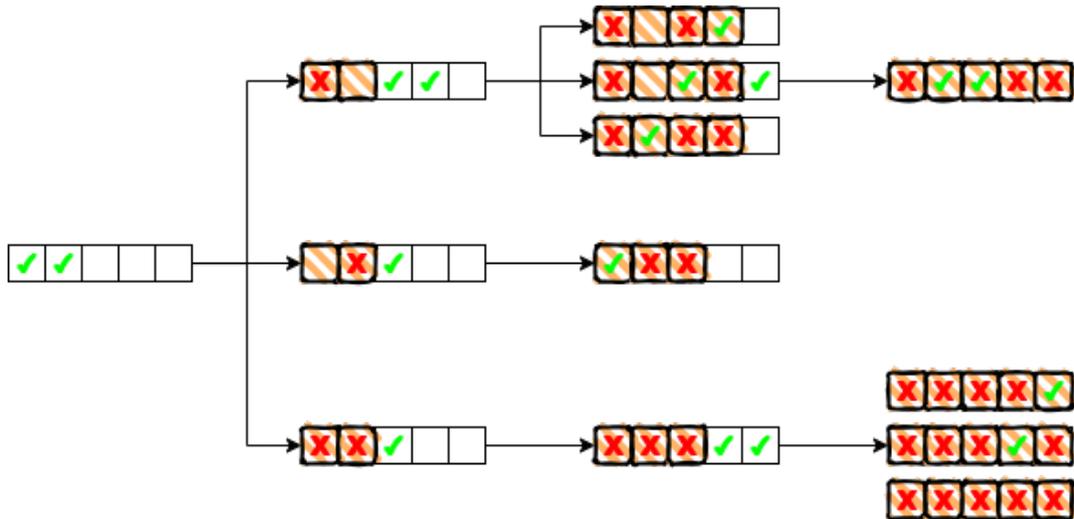


Рисунок 12 — Схема перебора вариантов. Красными крестиками отмечены "вычеркнутые" области. Зелёными галочками отмечены области, коэффициенты которых после разложения оказались отличными от нуля. Оранжевой штриховкой помечены области недоступные для вычёркивания при дальнейшем переборе.

Мы начинаем с наилучшего возможного разложения. Далее мы рассматриваем все возможные вычёркивания вошедших в него областей, при этом все эти области помечаются (оранжевая штриховка на рисунке 12) и становятся недоступными для дальнейших вычёркиваний. Далее, для каждого вычёркивания мы снова находим области с ненулевыми коэффициентами. При этом нас интересуют только те из них, которые не были помечены (заштрихованы) ранее. Мы снова рассматриваем их всевозможные вычёркивания и так далее, создавая дерево всевозможных вариантов.

Такой алгоритм не гарантирует того, что одинаковые наборы коэффициентов не появятся (их в дальнейшем требуется выбрать и исключить). Однако, видно, что он не рассматривает вычёркивания, заведомо приводящие к одинаковым результатам (в приведённом примере он, например, не рассматривает вычёркивания, содержащие области 3, 4, 5 и не содержащие

области 1 или 2, т. к. они очевидно приведут к первоначальному набору коэффициентов).

Также, такой алгоритм не отслеживает то, как соотносятся значения χ^2 в разных ветвях дерева. Однако он гарантирует, что, двигаясь вглубь по дереву, мы на каждом шаге будем получать χ^2 хуже, чем на предыдущем. Таким образом, рекурсивно перебирая такое дерево, мы всегда можем остановиться, достигнув определённого значения $\chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$.

Такой подход позволяет достаточно быстро отыскать все интересные нас варианты профиля плотности. Осталось только уточнить то, в какой момент нам следует прекращать перебор, то есть как оценить значение $\Delta\chi^2$.

Как уже отмечалось выше, численные методы, которыми GALPROP рассчитывает спектры исходящие от каждой области, а также методы последующей обработки, имеют погрешность, притом довольно ощутимую, особенно для областей, лежащих около точки наблюдения. Очевидно, что для того, чтобы наша работа приобрела физический смысл, рассматриваемая нами совокупность профилей плотности должна иметь $\Delta\chi^2$ хотя бы порядка вклада этой погрешности в χ^2 .

Узнать реальное значение погрешностей при работе GALPROP мы не можем за неимением каких либо эталонных спектров. Однако зная о симметрии задачи, мы можем оценить эту величину, сравнивая показания GALPROP для симметричных областей. Так, например, мы можем взять исходный оптимальный профиль плотности $\{a, b, c\}$, рассмотреть все профили типа $\{a, b, c\}$, $\{A, B, C\}$, выяснить насколько при этом меняется χ^2 и таким образом получить оценку снизу для $\Delta\chi^2$.

Чтобы получить верхнюю оценку $\Delta\chi^2$ мы можем рассмотреть получаемые спектры и сказать, при каком значении $\Delta\chi^2$ из нельзя назвать согласующимися с данными. Однако число находимых вариантов очень быстро растёт с увеличением $\Delta\chi^2$ (Рисунок 13).

Поэтому, в данной работе параметр $\Delta\chi^2$ выбирался так, чтобы превосходить описанную нижнюю оценку и чтобы расчёт не занимал слишком много времени.

Как правило $\Delta\chi^2$ составлял около 5% от χ_{min}^2 .

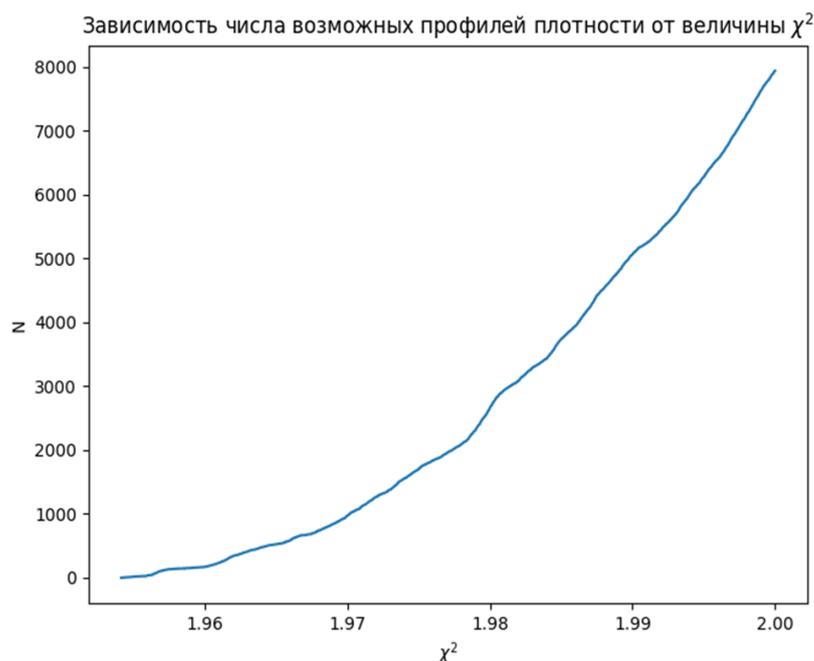


Рисунок 13 — Зависимость числа получаемых наборов коэффициентов от установленного предела на χ^2 для разбиения, содержащего 64 области.

Также, только для поддержания строгости рассуждений, следует сделать ещё одну оговорку. Мы находим наборы коэффициентов, например, $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$, которые задействуют различные области нашего разбиения (на рисунке а они схематично показаны векторами) и рассматриваем их линейные комбинации с коэффициентами $\alpha_i > 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, таким образом получая множество решений (на Рисунке 14(а) это множество схематично показано зелёной штриховкой).

