МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 539.173

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ КВАНТОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ ОСКОЛКОВ В ДЕЛЕНИИ ЯДЕР

Студент _____ С. Мико

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., проф. _____ А. Л. Барабанов

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

КВАНТОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ ОСКОЛКОВ В ДЕЛЕНИИ ЯДЕР

Студент	_____ С. Мико
Научный руководитель, д.ф.-м.н., проф.	_____ А. Л. Барабанов
Рецензент, к.ф.-м.н.	_____ В. И. Фурман
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **3**

1 Обзор литературы **5**

2 Теоретические основы **14**

2.1 Угловой момент в модель FREYA 14

2.2 Угловые моменты для ядра ^{252}Cf 15

3 Методика исследования **18**

3.1 Постановка проблемы 18

3.2 Об одновременной измеримости 19

3.3 Квантовое описание ядра 20

4 Результаты и обсуждение **22**

4.1 Распределение собственных спинов осколков 22

4.2 Распределение спиральности осколка 23

4.3 Распределение орбитального момента 24

4.4 Проверка полученных результатов 25

Заключение **28**

Приложение A. Вычисление коммутаторов **29**

Приложение B. Результаты Распределение спиральности **33**

Список использованных источников **35**

ВВЕДЕНИЕ

Исследование углового момента осколков деления имеет важное значение для понимания фундаментальных процессов, происходящих при ядерном делении. Угловой момент играет ключевую роль в характеристике состояний фрагментов деления и особенно влияет на процессы испускания гамма-квантов, которые сопровождают этот процесс. В последние годы наблюдается заметный рост интереса к данной проблематике. Это связано как с развитием вычислительных методов, так и с появлением новых экспериментальных данных, позволяющих более глубоко анализировать поведение осколков деления.

Целью данной работы является квантово-механическое рассмотрение задачи деления ядра с учётом принципа неопределённости Гейзенберга. Такой подход позволяет исследовать взаимосвязь между физическими величинами, которые не являются одновременно измеримыми.

Для достижения поставленной цели в ходе работы решаются следующие задачи:

- Рассмотреть ядро до деления с угловым моментом J и проанализировать его распад на два фрагмента с собственными спинами S_H и S_L а также с относительным орбитальным моментом L.
- Рассчитать коммутацию между операторами, соответствующими угловым моментам и их проекциям вдоль оси деформации.
- установить связь между величинами, которые не могут быть измерены одновременно

Объектом исследования является процесс деления ядер, с акцентом на квантово-механическое описание формирования угловых моментов при делении.

Предметом исследования является анализ орбитального углового момента и проекции спина осколков деления, а также распределений этих величин в процессе спонтанного деления ядра ^{252}Cf. В ходе исследования

была установлена зависимость между амплитудой вероятности обнаружения состояния фрагментов с орбитальным угловым моментом L и спиральностью K_1

Научная новизна работы заключается в подходе к исследованию деления ядер с позиции квантовой механики. В отличие от большинства существующих исследований, которые рассматривают деление с точки зрения классической физики

Практическая значимость работы заключается в углублённом понимании механизмов формирования угловых моментов при делении ядер. Полученные результаты могут способствовать улучшению точности существующих теоретических моделей деления ядер, а также применяться для повышения точности модели процессов деления в таких областях, как ядерная энергетика, ядерная безопасность и радиационная защита. Кроме того, результаты могут быть полезны для более точного моделирования распределений осколков и гамма-излучений, что имеет значительное значение для разработки новых методов в ядерной физике и в исследовании испускания гамма-квантов.

1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Для глубокого понимания механизмов образования углового момента в ядерном делении необходимо обратиться к существующей научной литературе, в которой рассматриваются как классические, так и квантово-механические подходы. Настоящий обзор охватывает ключевые работы, лежащие в основе современного понимания данного явления.

В статье Вильхелми Дж.Б. «Угловой момент первичных продуктов, образующихся при спонтаном делении ^{252}Cf», опубликованной в 1972 году [1], подчеркивается важность изучения угловых моментов осколков, поскольку они несут информацию о динамике процесса деления ядер.

Дальше во Введении перечисляются 3 способа, которыми ранее получали информацию о спинах осколков: (a) Угловые распределения гамма-квантов без определения энергии этих квантов. была обнаружена анизотропия с предпочтительным излучением на $10-15\%$ большего количества гамма-лучей в направлении деления относительно направления, перпендикулярного фрагментам.(b) Множественность гамма-квантов (гамма-квант, как и нейтрон, уносит 1-2 единицы углового момента $\hbar$, поэтому чем больше спин возбужденного осколка, тем больше квантов он испустит, чтобы перейти в состояние с низким угловым моментом) (c) Образование высокоспиновых осколков-изомеров

В этой статье впервые были осуществлены измерения угловых распределений гамма-квантов с определёнными энергиями, при этом было понятно, какие именно осколки испускают эти гамма-кванты. Также было определены величины углового момента первичных продуктов, образующихся при спонтаном делении ^{252}Cf, с использованием двух методов. Первый метод заключался в количественном сравнении интенсивностей внутриполосных переходов, наблюдаемых при делении, с теми, что сообщены в литературе для реакций с пучками, для которых распределение первичного углового момента было определено с помощью расчетов в оптической

модели. Второй метод основывался на простом статистическом модельном анализе распределения углового момента на протяжении испарения нейтронов и фазы переходов гамма-квантов перед достижением основного состояния в процессе девозбуждения.

Некоторые из выделенных выводов из анализа на основе статистической модели заключаются в следующем: (1) средний угловой момент продуктов составляет $S \approx 7 \pm 2\hbar$; (2) тяжелые продукты деления имеют на $\sim 20\%$ больший угловой момент, чем легкие продукты. Важно также отметить, что в этой статье цитируются две работы, в которых были приведены аргументы в пользу того, что осколки могут образовываться с большими спинами. Выполненные измерения это подтвердили, но не более того. Из полученных данных нельзя было сделать вывод, как именно формируются спины осколков и, в частности, почему они выстроены в плоскости, поперечной к оси деления.

В 2021 году в статье «Генерация углового момента при ядерном делении» авторства Дж. Н. Вилсона и др.[2] использована та же методика, что в [1], но получено больше данных. Это позволило авторам не только определить величину спинов осколков, но подвергнуть сомнению те механизмы образования спинов, которые выдвигались в ряде теоретических работ. Представлены современные экспериментальные результаты, проясняющие: (1) зависимость среднего спина от массы фрагмента,(2) корреляцию между спинами фрагментов. Авторы показывают, что: (i) отсутствует значительная корреляция между спинами парных фрагментов (что приводит к выводу о том, что угловой момент при делении генерируется “после”расщепления ядра — post-scission); (ii) средний спин сильно зависит от массы и варьируется по зигзагообразному распределению (см. рис. 1.1); (iii) не наблюдается заметной зависимости спина фрагмента от массы или заряда парного ядра, что подтверждает некоррелированную после разрывную природу механизма образования спина.

Авторы [2] утверждают, что в механизмах, ранее обсуждавщихся в теоретических работах, величины спинов легкого и тяжёлого осколков должны коррелировать друг с другом (чем выше один, тем выше другой). Но эксперимент как показано выше это не подтверждает. Таким образом, вопрос о механизме формирования спинов осколков является открытым.

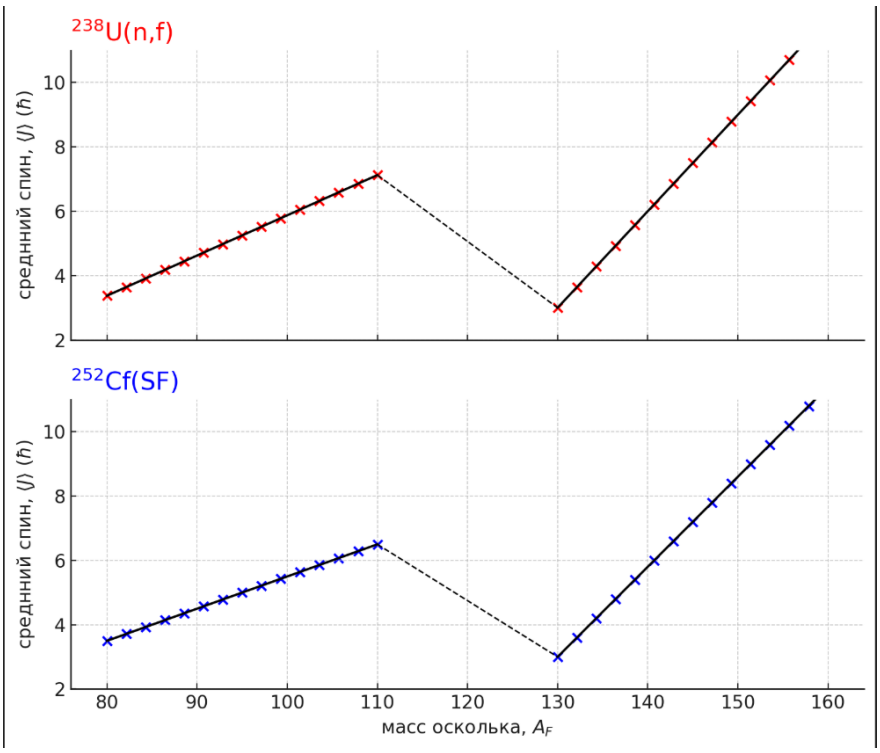

Рисунок 1.1 — Схематическая зависимость среднего спина чётно-четных фрагментов от их массы.