Однако ясно, что получив, например, набор коэффициентов \vec{k}_1 мы можем, немного меняя значения коэффициентов в задействованных областях, получить множество решений, близких к \vec{k}_1 , имеющих приемлемый χ^2 (такие множества решений схематично показаны на Рисунке 14(б) красной штриховкой). Рассмотрение таких решений не интересно, так как они задействуют одни и те же области и геометрически представляют из себя один и тот же профиль, искусственно ухудшенный перераспределением плотности.

Однако, для соблюдения строгости, нужно отметить, что множество решений, удовлетворяющих условию $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$, содержит не только множество рассматриваемых в работе решений, но и некоторую его небольшую окрестность (схематично она показана красной штриховкой на Рисун-

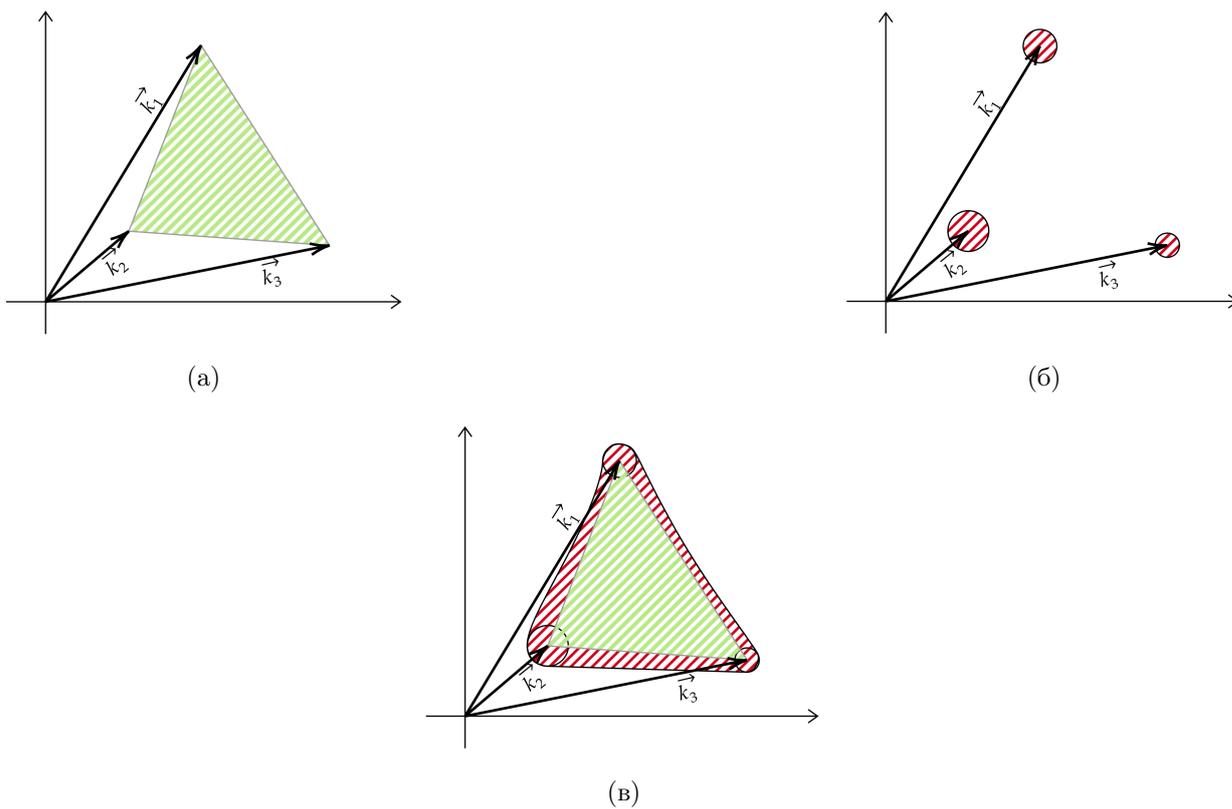


Рисунок 14 — Схематичное изображение множества рассматриваемых профилей плотности.

ке 14(в)). Этой окрестностью мы пренебрегаем в работе, так как, по указанным выше причинам, она не представляет большого интереса с точки зрения анализа формы профиля.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При получении результатов, описанных в части 2, итоговый спектр позитронов или гамма излучения $\vec{\Phi}$, получаемый от профиля плотности, рассчитывался как:

$$\vec{\Phi} = \left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \dots \vec{f}_N \right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix},$$

где

$$\left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \dots \vec{f}_N \right] = \begin{bmatrix} f_{11}, f_{21}, f_{31} \dots f_{N1} \\ f_{12}, f_{22}, f_{32} \dots f_{N2} \\ f_{13}, f_{23}, f_{33} \dots f_{N3} \\ \vdots \\ f_{1N}, f_{2N}, f_{3N} \dots f_{NN} \end{bmatrix}$$

есть спектры, приходящие от каждой из областей, а $k_i \geq 0$ – найденный оптимальный набор коэффициентов. Теперь мы имеем множество наборов коэффициентов и, соответственно, итоговый спектр:

$$\vec{\Phi} = \left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \dots \vec{f}_N \right] \begin{bmatrix} k_{11}, k_{21}, k_{31} \dots k_{M1} \\ k_{12}, k_{22}, k_{32} \dots k_{M2} \\ k_{13}, k_{23}, k_{33} \dots k_{M3} \\ \vdots \\ k_{1N}, k_{2N}, k_{3N} \dots k_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix},$$

где $\alpha_i > 0$ и $\sum_i \alpha_i = 1$ – произвольные параметры, N – число областей в выбранном разбиении, M – число найденных наборов коэффициентов. Или, в более коротких обозначениях, $\vec{\Phi} = FK\vec{\alpha}$.

4.1. МОДЕЛЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПЛОСКОГО ПРОФИЛЯ

На данном этапе работы для упрощения и наглядности временно вернёмся от трёхмерной модели к двухмерной. Рассматривалась тонкая область, лежащая в плоскости галактики с координатами $x, y \in [-20 \text{ кпк}, +20 \text{ кпк}]$ и толщиной 0,6 кпк (некоторая минимальная толщина, необходима для корректной работы GALPROP), разбитая на $8 \times 8 = 64$ одинаковых квадрата со стороной 5 кпк (Здесь и далее параметры разбиения во многом определялись желаемым временем моделирования). Результаты приведены для частиц массой 1000 ГэВ, аннигилирующих по $\mu^+\mu^-$ -каналу (такие параметры дают лучшее значение $\chi_{min}^2/N_{\text{точек данных}} = 1.3$ в сравнении с остальными рассмотренными массами и каналами аннигиляции, впрочем для других вариантов получены качественно схожие результаты).

Для начала представим на графиках всю совокупность потоков позитронов и гамма-излучения, которую можно получить при всевозможных значениях параметров α_i (Рисунок 15).