В этой работе авторы утверждают, что некоррелированное происхождение углового момента свидетельствует о том, что фрагменты становятся двумя независимыми квантовыми системами. Также важно отметить, что предполагается: угловые моменты в обоих фрагментах ориентированы в направлении, перпендикулярном к направлению движения фрагментов деления.

В работе «Angular Momentum bearing modes» авторства Морето Л.Г. в 1989 [3], которая цитируется в [2], продвигается идея о существовании коллективных мод “bending”, “wrigling”, “twisting” (а также “tilting”, однако этой моды нет, если полный спин системы равен нулю, как при спонтанном делении ^{252}Cf) вблизи точки разрыва ядра на осколки. Эти моды были впервые рассмотрены не этими авторами. Но эти авторы если не первыми, то одними из первых, стали продвигать мысль, что эти моды ответственны за формирование спинов осколков. И эта модель является очень популярной в силу своей наглядности.

В этой статье авторы описывают режимы следующим образом: изгибной “bending” режим заключается в вращении одного фрагмента вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии, и в соответствующем контрвраще-

нии другого. Скручивающий “twisting” режим заключается во вращении одного фрагмента вокруг оси симметрии и в соответствующем контрвращении другого. Этот режим не является вырожденным, как изгибной режим. Режим извивания “wriggling” несколько сложнее. Оба фрагмента вращаются вокруг параллельных осей, перпендикулярных оси симметрии, и одновременно контрвращаются друг относительно друга вокруг оси, параллельной осям вращения. Этот режим является двойным вырожденным.

В 2013 году ученые Р. Вогт и Дж. Рандруп в статье «Изучение наблюдаемых фотонов событие за событием в спонтанном и термическом делении» [4] впервые использовали предложенную ими самими модель FREYA (Fission Reaction Event Yield Algorithm), которая учитывает испускание гамма-квантов осколками. Для этого авторы включают в рассмотрение спины осколков, причём рассматривают их классически, как векторы угловых моментов, перпендикулярные оси деления. При таком рассмотрении они игнорируют моды “twisting” и “tilting” (в модели рассматриваются любые делящиеся ядра, в том числе со спином, отличным от нуля). В работе показано, что такая модель разумным образом воспроизводит множественность и спектры гамма-квантов, испускаемых осколками.

В работе «эффекты угловых моментов в делении» авторства Р. Вогт и Дж. Рандруп в 2021 [5], среди прочего, в модели FREYA вычислено распределение вероятности для угла между спинами осколков (рис.1.2). Это распределение указывает, что средний угол между осколками несколько выше 90 градусов. Именно на это обратили внимание авторы работы [6] и указали, что это расходится с их вычислениями.

В статье [6] авторы сразу заявляют об актуальности и нерешенности проблемы формирования угловых моментов осколков, начиная аннотацию словами: “The intrinsic spins and their correlations are the least understood characteristics of fission fragments from both theoretical and experimental points of view”. Они предлагают микроскопический подход к этой проблеме, основанный на использовании функционала плотности с явным учетом зависимости исследуемых величин от времени (Time-Dependent Density Functional Theory, TDDFT). В таком подходе автоматически учитываются все коллективные моды, “bending”, “wrigling”, “twisting” и “tilting”, без явного введения этих мод. Расчёты выпонены для делящихся слабо возбуждённых ядер ^{236}U

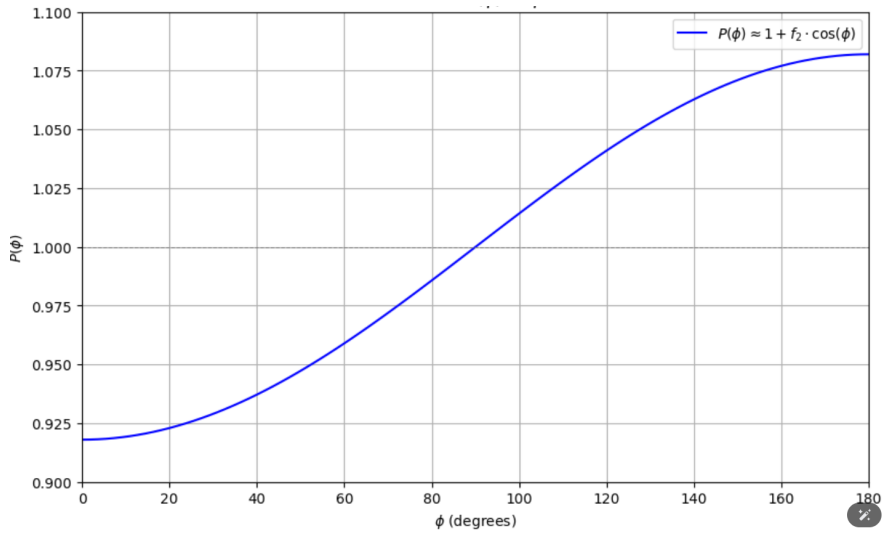

Рисунок 1.2 — Распределение угла между спинами двух основных фрагментов деления из ^{235}U. Показано приближение Фурье первого порядка, $P(\phi) = 1 + f_2 \cos\phi$. здесь $f_2 \approx -0.082$ [5].

и ^{240}Pu (такие делящиеся ядра образуются в реакциях $n+^{235}U$ и $n+^{239}Pu$ при относительно низких энергиях падающих нейтронов). Для ^{240}Pu выполнены также расчёты зависимости средних спинов легкого и тяжелого осколков в зависимости от энергии падающего нейтрона, достигающей максимального значения 25 МэВ (рис.1.3)

Проводится сравнение результатов с тем, что принимается или получается в модели FREYA. В целом всё довольно хорошо согласуется, но в некоторых пунктах возникают отличия: (1) здесь получено, что спины осколков преимущественно перпендикулярны друг другу (средний косинус угла между осколками близок к нулю), тогда как согласно FREYA, см. [5], спины преимущественно антипараллельны, чем параллельны, (2) в модели FREYA средние спины тяжелого и легкого осколка близки по величине, причём спин тяжелого осколка выше, чем спин легкого; здесь получено, что спины легких осколков заметно выше спинов тяжелых осколков (см. рис. 1.3), (3) здесь получено, что помимо мод “bending” и “wrigling” определенную роль в процессе формирования спинов осколков играют также “twisting” и “tilting”.

Несколько позже работы [6] в журнале PRC была опубликована статья [7]. Однако она цитируется в [6], так как в виде препринта появилась до выхода [6], и её содержание было известно авторам [6]. В этой работе также представлены результаты микроскопического расчёта, но другого,

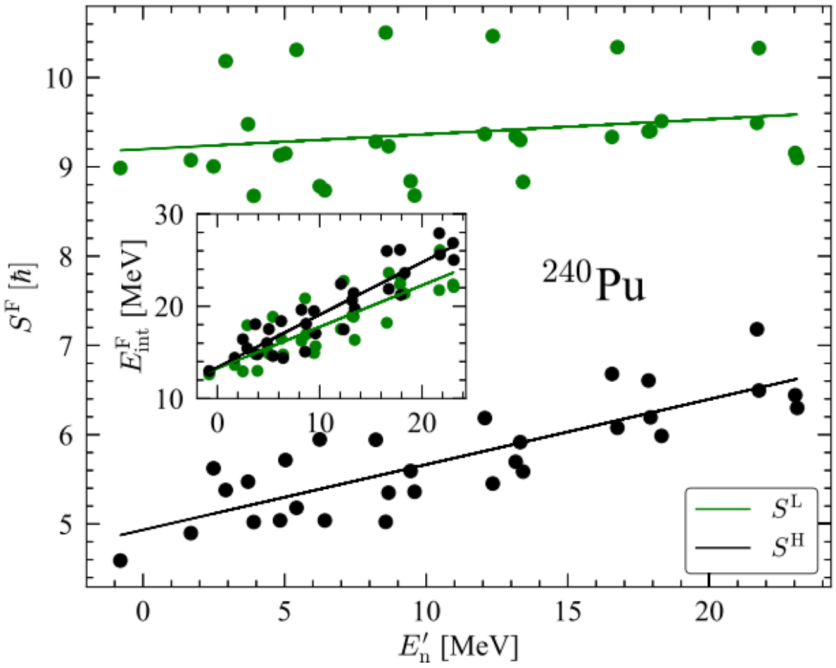

Рисунок 1.3 — Средние внутренние спины SL,H в зависимости от начальной энергии эквивалентных падающих нейтронов для осколков деления [6].