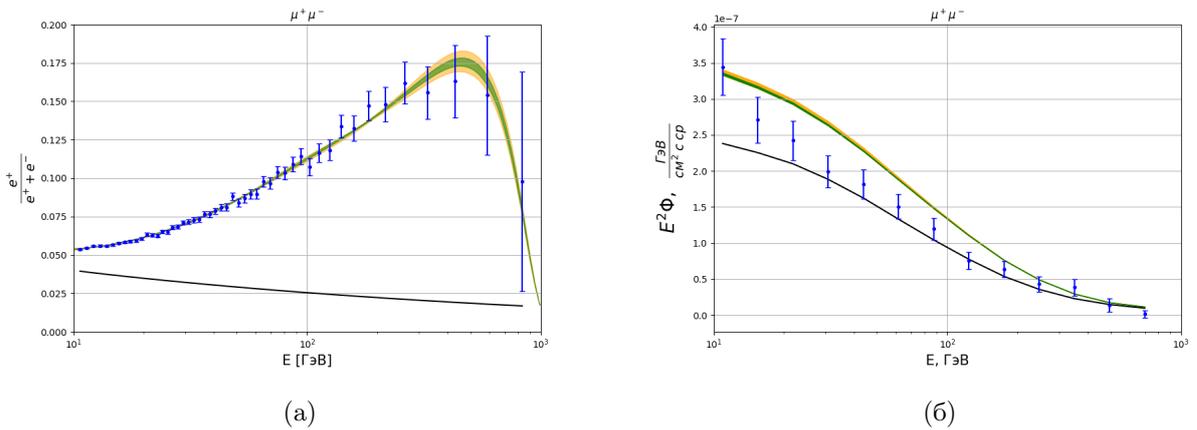


Рисунок 15 — Совокупность потоков позитронов (а) и γ -излучения (б) для всех возможных значений параметров α_i в сравнении с данными AMS-02 и Fermi-LAT соответственно. Зелёные области соответствуют выбору $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ равным 2%, оранжевые области - 10%, чёрными линиями показан используемый фон. Случай аннигиляции по $\mu^+\mu^-$ каналу.

Первым шагом в анализе найденного множества решений может быть построение огибающих сверху и снизу и получение тем самым верхней и

нижней оценки на плотность источников. В данном случае задача симметрична относительно отражения, из чего следует, что подбором параметров α_i мы можем сделать плотность источников в любой наперёд заданной области равной нулю, перенеся все источники в симметричную ей. Вообще, проверка этого условия может использоваться, чтобы удостовериться в том, что мы выбрали достаточный $\Delta\chi^2$, чтобы покрыть погрешности GALPROP. Однако оценка сверху на плотность источников может быть интереснее. Для этого достаточно в матрице K найти максимальный коэффициент в каждой строчке и соответственно профиль, представляющий из себя огибающую сверху, для всего нашего семейства профилей (Рисунок 16).

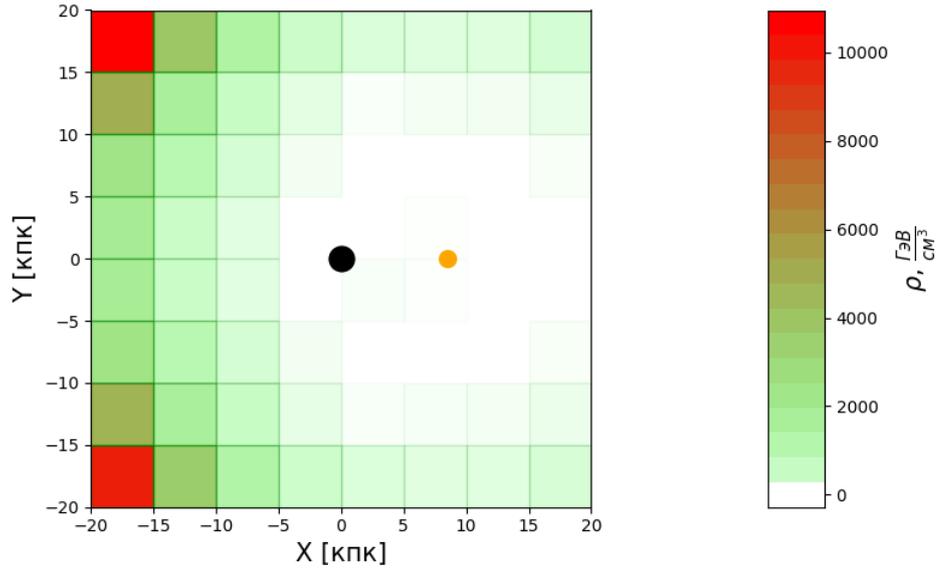
Видно, что огибающая получилась достаточно гладкой и симметричной. В отличие от результатов, полученных в части 2, она уже имеет физический смысл, может быть параметризована и использоваться в дальнейших работах, как оценка сверху на плотность скрытой массы.

Качественно же объяснить форму этого графика не сложно. Очевидно, что одна и та же масса источников будет вносить тем меньший вклад в наблюдаемый спектр и соответственно в χ^2 , чем дальше она от точки наблюдения. Верхняя оценка оказывается выше в наиболее удалённых от Солнечной системы точках, так что форма полученной зависимости согласуется с ожиданиями.

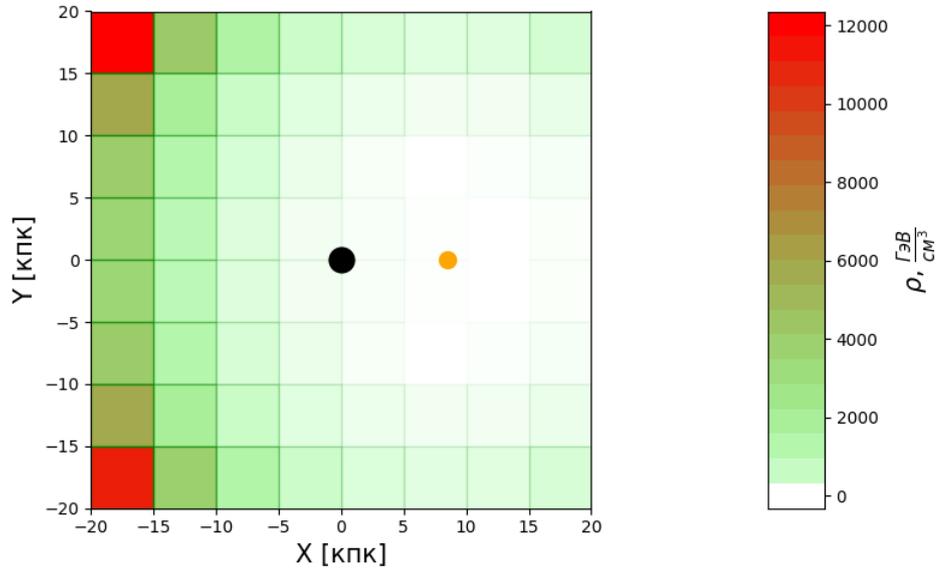
Теперь рассмотрим, какого вида условия можно наложить на профиль так, чтобы по возможности выделить единственное решение из всей совокупности.

Для начала попробуем найти α_i такие, чтобы в результирующем профиле максимальная плотность была минимально возможной. Такое условие действительно выделит лишь одно решение. Чтобы решить такую задачу, нам достаточно рассматривать только часть $\vec{k} = K\vec{\alpha}$. Получим задачу вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_{min} \\ K\vec{\alpha} \leq It \\ \sum \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \end{array} \right. ,$$



(а)



(б)

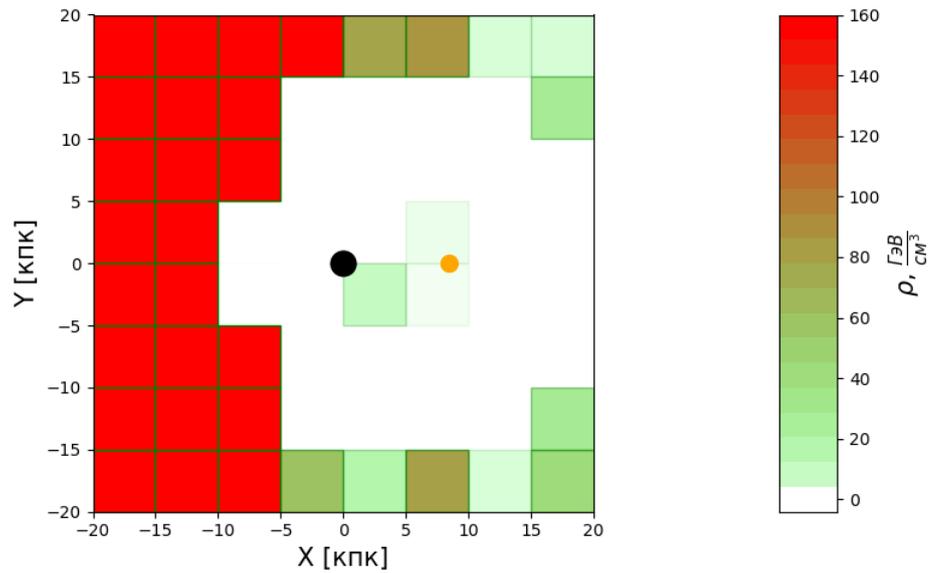
Рисунок 16 — Верхняя оценка на плотность источников получаемая при выборе параметра $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ равным 2% (а) и 10% (б). Случай аннигиляции по $\mu^+\mu^-$ каналу.

где $t = \rho_{max}^2$ соответствует максимальному квадрату плотности в искомом профиле.

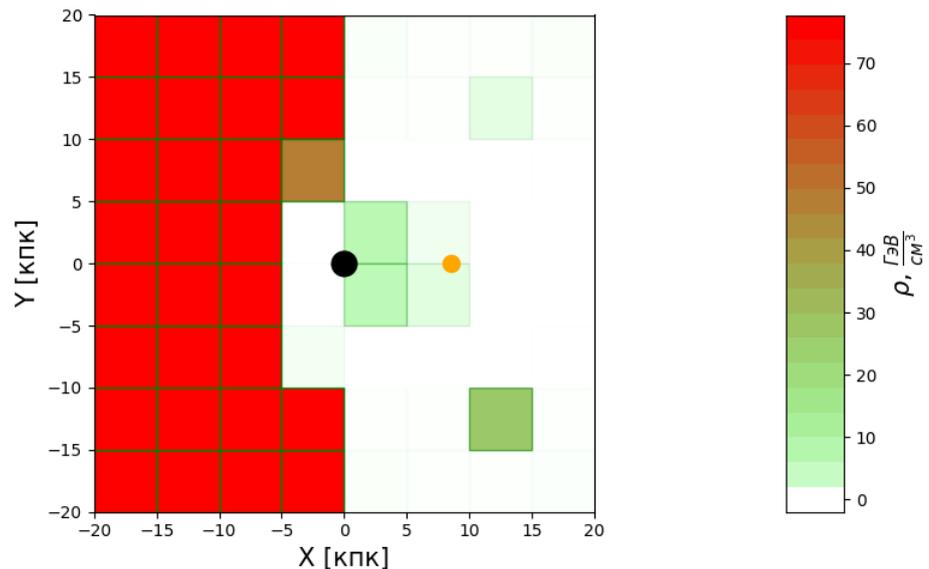
Мы имеем огромное число свободных параметров, поэтому задача не может решаться обычным фитированием. Однако в данном случае линейной связи переменных и линейных граничных условий можно найти более специализированные методы. А так же уже готовое решение можно найти в программных пакетах, работающих с задачами выпуклой линейной

оптимизации, таких как CVXPY (Python).

Получим профиль представленный на Рисунке 17:



(а)



(б)

Рисунок 17 — Профиль плотности получаемый при наложении условия минимальности максимальной плотности при выборе параметра $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ равным 2% (б) и 10% (б). Случай аннигиляции по $\mu^+\mu^-$ каналу.

Постановка рассмотренного условия возможно и не несёт в себе большого физического смысла, однако к решению этой задачи можно свести целый класс подобных условий. Например, профили плотности, найденные в начале этой работы, имели существенный недостаток: из за своей точности и высокой плотности такие источники могли бы наблюдаться с

Земли, как светлые пятна на небе, что сильно ограничено наблюдениями. Для борьбы с этим необходимо минимизировать максимальный суммарный поток ϕ_i приходящий к наблюдателю из одной области или даже отношение этого потока к угловым размерам области ϕ_i/Ω_i . Для решения подобной задачи всего лишь нужно переопределить матрицу K в предыдущей задаче:

$$K' = \left[\frac{\phi_1}{\Omega_1}, \frac{\phi_2}{\Omega_2}, \frac{\phi_3}{\Omega_3} \dots \frac{\phi_N}{\Omega_N} \right] K$$

Таким образом дальше возможно как исследование всей совокупности решений, так и поиск физических ограничений, выделяющих из неё конкретные профили.

4.2. МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ПРОФИЛЯ

В предыдущей части был рассмотрен случай произвольного плоского профиля. Видно, что хотя полученные результаты и обладают некоторой степенью симметрии, направление Галактический центр – Солнечная система всегда оказывается выделенным. Разумеется, положение наблюдателя в данном вопросе не может считаться физической причиной, повлиявшей на реальное распределение источников, поэтому разумно было бы также рассмотреть профиль с наложенным на него ограничением центральной симметрии, исключая выделенность данного направления.

Так же видно, что при рассмотрении произвольного профиля в рамках данного метода, оценки плотности, которые можно получить, крайне слабы в отдалённых от наблюдателя областях. Рассмотрение центрально-симметричного профиля даст нам более сильные ограничения на плотность источников в областях, расположенных дальше от Солнечной системы, в частности по другую сторону от Галактического центра.

Переход к такому рассмотрению не составляет труда, так как методы данной работы никак не зависят от формы разбиения. В этой части также рассматривалась тонкая область толщиной 0,6 кпк, лежащая в плоскости Галактики: $z \in [-0.3 \text{ кпк}; 0.3 \text{ кпк}]$, $r \in [0 \text{ кпк}, 18 \text{ кпк}]$. Использовалось разбиение на 64 кольца шириной $\Delta r = 281.25 \text{ пк}$ с центром, совпадающим

с Галактическим центром. Рассматривались частицы с массами 500 ГэВ и 1000 ГэВ и аннигиляция по каждому из каналов (e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$).

Спорным в данной работе остаётся то, как следует фиксировать параметр $\Delta\chi^2$. Дело в том, что для различных параметров, например, для различных масс частиц мы имеем различные значения χ_{min}^2 , а также различную скорость роста числа рассматриваемых вариантов профиля с ростом $\Delta\chi^2$. Поэтому, сравнения результаты, полученные при различных значениях некоторого параметра, например, массы, мы можем выбрать для них одинаковое абсолютное значение параметра $\Delta\chi^2$ или одинаковое относительное значение $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ или же вовсе не фиксировать значение $\Delta\chi^2$, а вместо этого установить для них одинаковое число перебираемых вариантов профиля с наименьшими значениями χ^2 . Выбор одного из перечисленных вариантов слабо сказывается на получаемых результатах, можно сказать, что качественного различия не наблюдается, однако в дальнейшем необходимо выяснить, использование какого подхода более обоснованно. В данной же работе был выбран второй вариант и фиксировалось именно отношение $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$. Конкретные значения этого параметра, а так же значения χ_{min}^2 для каждого рассмотренного случая приведены в таблице 1.

канал аннигиляции	масса частицы	$\chi_{min}^2/N_{\text{точек данных}}$	$\Delta\chi^2/\chi_{min}^2 \times 100\%$
e^+e^-	500 ГэВ	1.8	2%
e^+e^-	1000 ГэВ	2.7	2%
$\mu^+\mu^-$	500 ГэВ	1.3	7%
$\mu^+\mu^-$	1000 ГэВ	1.2	7%
$\tau^+\tau^-$	500 ГэВ	1.5	3%
$\tau^+\tau^-$	1000 ГэВ	0.8	3%

Таблица 1 — Параметры, использованные при расчёте.