выполненного в рамках метода Хартри-Фока-Боголюбова (с использованием компьютерной программы HFBTHO, v3.00). В частности были вычислены спины формирующихся осколков. Кроме того, было показано, что подстановка результатов этих расчётов в модель FREYA позволяет улучшить описание наблюдаемых величин. Авторы статьи [6] отметили, что их результаты по величине спинов осколков согласуются с результатами данной работы.

В обсуждаемой статье расчеты выполнены для делящегося ядра ^{240}Pu, образующегося в реакции деления ядра ^{239}Pu тепловым нейтроном. Результаты вычислений спинов осколков представлены на Рис.1 в статье. Указано, что типичные спины наиболее вероятных по массам тяжелых осколков ($A_H : A_L \sim 136 : 104$) лежат в интервале (5-9)$\hbar$, тогда как спины соответствующих легких осколков – в интервале (10-13)$\hbar$; и это согласуется с [6]. Указано также, что эти выводы противоречат феноменологическим моделям типа FREYA, поскольку в них не учитываются эффекты, обусловленные структурой и деформацией делящихся ядер. Однако, как показано в статье [8] (см. ниже), введение такого учета в модель FREYA улучшает ситуацию.

В этой статье также высказаны сомнения, что экспериментальные ре-

зультаты, представленные в [2], однозначно свидетельствуют о “некоррелированном” механизме формирования спинов лёгкого и тяжелого осколков с ссылкой на отдельную публикацию [8] (см. ниже).

В статье [8] авторы приводят аргументы в пользу того, что результаты работы [2] согласуются с моделью FREYA, что Угловые моменты фрагментов деления некоррелированы. Тем не менее, они не согласны с выводом, что спины, следовательно, определяются только “после” разрыва. Авторы используют аргумент, что если вывод в [2] был правильным, то все режимы вращения, которые генерируют спины фрагментов до разрыва, будут заброшены.

В работе [9] впервые обсуждение спинов осколков дополняется обсуждением относительного орбитального момента осколков. В самом деле, сумма спинов и орбитального момента есть сохраняющаяся величина, равная спину делящегося ядра. Особенно интересен (в силу своей простоты) случай спонтанного деления (sf) ядра ^{252}Cf, спин которого равен нулю. В этой работе рассматривается как ^{252}Cf (sf), так и те же делящиеся ядра ^{236}U и ^{240}Pu, которые обсуждались в [6].

Авторы вычисляют вероятность $P(S_L, S_H, L)$ образования легкого и тяжелого осколков со спинами S_L и S_H с относительным орбитальным моментом L. На Рис. 1 и 2 в [9] представлены распределения вероятности, как по спинам, так и по орбитальному моменту, для трёх рассматриваемых делящих ядер. Распределения получаются плавными. Для $^{252} - Cf$ (sf) максимум распределения по L лежит вблизи $10\hbar$. На Рис. 4 в [9] представлено вычисленное для ^{252}Cf(sf) распределение для угла между спинами S_L и S_H (угол меняется от 0 до 180 градусов). В отличие от [6] здесь получается, что средний угол между осколками не 90 градусов, а 120 градусов (приблизительно). Но авторы это не обсуждают. Зато они указывают, что полученный вид распределения сильно отличается от того, который был получен по модели FREYA – см. рис.1 в работе [8] (а также рис.1 в [5]).

Статья [10] представляет собой расширенную версию работы [9]. Здесь рассматривается только простой случай ^{252}Cf(sf). И представлены несколько более подробно расчёты распределений по спинам осколков, относительному орбитальному моменту осколков, а также по углу между спинами осколков. Обсуждается возможность включения в формулы коэффициента

Клебша-Гордана, соответствующего сложению спинов S_L и S_H с нулевыми проекциями на ось разлета осколков (мы называем эти проекции спиральностями) в орбитальный момент L (его проекция на ось разлета есть нуль по определению).

В своей работе Булгак предлагает два типа распределений спина: равномерное распределение и статистическое распределение, основанное на теории модели ферми-газа Бете, которая пренебрегает квантовыми и оболочечными эффектами. Основываясь на предыдущем опыте, он продолжает работу, используя статистическое распределение (1.1). Затем он вносит незначительное изменение в распределение орбитального углового момента, чтобы обеспечить соблюдение закона сохранения углового момента. В результате он генерирует нормализованное объединённое распределение (1.2), которое сравнивает с объединёнными распределениями моделей FREYA и Т. Дёсинга [11].

$$P_1(S_{L,H}) \backsim (2S_{L,H}+1)\exp[-\frac{S_{L,H}(S_{L,H}+1)}{2\sigma^2_{L,H}}] \tag{1.1}$$

$$\bar{P}_3(S_L, S_H, L) \backsim NP_1(S_H)P_1(S_L)P_1(L)\Delta \tag{1.2}$$

где

$$\Delta = \Theta(\mathrm{L} - \mathrm{S}_L - \mathrm{S}_H)\Theta(|\mathrm{S}_H - \mathrm{S}_L| - \mathrm{L}) \tag{1.3}$$

причём $\Theta(x) = 1$ если $x \geqslant 0$ и $\Theta(x) = 0$ если $x < 0$ обеспечивая соблюдение закона сохранения углового момента.

В недавней работе «Пространственная ориентация внутренних спинов фрагментов деления и их корреляции» авторства Гийома С., Булгака А. и др.[12], была предложена пересмотренная тройная функция распределения, основанная на той же концепции. Новое тройное распределение значительно ближе к тому, что мы пытаемся достичь в данной работе. Оно построено на основе вероятностного распределения $P(S_{H,L}, K_{H,L})$ для внутреннего спина $S_{H,L}$ с проекцией $K_{H,L}$ на ось деления.

Тройное распределение, предложенное Т. Дёсингом на семинаре «Fission Fragment Angular Momenta», прошедшем в Сиэтле (США) 21–24 июня 2022 года, предполагало, что внутренние спины фрагментов, до испарения нейтронов и излучения гамма-квантов, строго перпендикулярны оси

деления. Это допускало только моды «изгиба» и «извивания» фрагментов деления (1.4). Подобные предположения использовались и в модели FREYA.

$$\tilde{P}_3(S_H, S_L, L) \backsim NP_1(S_H)P_1(S_H) \times [C^{L,0}_{S_H,0,S_L,0}]^2 \exp[-\frac{L(L+1)}{2I_{rel}T}] \qquad (1.4)$$

где I_{rel}, T есть относительный угловой момент и температура соответственно.

Впоследствии Т. Дёсинг и соавт. в статье «Угловой момент во фрагментах деления» [11] применили иной подход, основанный на теории плотности уровней. Его идея заключается в том, что угловой момент фрагментов деления генерируется за счёт возбуждения в момент разделения ядра (scission). Величина углового момента определяется энергией возбуждения и оболочечной структурой в плотности уровней. Авторы получили среднюю величину углового момента для ^{235}U, предполагая, что угловой момент фрагмента деления перпендикулярен оси деления. Была получена зигзагообразная зависимость среднего углового момента от массового числа, аналогичная той, что была получена в работе [2].

Из последних статей [9; 10] ясно видно, что их авторы не задаются вопросом о связи распределения по L с распределением по спиральности осколков K_L и K_H (в случае ^{252}Cf(sf) $K_H = -K_L$). Однако такая связь есть. Эта связь является предметом нашей работы. Впервые эта связь обсуждалась в работе [13]. Также важно отметить, что вопрос об некоммутативности в явной форме обсуждается в статье[14]. Этот вопрос в общей форме обсуждается в главе 15 в книге [15]. А основная наша формула (4.2) – это (15.13) из книги, где в случае спонтанного деления ядра ^{252}Cf: F=L, K=0, $K_1 = -K_2$.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

2.1 УГЛОВОЙ МОМЕНТ В МОДЕЛЬ FREYA

FREYA (Fission Reaction Event Yield Algorithm) является моделью Монте-Карло, способной быстро генерировать большие выборки полных событий деления, а именно полную кинематическую информацию для двух мгновенных ядер и всех мгновенных нейтронов и фотонов в каждом событии.[5]

На первой стадии нейтронно-индуцированного деления нейтрон с моментом p_0 сталкивается с ядром-мишенью. таким образом, нейтрон придает угловой момент $\rho \times p_0$, где ρ - прицельный параметр. Входящий нейтрон может вызвать испускание предравновесного нейтрона. Соответствующим образом уменьшаются массовое число, а также линейные и угловые моменты остаточной системы.Вторая стадия процесса деления – это эволюция предделительного составного ядра до двух хорошо разделенных и полностью ускоренных первичных фрагментов.

При достаточном возбуждении составное ядро может испарить один или несколько нейтронов до того, как произойдет деление. При каждом испарении FREYA уменьшает энергию возбуждения дочернего ядра и изменяет его линейный и угловой момент. В конце цепочки предделительного испарения мы приходим к делящемуся ядру с угловым моментом S_0, которое в целом переориентировано относительно $\rho \times p_0$.