Как и в предыдущей части, мы получаем множество профилей плотности, имеющих приемлемое значение χ^2 и выписываем общее решение, зависящее от набора параметров α_i . Вся совокупность потоков позитронов и гамма-излучения, которую можно получить при всевозможных значениях параметров α_i представлена в виде областей на Рисунке 18.

Далее аналогично предыдущей части была получена оценка сверху на плотность источников для каждого случая (Рисунок 19). Здесь стоит отметить, что для случая аннигиляции по e^+e^- каналу мы имеем отдель-

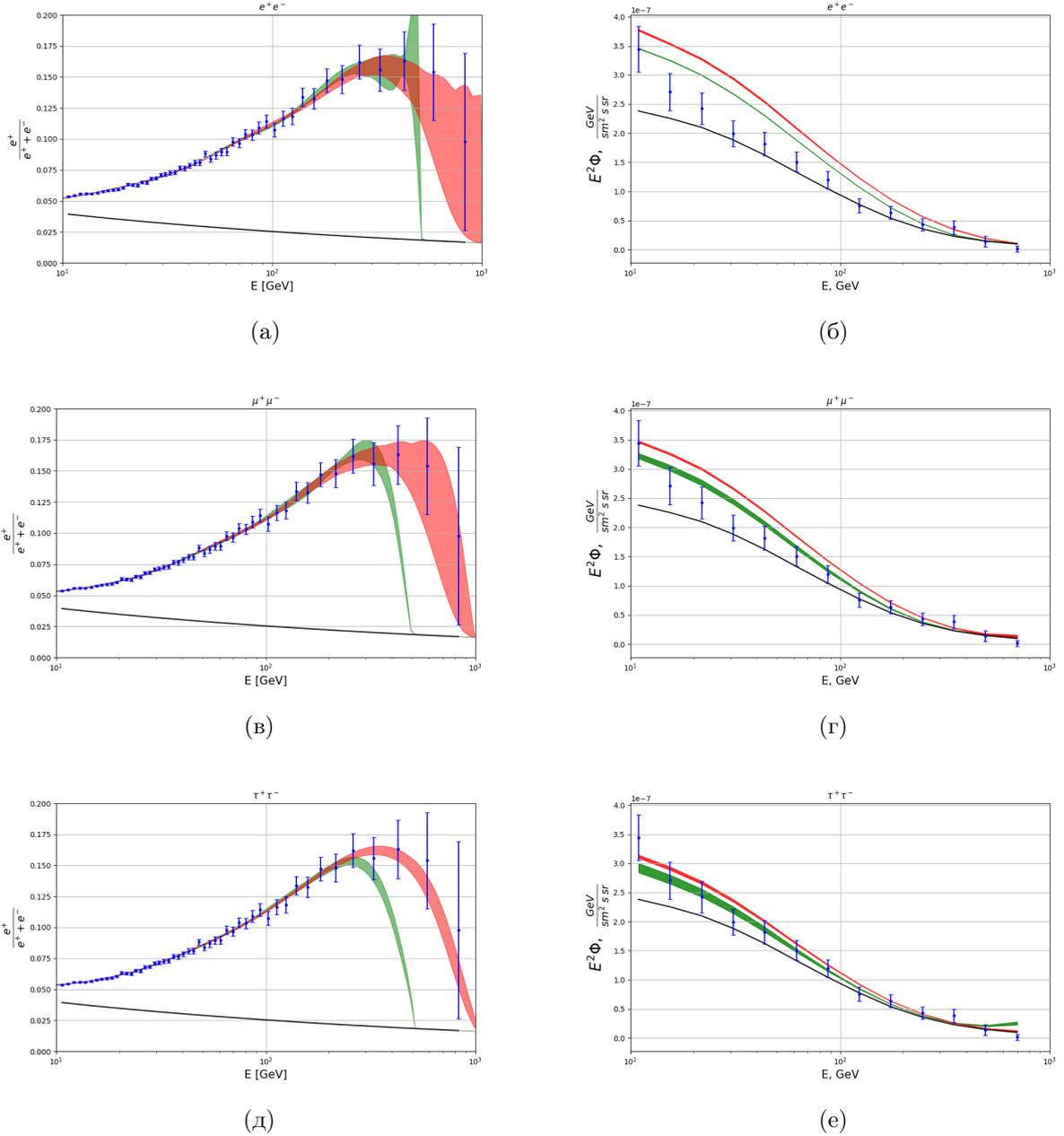


Рисунок 18 — Совокупность потоков позитронов ((а), (в), (д)) и γ -излучения ((б), (г), (е)) для всех возможных значений параметров α_i в сравнении с данными AMS-02 и Fermi-LAT соответственно. Зелёные области соответствуют аннигиляции частиц массой 500 ГэВ, красные - 1000 ГэВ по каналам e^+e^- ((а), (б)), $\mu^+\mu^-$ ((в), (г)), $\tau^+\tau^-$ ((д), (е)). Чёрными линиями показан используемый фон.

настоящий пик плотности в центре Галактики, при этом верхняя оценка для плотности в этой области совпадает (или почти совпадает, в зависимости от массы) с нижней оценкой. Другими словами, оказывается, что мы не можем перераспределить источники из этой области не испортив χ^2 сильнее чем нужно. Также заметим, что плотность в этой области наибольшая

и это стоит учесть.

Дело в том, что далее, как и в предыдущей части, мы выделяем из общего решения конкретный профиль, накладывая условие того, чтобы максимальная плотность в профиле была минимально возможной (Рисунок 20). Однако в случае аннигиляции по e^+e^- каналу, по оговоренным выше причинам, максимальная плотность будет одной и той же при любом выборе параметров α_i – это плотность в центральной области. То есть наложенное нами условие в этом случае не фиксирует единственного решения, по этой причине, в этом конкретном случае центральная область была выведена из рассмотрения. На Рисунке 20(а) приведён профиль, имеющий минимально возможную максимальную плотность, не считая плотности в центральной области.