При разрыве существуют три вектора углового момента: спины двух двуядерных партнеров S_L и S_H и их относительный угловой момент L. Поскольку система изолирована, их сумма сохраняется:

$$\mathbf{S_L} + \mathbf{S_H} + \mathbf{L} = \mathbf{S_0} \tag{2.1}$$

относительный орбитальный момент $\mathbf{L} = \mathbf{r_f} \times \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$–относительный

линейный момент.

Собственные спины осколков деления были предметом старых и обновленных экспериментальных и теоретических исследований. В 1960-х годах было высказано предположение, что возникающие осколки деления приобретают собственные спины благодаря существованию нескольких коллективных мод спина осколков деления: двойные вырожденные поперечные моды, извивающиеся и изгибающиеся, и продольные моды, закручивающиеся и наклоняющиеся. Происхождение относительного орбитального углового момента между фрагментами никогда не было выяснено в полностью микроскопической структуре.[9]

2.2 УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ ДЛЯ ЯДРА ^{252}CF

Рассмотрим чистый случай спонтанного деления ^{252}Cf из основного состояния со спином и четностью $S^{\pi} = 0^{+}$. три угловых момента удовлетворяют закону сохранения (2.2)

$$\mathbf{S_L} + \mathbf{S_H} + \mathbf{L} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

Осколки деления, будучи по своей природе несферическими, вращаются с собственными спинами $\mathbf{S_L}$ и $\mathbf{S_H}$, одновременно вращаясь как гантель вокруг общего центра масс с угловым моментом $\mathbf{L}$. До разрыва эти три угловых момента могут варьируются с учетом ограничений, ур.(2.2). После разрыва, когда обмен массой и энергией между возникающими осколками деления прекращается, эти угловые моменты перестают развиваться во времени.

Величины этих векторов угловых моментов удовлетворяют ограничению треугольника:

$$|S_H - S_L| \leq L \leq S_H + S_L \tag{2.3}$$

Допустимые угловые моменты $S_{L,R}$ и L находятся внутри трехгранной пи-

рамиды, определяемой плоскостями:

$$-L + S_H + S_L = 0 \tag{2.4}$$

$$S_H - S_L - L = 0 \tag{2.5}$$

$$S_L - S_H - L = 0 \tag{2.6}$$

Далее, Можно определить угол между собственными спинами осколков деления. Смотри рисунок 2.1

$$\phi_{LH} = \left\langle \arccos \frac{\mathbf{S}_L \cdot \mathbf{S}_H}{S_L S_H} \right\rangle \tag{2.7}$$

где скобки $\langle\ \rangle$ обозначают квантово-механическое математическое ожидание.

Поскольку все относительные степени свободы собственных спинов осколков деления — изгиб, колебание, скручивание и наклон — рассматриваются явно, настоящее исследование является более общим, чем микроскопическое рассмотрение, представленное в работах [5; 8] FREYA, где были явно учтены только режимы изгиба и колебания. Ограничимся сначала случаем спонтанного деления ^{252}Cf, для которого уравнение (2.2) выпольняется. В этом пределе три вектора лежат в одной плоскости, а $\mathbf{L}$ перпендикулярен направлению деления. На квантовомеханическом уровне только величина и одна декартова составляющая каждого угловой момент может иметь одновременно вполне определенные значения. Таким образом, квантовые флуктуации приводят к «флуктуациям» ориентация плоскости, образованной этими тремя векторами. До разрыва идентичность осколков деления не определена однозначно, так как материя, импульс, угловой момент и энергия текут между ними. Собственные спины и L осколков деления четко выражены только при достаточно большом расстоянии между осколками деления.

Остается решить критический вопрос: перпендикулярны ли собственные спины осколков деления $\mathbf{S}_H$ и $\mathbf{S}_L$ оси деления? В случае калифорния (^{252}Cf), ясно, что их сумма $\mathbf{S}_H + \mathbf{S}_L$ перпендикулярна оси деления. Однако этот конкретный аспект еще предстоит решить как экспериментально, так и теоретически. Эта неопределенность связана со значительными раз-

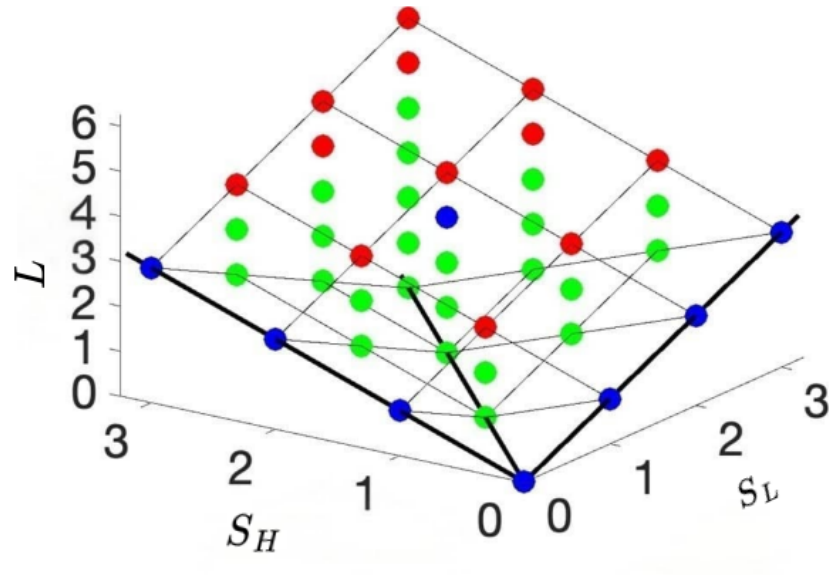

Рисунок 2.1 — На этом рисунке пули заполняют трехгранную пирамиду с вершиной (0, 0, 0). Зелеными маркерами показаны тройки (S_L, S_H, L) для которых $\cos\phi_{LH} < 0$, синими маркерами показаны значения для $\cos\phi_{LH} = 0$, а красными маркерами $\cos\phi_{LH} > 0$, когда $S_{max} = 3$ Зелёный маркеры соответствуют $\phi_{LH} > \frac{\pi}{2}$, а красные маркеры соответствуют $\phi_{LH} < \frac{\pi}{2}$. Соотношение красных и зеленых маркеров для любого значения S_{max} всегда близко к 0,5, а это означает, что количество конфигураций в котором точка собственного спина осколки в противоположном направлении является доминирующей. Черные линии – это пересечения пар плоскостей $(S_L = S_H, L = 0)$, $(S_L = L, S_H = 0)$, и они пересекаются в точке (0, 0, 0). Точки на каждой грани соединены тонкими линиями [10]

.

ногласиями между моделью FREYA и другими теоретическими концепциями. Пособытийная ориентация собственных спинов осколков деления имеет важные последствия, поскольку она будет влиять на направление испускания мгновенных нейтронов. Решение этого вопроса является одним из наиболее актуальных приоритетов будущих экспериментов.

3 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1 ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим распад ядра со спином J на две частицы (например, осколки деления) со спинами S_H и S_L (см. рис. 3.1). Выберем вдоль направления ориентации ядер ось z. Ось x направлена вдоль импульса $\mathbf{P_1}$ тяжёлого осколка (при этом в системе центра масс $\mathbf{P_2} = -\mathbf{P_1}$). Ось y выбрана так, что относительный радиус-вектор осколков $\mathbf{r_f} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ лежит в плоскости (x, y). Следовательно относительный орбитальный момент $\mathbf{L}$ направлен вдоль оси z. Польный угловой момент $\mathbf{s_0}$ делящегося ядра переходить в сумму орбитального момента $\mathbf{L}$ и суммарного спина осколков $\mathbf{F} = \mathbf{S_L} + \mathbf{S_H}$. Проекция спина $\mathbf{J}$ на ось деформации есть $\mathbf{K}$ (a), тогда как k есть суммарная спиральность двух осколков.

Угловой момент играет важную роль в ядерном делении, особенно в понимании испускании гамма кванты. Когда происходит деление, фрагменты находятся в возбужденном состоянии и освобождают энергию возбуждения, испуская 0-2 нейтрона и 1-3 гамма кванты, каждый из которых несет около 2 единиц углового момента. Спонтанное деление ^{252}Cf, которое начинается с нулевым угловым моментом, вызывает вопросы о внутреннем генерировании 5-7 единиц углового момента в каждом фрагменте.

В квантовой механике важно понимать ограничения одновременного измерения физических величин, такие как принцип неопределенности Гейзенберга, который гласит, что точное измерение одной величины ограничивает точность другой. Наша цель состоит в квантово механическом рассмотрении задачи с учётом принципа неопределённости Гейзенберга и установление связи между величинами, которые не являются одновременно измеримыми.

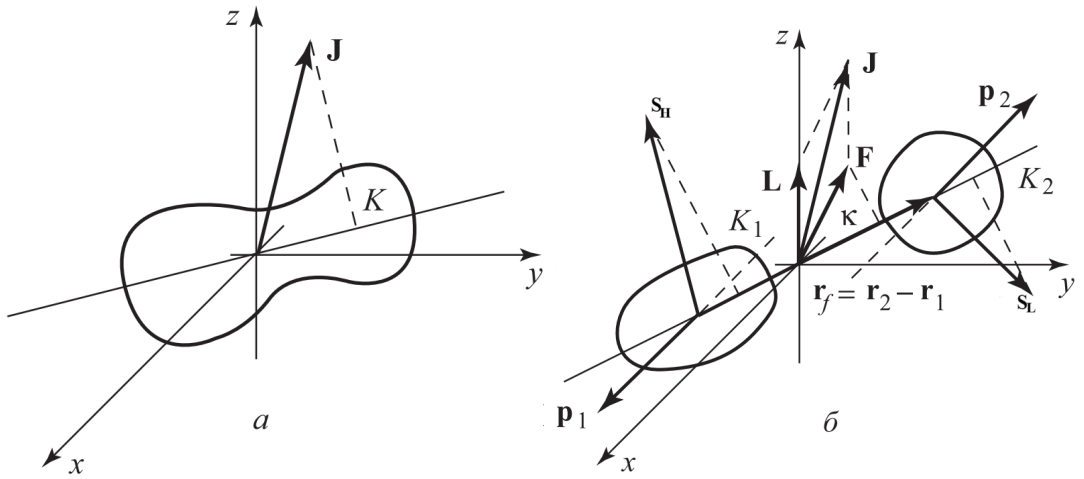

Рисунок 3.1 — Схема сложения угловых моментов в делении [15]: до деления (а) и после деления (б).

3.2 ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ИЗМЕРИМОСТИ

Наша задача включает в себя анализ распределения вероятностей в разных представлениях, т.е нахождение набор коммутирующих операторов. Следовательно, мы заинтересованы в изучении коммутационных соотношений между следующими операторами:
$\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{F}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{L}}^2, \hat{K}, \hat{K}_1, \hat{K}_2$

$[\cdot,\cdot]$	$\hat{\vec{S}}_H^2$	$\hat{\vec{S}}_L^2$	$\hat{\vec{J}}^2$	$\hat{\vec{F}}^2$	$\hat{J}_z$	$\hat{\vec{L}}^2$	$\hat{K}$	$\hat{K}_1$	$\hat{K}_2$
$\hat{\vec{S}}_H^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{\vec{S}}_L^2$		0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{\vec{J}}^2$			0	0	0	0	0	0	0
$\hat{\vec{F}}^2$				0	0	0	0	×	×
$\hat{J}_z$					0	0	0	0	0
$\hat{\vec{L}}^2$						0	×	×	×
$\hat{K}$							0	0	0
$\hat{K}_1$								0	0
$\hat{K}_2$									0

Таблица 3.1 — Коммутации между операторами. Знак × означает не коммутация между соответствующими операторааами.

Поскольку коммутатор антисимметричен, т.е. выполняется равенство $[A, B] = -[B, A]$ то, достаточно рассмотреть только верхнюю (над диаго-

налью) часть таблицы 3.1. Зная элементы верхнего треугольника таблицы, легко восстановить все оставшиеся элементы. Подробные вычисления соответствующих коммутаторов приведены на страницах приложения.

Таким образом существует 3 наиболее важных набора коммутирующих операторов и соответствующих им собственных векторов:

$$\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{F}}^2, \hat{K} \qquad |J, J_z, S_H, S_L, F, K\rangle \tag{3.1}$$

$$\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{F}}^2, \hat{\vec{L}}^2 \qquad |J, J_z, S_H, S_L, F, L\rangle \tag{3.2}$$

$$\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2, \hat{K}_1, \hat{K}_2 \qquad |J, J_z, S_H, S_L, K_1, K_2\rangle \tag{3.3}$$

Эти наборы полностью определяют состояние системы. В зависимости от задачи исследования можно пользоватся наиболее подходящим представлением..

3.3 КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ ЯДРА

Состояние частицы с проекцией углового момента (спина) J на ось z описывается функцией ψ_{JM}. тогда чистое спиновое состояние описывается суперпозицией:

$$\Psi_J = \sum_M a_M(J)\psi_{JM} \tag{3.4}$$

при этом $|a_M(J)|^2$ есть вероятность того, что проекция спина J на ось z равна M. Условие нормировки имеет вид:

$$\sum_M |a_M(J)|^2 = 1. \tag{3.5}$$

Волновая функция сильно деформированного ядра на барьере имеет следующий вид [15]:

$$\Psi_J \backsim \sum_M a_M(J) \sum_k g^{JK} \Phi_K(\tau) \mathcal{D}^J_{MK}(\omega) \tag{3.6}$$

Где K – проекция спина J на ось деформации(см. рис. 3.1), $\Phi_K(\tau)$ – волнвая функция внутреннего движения ядра в системе отчёта, жёстко связанной с осью деформации (В этой системе отчёта число K есть интеграл движения

в силу аксиальной симметрии системы), вектор ω указывает направление оси деформации. Амплитуды g^{JK} задают распределение по числу K. Условие нормировки для амплитуд принимает вид:

$$\sum_K |g^{JK}|^2 = 1 \tag{3.7}$$

4 РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

4.1 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ СПИНОВ ОСКОЛКОВ

В рамках настоящей работы распределения собственных спинов осколков не рассчитывались напрямую. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем придерживаться существующих предположений, основанных на модели ферми-газа, согласно которым форма распределения определяется уравнением (1.1). см. рис. 4.1.

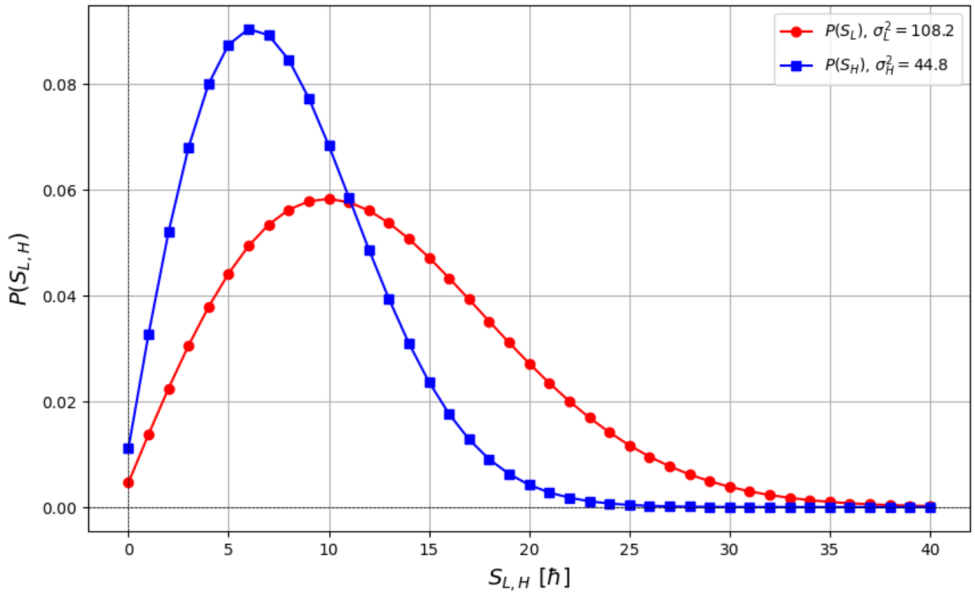

Рисунок 4.1 — Распределение вероятностей$P(S_{L,H})$ собственных спинов, полученное при выборе параметра $\sigma^2_{L,H} = [108.2, 44.8]$ соответственно. Параметры $\sigma^2_{L,H}$ выбираются так, чтобы примерно воспроизводить соответствующие собственное спиновые распределения фрагментов, определенные в микроскопических симуляциях в работе [9]

Следует отметить, что разработка более строгого подхода к определению распределений собственных моментов, например, с учетом квантово-механических эффектов и ограничений, наложенных принципом неопреде-

ленности, представляет собой важную задачу для будущих исследований.

4.2 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПИРАЛЬНОСТИ ОСКОЛКА

Экспериментальные данные показывают, что фрагменты деления в среднем имеют спины с величинами от $5\hbar$ до $7\hbar$ см. рис.1.1, ориентированные примерно перпендикулярно оси деления. Это наблюдение подразумевает, что проекция спина фрагмента деления вдоль оси деформации мала [2; 5].

При спонтанном делении ^{252}Cf проекция K углового момента $J = 0$ на ось деления (ось симметрии) равна нулю.

Проекция спина осколка на ось деления предполагается малой, это происходит потому что для каждого полного спина S вращательная энергия деформированного осколка минимальна при $K = 0$ [16]. Поскольку плотность уровней $\rho(K)$ экспоненциально чувствительна к энергии возбуждения, конфигурации с малыми K статистически гораздо более вероятны. В частности, большие значения K соответствуют высокому вращательному энергетическому штрафу, что приводит к меньшей плотности доступных квантовых состояний. В результате, во время деления, осколки преимущественно образуются через состояния с малыми K. При $K \approx 0$ вектор углового момента лежит преимущественно в плоскости, перпендикулярной оси деления. Интегрирование по всем возможным направлениям приводит к преимущественному вылету осколков вдоль исходной оси деления, а не в поперечном направлении.