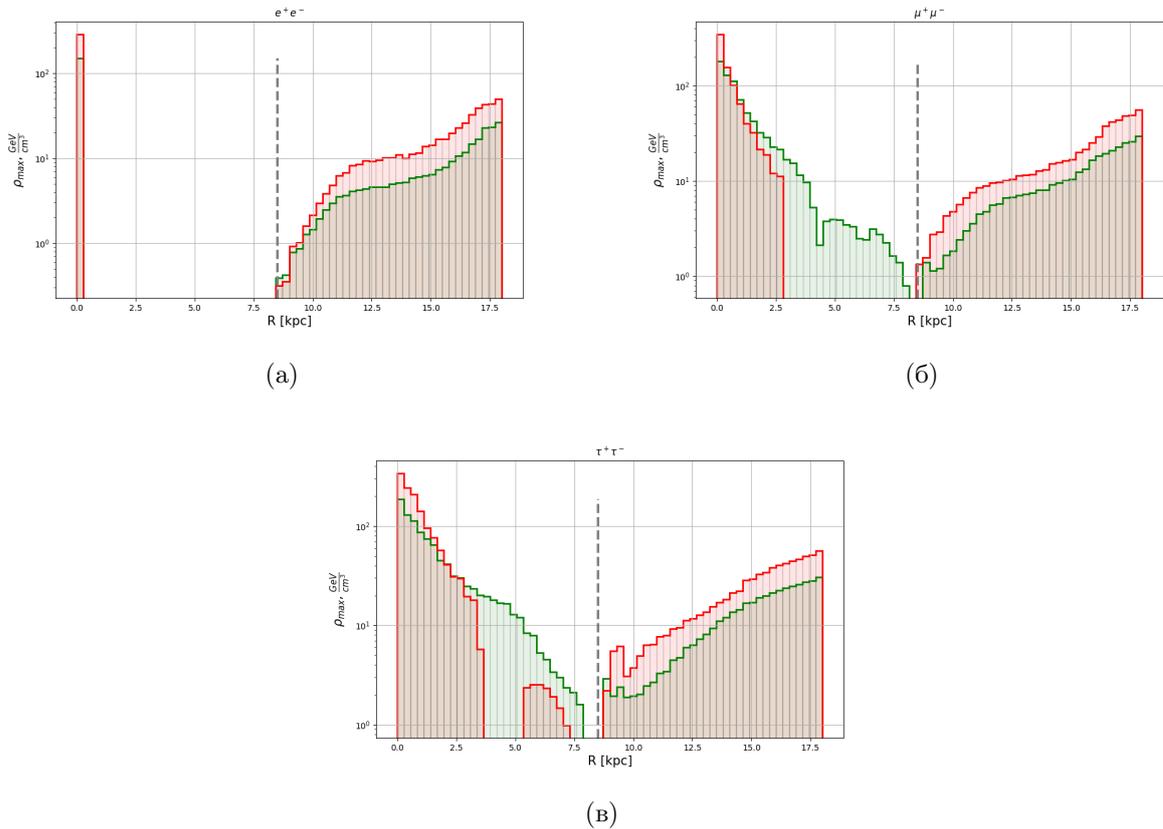


Рисунок 19 — Оценка сверху на плотность источников. Зелёным показаны результаты для аннигиляции частиц массой 500 ГэВ, красным - 1000 ГэВ по каналам e^+e^- (а), $\mu^+\mu^-$ (б), $\tau^+\tau^-$ (в).

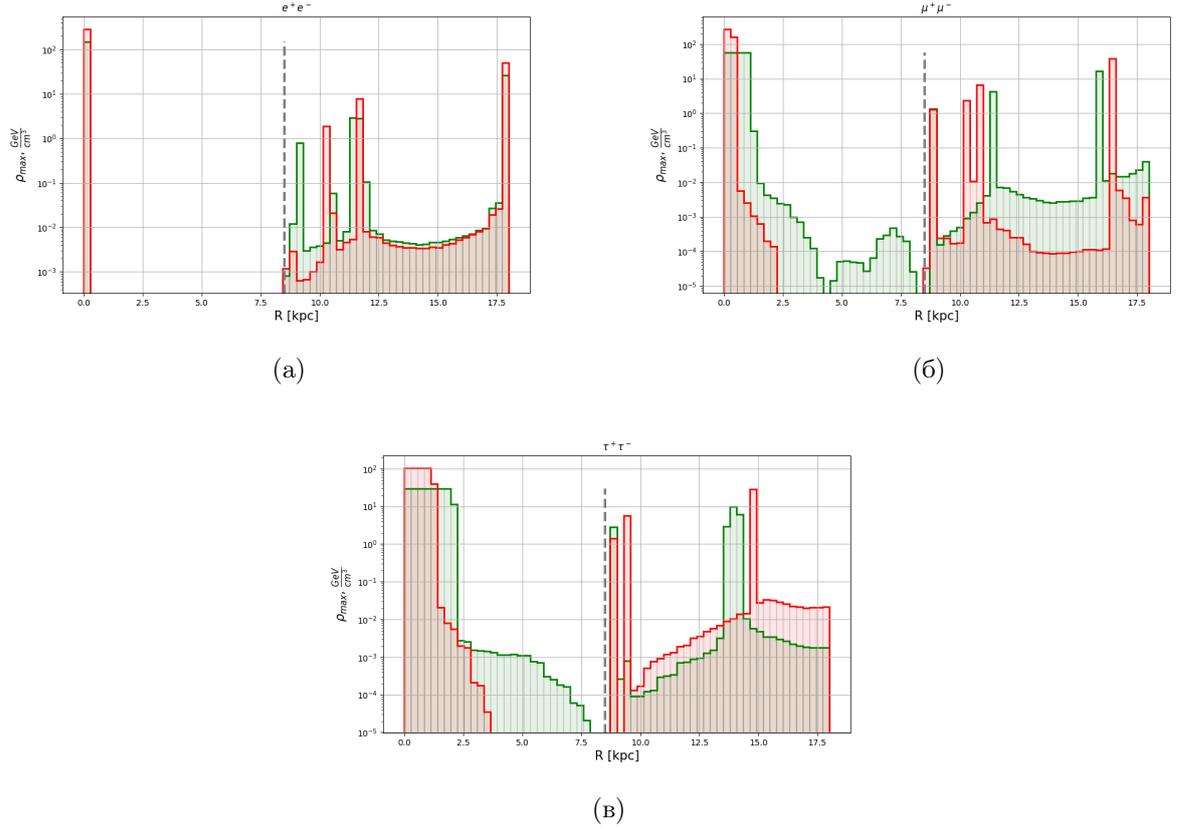


Рисунок 20 — Профиль плотности получаемый при наложении условия минимальности максимальной плотности. Зелёным показаны результаты для аннигиляции частиц массой 500 ГэВ, красным - 1000 ГэВ по каналам e^+e^- (а), $\mu^+\mu^-$ (б), $\tau^+\tau^-$ (в). В случае (а), при наложении указанного условия, ближайшая к центру область исключена из рассмотрения.

4.3. МОДЕЛЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ

Следующим шагом разумно перейти к рассмотрению объёмного центрально - симметричного профиля. В этой части рассматривалась область с радиусом в пределах $r \in [0 \text{ кпк}, 18 \text{ кпк}]$ вокруг Галактического центра, имеющая высоту в пределах $z \in [-3 \text{ кпк}; 3 \text{ кпк}]$.

В первую очередь стоит обсудить случай аннигиляции по e^+e^- каналу. Производилось разбиение как вдоль оси r , так и вдоль оси z на $16 \times 8 = 128$ колец шириной $\Delta r = 1.125 \text{ кпк}$ и высотой $\Delta z = 0.75 \text{ кпк}$. На рисунке, аналогично предыдущим частям, приведены множества получаемых спектров позитронного и гамма-излучения, а также полученная оценка сверху на плотность источников. В качестве примера приведены

результаты для аннигиляции частиц массой 1800 ГэВ (Рисунки 21 и 22).

Видно, что при выборе небольшого значения $\Delta\chi^2$ источниками заполняются только ближайšie к плоскости Галактики кольца, что позволяет уменьшить регистрируемое гамма-излучение, и только при увеличении параметра $\Delta\chi^2$ становится возможным перераспределение плотности дальше от плоскости Галактики. При этом получаемые результаты полностью переходят в результаты, полученные в предыдущей части (Рисунок 19 (а)).

Не ставя никаких ограничений на высоту профиля, мы вновь получаем плоский профиль. Таким образом расчёт показывает, что проводимое в предыдущих частях рассмотрение не лишено оснований.