Предлагается узкое распределение $P(K_1)$ спиральности для фрагментов деления.(принято $S_H = 6\hbar$ и $S_L = 5\hbar$)

$$P(K_1) \backsim \exp\left(-\frac{K_1^2}{2\sigma_{K_1}^2}\right) \tag{4.1}$$

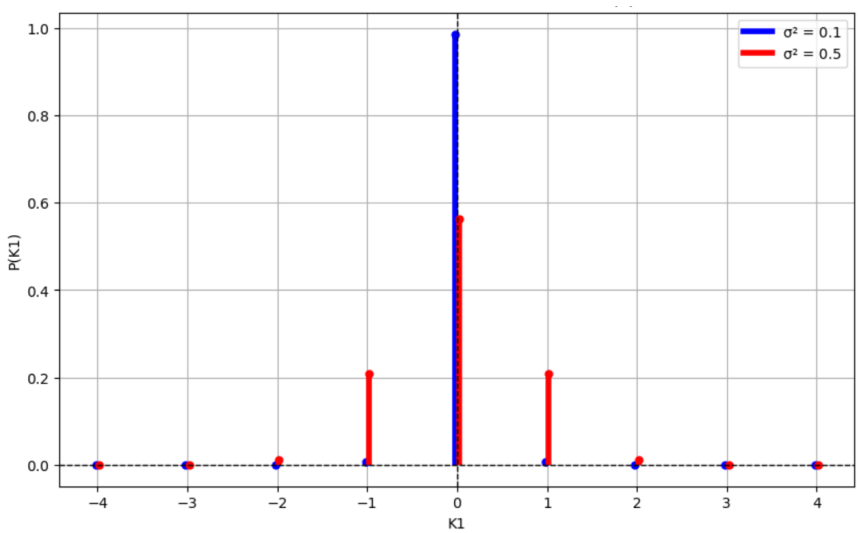

Рисунок 4.2 — Распределение вероятностей $P(K_1)$ спиральности, полученное при выборе параметра $\sigma_1^2 = [0.1, 0.5]$.

4.3 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА

Полученным выше 3 набором состояний (см. уравнения 3.1,3.2,3.3) соответствуют три набора амплитуд $g^\alpha(LF)$, $g^\alpha(K_1K_2)$ и $g^\alpha(FK)$ [15]. Нас интересуют только соотношения между двумя последними.

$$g^\alpha(FK) = \sum_{K_1K_2} \mathrm{C}^{FK}_{J_1K_1J_2K_2} g^\alpha(K_1K_2) \tag{4.2}$$

$$g^\alpha(K_1K_2) = \sum_{FK} \mathrm{C}^{FK}_{J_1K_1J_2K_2} g^\alpha(FK) \tag{4.3}$$

Здесь α – индекс, обозначающий все множество характеристик двух осколков, как зарядовые числа, число нуклонов, спины фрагментов, четности и энергия возбуждения $(Z_1, Z_2, N_1, N_2, S_H, S_L, \Pi_1, \Pi_2, E_1^*, E_2^*)$. Распределение вероятностей сумарного спина можно получить, взяв квадрат модуля амплитуды в уравнение (4.2)

В нашем исследовании мы будем анализировать распределение спиральности осколков спонтоного деления ^{252}Cf. В этом случае начальный спин $S_0 = 0$, а угловой момент $L = F$. Спиральности полученных фрагментов связаны уравнением $K_1 = -K_2$. Ядро с нулевым полным спином и проекцией подвергается делению, в результате чего образуются два фраг-

мента со спинами S_H и S_L, которые имеют проекции на оси деления, обозначенные как K_1 и K_2, соответственно (эти квантовые числа называют спиральностями). Квантовое состояние $|L0\rangle$ можно разложить в следующем виде:

$$\langle L0| = \sum_{K_1} \mathrm{C}^{L0}_{S_H K_1 S_L - K_1} \langle K_1, -K_1| \tag{4.4}$$

$$\langle L0|\Psi\rangle = \sum_{K_1} \mathrm{C}^{L0}_{S_H K_1 S_L - K_1} \langle K_1, -K_1|\Psi\rangle \tag{4.5}$$

Формулу (4.5) можно получить, положив $K = 0$ и $F = L$ в формуле (4.2). Это и есть связь между амплитудой обнаружения орбитального момента L и амплитудой обнаружения спиральности K_1 причем $K_2 = -K_1$. Взяв квадрат модулей этого выражения получится соответствуюшая связь между вероятностей.

$$P(L) = |\langle L, 0|\Psi\rangle|^2 = \sum_{K_1} \left(C^{L0}_{S_H K_1 S_L K_2}\right)^2 P(K_1) \tag{4.6}$$

Здесь учтено что, амплитуды $\langle L, 0|\Psi\rangle$ являются случайными комплексными величинами с ненаправленными фазами и статистической независимостью. В этом случае среднее значение перекрёстных(интерференционных) членов обнуляется, и остаётся только диагональная сумма. На рис 4.3 представлены результаты расчеты по формулам (4.6) и (4.1)

4.4 ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущих разделах были представлены результаты полученных распределений орбитального углового момента и спиральности осколка, образующегося при делении ^{252}Cf. На графике (см. рис.4.3) видно, что более вероятно орбитальный момент равной сумме спинов осколков. Это объясняется тем, что Разделение сопровождается преимущественно колебательными и изгибными вращательными режимами, которые способствуют накоплению углового момента, поэтому фрагменты деления приобретают угловые моменты, почти перпендикулярные направлению их относительного движения. Это приводит к возникновению значительного компенсирующе-

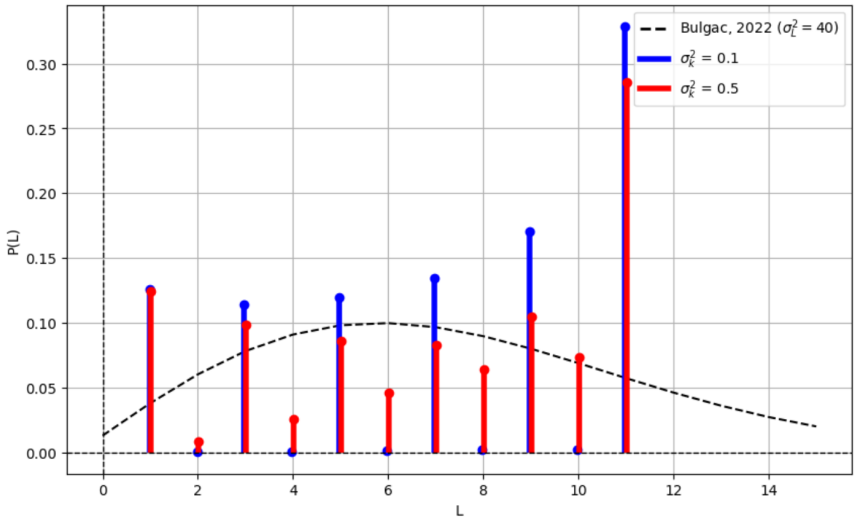

Рисунок 4.3 — Распределение вероятностей $P(L)$ по орбитальному моменту, полученное при выборе параметра $\sigma^2_{K_1} = \{0.1, 0.5\}$, спины фрагментов $S_L, H = [5\hbar, 6\hbar]$. Сравнение с результатами, полученными при использовании различных функционалов плотности [10].

го орбитального момента.

Для проверки согласованности полученных результатов предлагается провести обратный анализ: восстановить распределение проекций спина на ось деления (спиральность) на основе распределения орбитального момента. В данном подходе предполагается узкое гауссовское распределение вероятности $P(L)$(см. уравнение (4.7)) орбитального момента с пиком в точке $L = S_L + S_H$, что отражает физические механизмы накопления углового момента в процессе деления (см. рис. 4.4).

$$P(L) \backsim \exp\left(-\frac{(L-\mu)^2}{2\sigma_L^2}\right) \tag{4.7}$$

Распределение по спиральности осколка K_1 может быть получено взяв квадрат модуля выражения (4.3) с учётом того что, в случае спонтаного деления ^{252}Cf $K = 0$, $F = L$ и $K_2 = -K_1$.