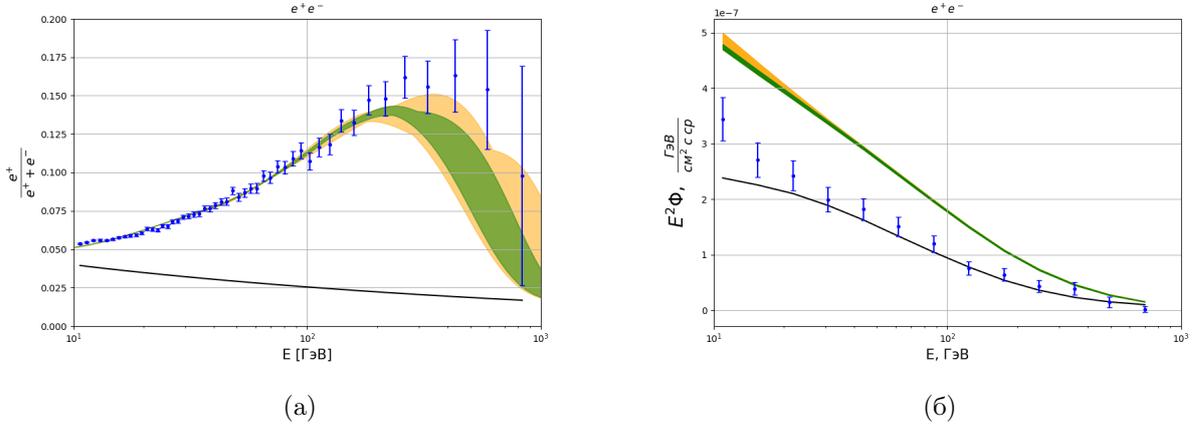
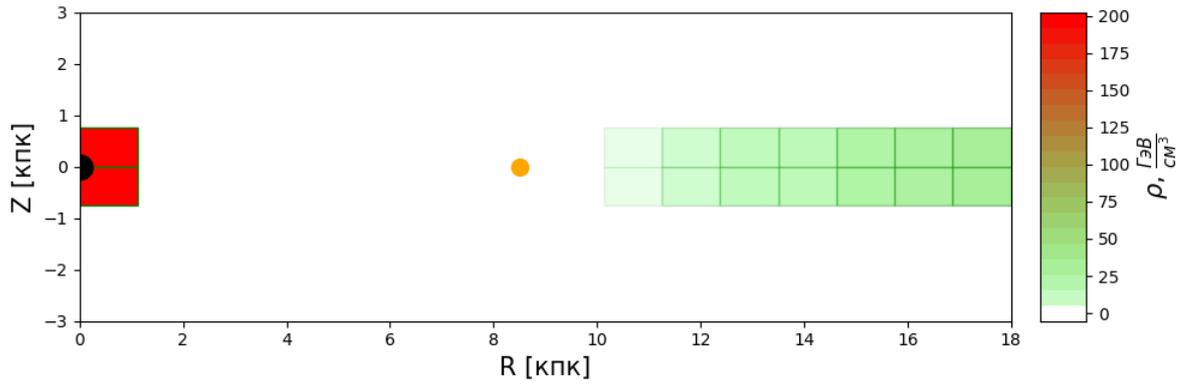


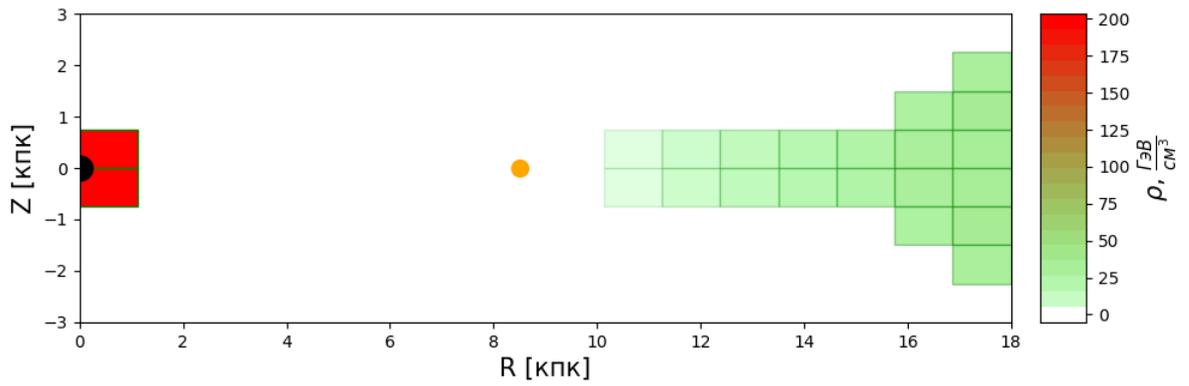
Рисунок 21 — Совокупность потоков позитронов (а) и γ -излучения (б) для всех возможных значений параметров α_i в сравнении с данными AMS-02 и Fermi-LAT соответственно. Зелёные области соответствуют выбору $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ равным 2%, оранжевые области - 8%, чёрными линиями показан используемый фон. Случай аннигиляции по e^+e^- каналу.

Более существенные различия наблюдаются в случае аннигиляции по $\mu^+\mu^-$ и $\tau^+\tau^-$ каналам. На Рисунке 23 для примера приведены результаты, полученные для $\mu^+\mu^-$ канала и массы частицы 1800 ГэВ при $\Delta\chi^2$, составляющем 8% от $\chi_{min}^2 = 2.25$. В этом случае для получения более читаемых результатов использовалось грубое разбиение с последующей детализацией по методу, описанному в части 1.3.

При детализации область с высокой плотностью сжимается к центру Галактики, а основным фактором, ограничивающим распределение дальних от центра источников, в этом случае является их попадание или не попадание в область, соответствующую данным IGRB эксперимента Fermi-



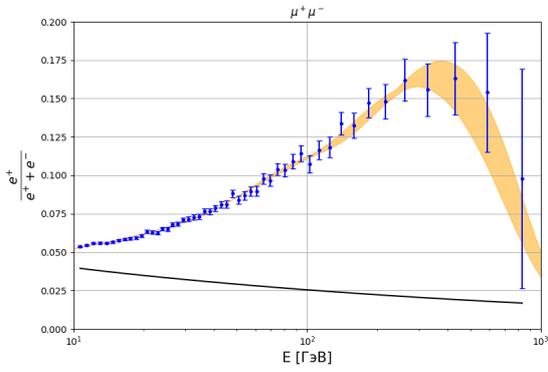
(а)



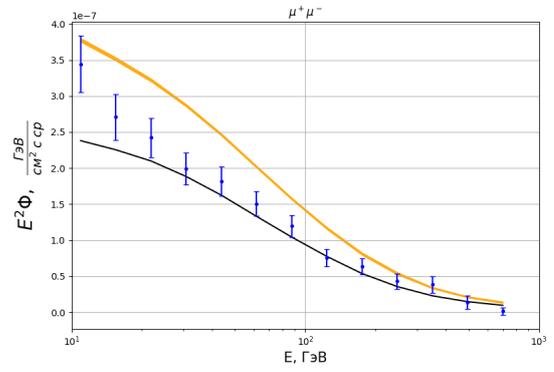
(б)

Рисунок 22 — Верхняя оценка на плотность источников получаемая при выборе параметра $\Delta\chi^2/\chi_{min}^2$ равным 2% (а) и 8% (б). Случай аннигиляции по e^+e^- каналу.

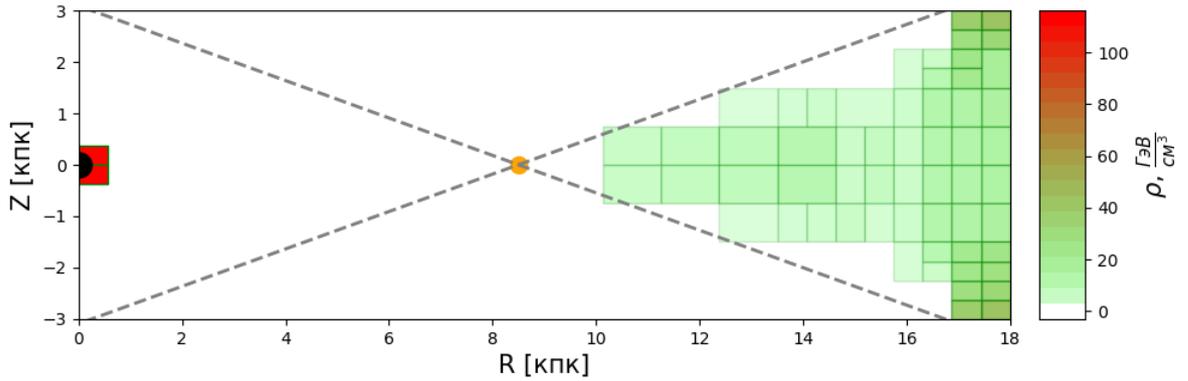
LAT (область для которой угол с галактическим горизонтом составляет $\theta > 20^\circ$, показанная на Рисунке 23(в) серыми пунктирными линиями).