Распределение по спиральности осколка K_1 представляет собой узкую, но не одно-пиковую структуру (Рис. 4.5). Хотя для деления ^{252}Cf можно было бы ожидать одиночный пик в распределении K_1, реальная картина отличается. Это связано с тем, что орбитальный момент L и проекция спина на ось деформации K_1 не являются одновременно измеримыми величинами в силу принципа неопределённости Гейзенберга. Следователь-

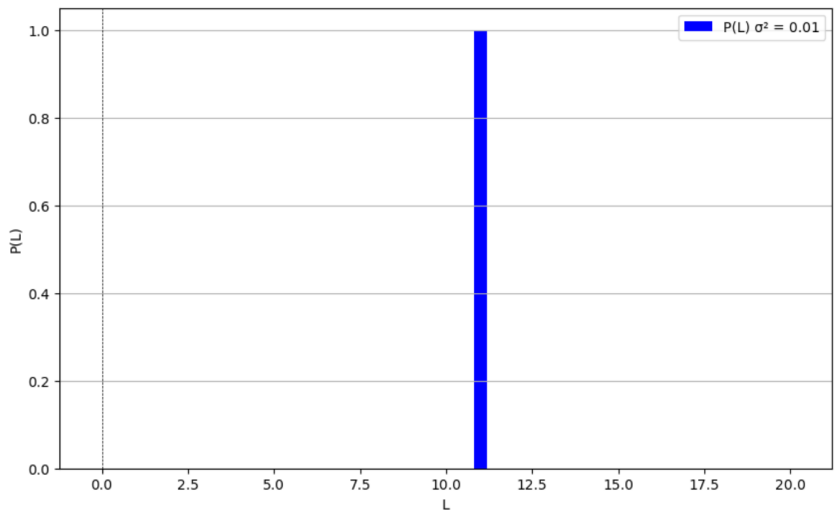

Рисунок 4.4 — узкое распределение P(L) орбитального момента с пиком при $L = S_L + S_H$. значения спина S_L и S_H равны $5\hbar$ и $6\hbar$ соответственно.

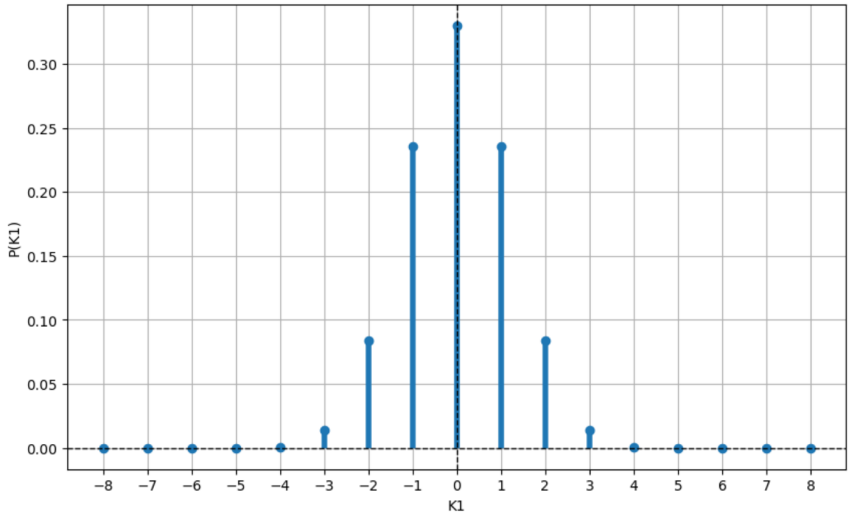

Рисунок 4.5 — Распределение P(K1) спиральности осколка деления

но, даже если орбитальный момент L задан в виде узкого одно-пикового распределения, распределение спиральности K_1 не может быть таким же. Наличие чётко выраженных максимумов одновременно в L и K_1 противоречило бы фундаментальным ограничениям квантовой механики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была рассмотрена проблема формирования угловых моментов осколков при делении ядер, с акцентом на квантовомеханические аспекты распределения орбитального момента.

Основные результаты можно сформулировать следующим образом:

- получено соотношение между амплитудами, вероятностями образования орбитальных моментов и спиральностей
- показано, что если распределение по спиральности является узким, то распределение по орбитальному моменту не будет гауссовским(противоречие с предложенным распределением углового момента в работе [9]).
- показано, что для получения узкого распределения спиральности фрагмента деления для случая ^{252}Cf распределение орбитального момента должно иметь значительный максимум при $L \approx S_H + S_L$.

Таким образом, проведённый анализ показал, что распределение орбитального углового момента осколков деления не является гауссовским, как это предполагается в ряде современных моделей, а имеет более сложную форму, определяемую квантовомеханическими свойствами системы. Эти результаты подчёркивают важность учёта квантовых эффектов при моделировании формирования углового момента в процессах деления.

В качестве перспективных направлений дальнейших исследований можно выделить следующие задачи:

- детальное изучение распределения углового момента на квантовомеханическом уровне, включая анализ спинов фрагментов деления.
- расширение анализа на другие делящиеся ядра, с отличным от нуля спином, что позволит проверить универсальность полученных выводов за пределами случая спонтанного деления.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОММУТАТОРОВ

Рассмотрим коммутацию между следующими операторами, соответствующими векторам, показанным на рис. 3.1:

$$\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{S}}_H, \hat{\vec{S}}_L, \hat{\vec{F}}, \hat{K}, \hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{\vec{L}}^2$$

Следующие коммутации будем считать известными и на их основе будем вычислять другие коммутации (имея в виду что $\hat{L}_k = -i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{r}_i\dfrac{\partial}{\partial\hat{r}_j}$)

$$\begin{aligned}
&[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k && [\hat{S}_{Hi}, \hat{L}_j] = 0\\
&[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k && [\hat{S}_{Hi}, \hat{S}_{Lj}] = 0\\
&[\hat{L}_i, \hat{r}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{r}_k && [\hat{S}_{Hi}, \hat{n}_j] = 0\\
&[\hat{S}_{Li}, \hat{n}_j] = 0 && [\hat{S}_{Li}, \hat{L}_j] = 0
\end{aligned}$$

Далее мы посчитаем коммутацию между заданными операторами

$$[\hat{J}_i, \hat{L}_j] = [\hat{S}_{Hi} + \hat{S}_{Li} + L_i, \hat{L}_j] = [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{A.1}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] = [\hat{S}_{Hi} + \hat{S}_{Li} + \hat{L}_i, \hat{S}_{Hj}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Hk} \tag{A.2}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{S}_{Lj}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Lk} \quad \textbf{(Аналогично } A.2\textbf{)} \tag{A.3}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{F}_j] = [\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] + [\hat{J}_i, \hat{S}_{Lj}] = i\hbar\varepsilon_{ijl}\hat{S}_{Hl} + i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Lk} \tag{A.4}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{F}_j] = [\hat{L}_i, \hat{S}_{Hj}] + [\hat{L}_i, \hat{S}_{Lj}] = 0 \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i, \hat{K}] &= [\hat{L}_i, \hat{J}_j\hat{n}_j] = \hat{J}_j[\hat{L}_i, \hat{n}_j] + [\hat{L}_i, \hat{J}_j]\hat{n}_j = \\
&= -i\hbar\varepsilon_{\alpha ji}\hat{n}_\alpha\hat{J}_j + i\hbar\varepsilon_{ij\beta}\hat{L}_\beta\hat{n}_j = -i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{n}_i\hat{F}_j
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{K}_1] = [\hat{L}_i, \hat{S}_{Hj}\hat{n}_j] = \hat{S}_{Hj}[\hat{L}_i, \hat{n}_j] + [\hat{L}_i, \hat{S}_{Hj}]\hat{n}_j = -i\hbar\varepsilon_{kji}\hat{n}_k\hat{S}_{Hj} \tag{A.7}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{K}_2] = \Big(\text{Аналогично } [\hat{L}_i, \hat{K}_1]\Big) = -i\hbar\varepsilon_{kji}\hat{n}_k\hat{S}_{Lj} \tag{A.8}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{K}] = [\hat{J}_i, \hat{J}_j \hat{n}_j] = \hat{J}_j [\hat{J}_i, \hat{n}_j] + [\hat{J}_i, \hat{J}_j] \hat{n}_j = \tag{A.9}$$

$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \hat{n}_j - i\hbar \hat{J}_j [\varepsilon_{\alpha\beta i} \hat{r}_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{r}_\beta}, \frac{\hat{r}_j}{\sqrt{r_\gamma^2}}] =$$

$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \hat{n}_j - i\hbar \hat{J}_j \varepsilon_{\alpha\beta i} \left(\frac{\hat{r}_\alpha}{\sqrt{r_\gamma^2}} \delta_{\beta j} - \hat{r}_\alpha \hat{r}_j \frac{\hat{r}_\beta}{r_\gamma^2 \sqrt{r_\gamma^2}} \right) =$$