(а)



(б)



(в)

Рисунок 23 — Совокупность потоков позитронов (а) и γ -излучения (б) для всех возможных значений параметров α_i в сравнении с данными AMS-02 и Fermi-LAT соответственно (оранжевые области). Чёрными линиями показан используемый фон. А также полученная верхняя оценка на плотность источников (в). Случай аннигиляции по $\mu^+\mu^-$ каналу.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена поиску пространственного распределения источников излучения для объяснения избытка позитронов в космических лучах.

В качестве источников рассматривались гипотетические частицы нестабильной скрытой массы (тёмной материи), способные аннигилировать с образованием позитронов в конечном состоянии по e^+e^- , $\mu^+\mu^-$ и $\tau^+\tau^-$ каналам с фиксированными относительными вероятностями.

Были предложены математические методы поиска оптимального пространственного распределения источников (плотности скрытой массы):

- применен метод линейной алгебры для поиска оптимального профиля плотности с использованием разработанного адаптивного разбиения объёма Галактики;
- предложен алгоритм поиска совокупности решений, лежащих в выбранном диапазоне $\Delta\chi^2$. Продемонстрирован выбор единственного решения с использованием тестовых условий.

В ходе работы были рассмотрены случаи произвольного распределения источников в плоскости Галактики и центрально-симметричного распределения: плоского и объёмного. Рассмотрены различные массы аннигилирующих частиц. Во всех случаях были получены численные оценки плотности источников при условии описания экспериментальных данных с желаемой точностью.

Планы. Обсуждение.

Данная работа показывает, что использование частиц скрытой массы в качестве источника излучения не только позволяет с хорошей точностью описать позитронную аномалию, но и оставляет некоторый произвол в выборе начальных параметров и самой формы распределения. Поэтому дальнейшая работа нуждается скорее в поиске новых ограничений, чем во введении новых допущений. Так, например, при рассмотрении общего

решения для распределения источников в параметризованном виде различные условия, наложение которых позволяет выделить конкретное частное решение, приводились в данной работе скорее в качестве примера. Поиск таких условий - задача дальнейшей работы, решение которой не следует из рассмотренных данных и требует анализа других физических аспектов явления.

Помимо этого в дальнейшем планируется исправить недочёты в самой методологии работы. Так, например, слабым местом рассматриваемых в работе моделей являлось наличие нефизического параметра $\Delta\chi^2$, значение которого, не считая некоторых нестрогих оценок, выбиралось вручную. Разумеется, в дальнейшем необходимо сделать эту величину математически определённой.

Открытым также остаётся методологический вопрос о том, можно ли в контексте данной работы ввести величину числа степеней свободы для рассматриваемых моделей. В работе рассматривались задачи линейной алгебры минимизирующие величину, которая совпадает с известной формулой для χ^2 , однако в данном случае величина эта не наделялась привычным смыслом и не рассматривалась с точки зрения оценки статистической значимости, а обозначение χ^2 использовалось скорее для удобства. В дальнейшем планируется определиться с тем, что именно следует считать числом степеней свободы в этой работе, и потенциально перейти к более грамотному анализу моделей с точки зрения статистики.

Также в дальнейшем планируется включить в рассмотрение больше актуальных экспериментальных данных. Например, наложить ограничения на гамма-излучения из области Галактического центра.

В работе рассматривались различные массы частиц и различные каналы аннигиляции, однако выбор этих параметров во многом был произволен, а полученные результаты приводились скорее для иллюстрации используемого подхода. В дальнейшем также планируется с опорой на разработанные методы провести анализ зависимостей между значениями этих параметров и получаемыми результатами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Adriani O.* [et al.]. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100 GeV // *Nature*. — 2009. — Vol. 458. — P. 607–609. — arXiv: [0810.4995 \[astro-ph\]](#).
2. *Aguilar M.* [et al.]. First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5–350 GeV // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110, issue 14. — P. 141102.
3. *Cao J.* [et al.]. Scalar dark matter explanation of the DAMPE data in the minimal Left-Right symmetric model // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 063016. — arXiv: [1712.05351 \[hep-ph\]](#).
4. *Jin H.-B.* [et al.]. Dark matter explanation of the cosmic ray e^+e^- spectrum excess and peak feature observed by the DAMPE experiment // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 12. — P. 123008. — arXiv: [1712.00362 \[astro-ph.HE\]](#).
5. *Belotsky K.* [et al.]. The DAMPE excess and gamma-ray constraints // *Phys. Dark Univ.* — 2019. — Vol. 26. — P. 100333. — arXiv: [1904.02456 \[astro-ph.HE\]](#).
6. *Belotsky K.* [et al.]. Fermi-LAT kills dark matter interpretations of AMS-02 data. Or not? // *JCAP*. — 2017. — Vol. 01. — P. 021. — arXiv: [1606.01271 \[astro-ph.HE\]](#).
7. *Alekseev V. V.* [et al.]. High-energy cosmic antiparticle excess vs. isotropic gamma-ray background problem in decaying dark matter Universe // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 675, no. 1. — P. 012023.
8. *Ackermann M.* [et al.]. The spectrum of isotropic diffuse gamma-ray emission between 100 MeV and 820 GeV // *Astrophys. J.* — 2015. — Vol. 799. — P. 86. — arXiv: [1410.3696 \[astro-ph.HE\]](#).

9. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Soloviyov M. L.* Development of dark disk model of positron anomaly origin // Int. J. Mod. Phys. D. — 2018. — Vol. 27, no. 06. — P. 1841010. — arXiv: [1802.04678](#) [[astro-ph.HE](#)].
10. GALPROP — The GALPROP code for cosmicray transport and diffuse emission production.
11. *Sjostrand T., Mrenna S., Skands P. Z.* PYTHIA 6.4 Physics and Manual // JHEP. — 2006. — Vol. 05. — P. 026. — arXiv: [hep-ph/0603175](#).
12. *Ibarra A., Tran D., Weniger C.* Decaying dark matter in light of the PAMELA and Fermi LAT data // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2010. — Vol. 1. — P. 009. — arXiv: [0906.1571](#) [[hep-ph](#)].
13. *Di Mauro M.* The origin of the Fermi-LAT γ -ray background // Proceedings, 14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG14) (In 4 Volumes): Rome, Italy, July 12-18, 2015. Vol. 3. — 2017. — P. 3098–3104. — arXiv: [1601.04323](#) [[astro-ph.HE](#)].
14. *Bro R., De Jong S.* A fast non-negativity-constrained least squares algorithm // Journal of Chemometrics. — 1997. — Vol. 11, no. 5. — P. 393–401.
15. *Yang F., Su M., Zhao Y.* Dark Matter Annihilation from Nearby Ultra-compact Micro Halos to Explain the Tentative Excess at 1.4 TeV in DAMPE data. — 2017. — arXiv: [1712.01724](#) [[astro-ph.HE](#)].