$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \hat{n}_j - i\hbar \varepsilon_{\alpha ji} \hat{J}_j \hat{n}_\alpha = 0$$

$$[\hat{J}_i, \hat{K}_1] = [\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj} \hat{n}_j] = \hat{S}_{Hj} [\hat{J}_i, \hat{n}_j] + [\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] \hat{n}_j = \tag{A.10}$$

$$= \Big(\text{из предыдущей } [\hat{J}_m, \hat{n}_l] = [\hat{L}_m, \hat{n}_l] = -i\hbar \varepsilon_{\alpha lm} \hat{n}_\alpha \Big)$$

$$= -i\hbar \varepsilon_{\alpha ji} \hat{n}_\alpha \hat{S}_{Hj} + i\hbar \varepsilon_{ij\beta} \hat{S}_{H\beta} \hat{n}_j = 0$$

$$[\hat{J}_i, \hat{K}_2] = 0 \tag{A.11}$$

$$[\hat{S}_{Hi}, \hat{F}_j] = [\hat{S}_{Hi}, \hat{S}_{Hj}] + [\hat{S}_{Hi}, \hat{S}_{Lj}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Hk} \tag{A.12}$$

$$[\hat{S}_{Li}, \hat{F}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Lk} \tag{A.13}$$

$$[\hat{S}_{Hi}, \hat{K}] = [\hat{S}_{Hi}, \hat{J}_j \hat{n}_j] = \hat{J}_j [\hat{S}_{Hi}, \hat{n}_j] + [\hat{S}_{Hi}, \hat{J}_j] \hat{n}_j = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Hk} \hat{n}_j \tag{A.14}$$

$$[\hat{S}_{Hi}, \hat{K}_1] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Hk} \hat{n}_j \tag{A.15}$$

$$[\hat{S}_{Hi}, \hat{K}_2] = 0 \tag{A.16}$$

$$[\hat{S}_{Li}, \hat{K}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Lk} \hat{n}_j \tag{A.17}$$

$$[\hat{S}_{Li}, \hat{K}_1] = 0 \tag{A.18}$$

$$[\hat{S}_{Li}, \hat{K}_2] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_{Lk} \hat{n}_j \tag{A.19}$$

$$[\hat{F}_i, \hat{K}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \hat{F}_k \tag{A.20}$$

$$[\hat{F}_i, \hat{K}_1] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \hat{S}_{Hk} \tag{A.21}$$

$$[\hat{F}_i, \hat{K}_2] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{n}_j \hat{S}_{Lk} \tag{A.22}$$

Рассмотрим коммутационные соотношения между следующими операторами: $\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{F}}^2, \hat{J}_z, \hat{\vec{L}}^2, \hat{K}, \hat{K}_1, \hat{K}_2$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{S}}_L^2] = 0 \tag{A.23}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{S}}_H^2] = \hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{S}_{Hi}]\hat{S}_{Hj} + \hat{J}_i\hat{S}_{Hj}[\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] + \hat{S}_{Hj}\hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] + \hat{S}_{Hj}[\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}]\hat{J}_i =$$
$$= \Big([\hat{J}_i, \hat{S}_{Hj}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Hk}\Big) = 0 \tag{A.24}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{S}}_L^2] = 0 \tag{A.25}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{F}}^2] = \hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{F}_j]\hat{F}_j + \hat{J}_i\hat{F}_j[\hat{J}_i, \hat{F}_j] + [\hat{J}_i, \hat{F}_j]\hat{F}_j\hat{J}_i + \hat{F}_j[\hat{J}_i, \hat{F}_j]\hat{J}_i = 0 \tag{A.26}$$

так как $[\hat{J}_i, \hat{F}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Hk} + i\hbar\varepsilon_{ijm}\hat{S}_{Lm}$

так, что перемножая $\hat{F}_j = \hat{S}_{Hj} + \hat{S}_{Lj}$ Получим

$\hat{F}_j[\hat{J}_i, \hat{F}_j] = i\hbar\Big([\hat{\vec{S}}_L \times \hat{\vec{S}}_H]_i + [\hat{\vec{S}}_H \times \hat{\vec{S}}_L]_i\Big) = 0$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{L}}^2] = 0 \Big(\text{аналогично используя } \hat{L}_j[\hat{J}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k\hat{L}_j = 0\Big) \tag{A.27}$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{L}}^2] = 0 \text{ так как } [\hat{S}_{Hi}, \hat{L}_j] = 0 \tag{A.28}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{L}}^2] = 0 \tag{A.29}$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{\vec{F}}^2] = 0 \text{ так как } \hat{S}_{Hi}[\hat{S}_{Hi}, \hat{F}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Hk}\hat{S}_{Hi} = 0 \tag{A.30}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{\vec{F}}^2] = 0 \tag{A.31}$$

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{\vec{F}}^2] = 0 \text{ так как } [\hat{L}_i, \hat{F}_j] = 0 \tag{A.32}$$

$$[\hat{\vec{F}}^2, \hat{K}] = [\hat{\vec{F}}^2, \hat{K}_1 + \hat{K}_2] = \hat{F}_\mu[\hat{K}_1 + \hat{K}_2, \hat{F}_\mu] + [\hat{K}_1 + \hat{K}_2, \hat{F}_\mu]\hat{F}_\mu = \tag{A.33}$$
$$= \hat{F}_\mu[\hat{K}_1, \hat{F}_\mu] + [\hat{K}_1, \hat{F}_\mu]\hat{F}_\mu + \hat{F}_m u[\hat{K}_2, \hat{F}_\mu] + [\hat{K}_2, \hat{F}_\mu]\hat{F}_\mu =$$
$$= 2i\hbar\hat{n}_\gamma\varepsilon_{\mu\nu\gamma}\hat{S}_{L\mu}\hat{S}_{H\nu} + 2i\hbar\hat{n}_\omega\varepsilon_{\mu\nu\omega}\hat{S}_{H\mu}\hat{S}_{L\nu} = 0$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{J}_z] = \hat{S}_{Hi}[\hat{S}_{Hi}, \hat{J}_z] + [\hat{S}_{Hi}, \hat{J}_z]\hat{S}_{Hi} = 0 \text{ так как } \hat{S}_{Hi}[\hat{S}_{Hi}, \hat{J}_z] = 0 \tag{A.34}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{J}_z] = 0 \tag{A.35}$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{K}_1] = 0 \text{ Так как } \hat{S}_{Hi}[\hat{K}_1, \hat{S}_{Hi}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{Hi}\hat{S}_{Hj}\hat{n}_k = 0 \tag{A.36}$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{K}_2] = 0 \tag{A.37}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{K}_1] = 0 \tag{A.38}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{K}_2] = 0 \tag{A.39}$$

$$[\hat{\vec{S}}_H^2, \hat{K}] = 0 \tag{A.40}$$

$$[\hat{\vec{S}}_L^2, \hat{K}] = 0 \tag{A.41}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_z] = \hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{J}_z] + [\hat{J}_i, \hat{J}_z]\hat{J}_i = \Big(\hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{J}_z] = 0\Big) = 0 \tag{A.42}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{K}_1] = 0 \text{ Так как } [\hat{K}_1, \hat{J}_i] = 0 \tag{A.43}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{K}_2] = 0 \tag{A.44}$$

$$[\hat{\vec{J}}^2, \hat{K}] = 0 \tag{A.45}$$

$$[\hat{J}_z, K_1] = 0 \tag{A.46}$$

$$[\hat{J}_z, K_2] = 0 \tag{A.47}$$

$$[\hat{J}_z, K] = 0 \tag{A.48}$$

$$\begin{aligned}[\hat{\vec{F}}^2, \hat{J}_z] = \hat{F}_i[\hat{F}_i, \hat{J}_z] + [\hat{F}_i, \hat{J}_z]\hat{F}_i = \hat{F}_i\left(i\hbar\varepsilon_{3ki}\hat{S}_{Hk} + i\hbar\varepsilon_{2mi}\hat{S}_{Lm}\right) + \\ + \left(i\hbar\varepsilon_{3ni}\hat{S}_{Hn} + i\hbar\varepsilon_{3\alpha i}\hat{S}_{L\alpha}\right)\hat{F}_i = \left(\hat{F}_i = \hat{S}_{Hi} + \hat{S}_{Li}\right) = 0\end{aligned} \tag{A.49}$$

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{J}_z] = 0 \text{ так как } [\hat{L}_i, \hat{J}_z] = i\hbar\varepsilon_{ik3} \tag{A.50}$$

$$[\hat{K}_1, \hat{\vec{L}}^2] = \hat{L}_i[\hat{K}_1, \hat{L}_i] + [\hat{K}_1, \hat{L}_i]\hat{L}_i = 2i\hbar\left(\vec{n}\cdot[\hat{\vec{S}}_H \times \hat{\vec{L}}]\right) \tag{A.51}$$

$$[\hat{K}_2, \hat{\vec{L}}^2] = \hat{L}_i[\hat{K}_2, \hat{L}_i] + [\hat{K}_2, \hat{L}_i]\hat{L}_i = 2i\hbar\left(\vec{n}\cdot[\hat{\vec{S}}_L \times \hat{\vec{L}}]\right) \tag{A.52}$$

$$[\hat{K}, \hat{\vec{L}}^2] = 2i\hbar\left(\vec{n}\cdot[\hat{\vec{F}} \times \hat{\vec{L}}]\right) \tag{A.53}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПИРАЛЬНОСТИ

Показано полученные распределения спиральности осколка при заданном распределении орбитального момента, заданного в виде(см. формула (4.7)).

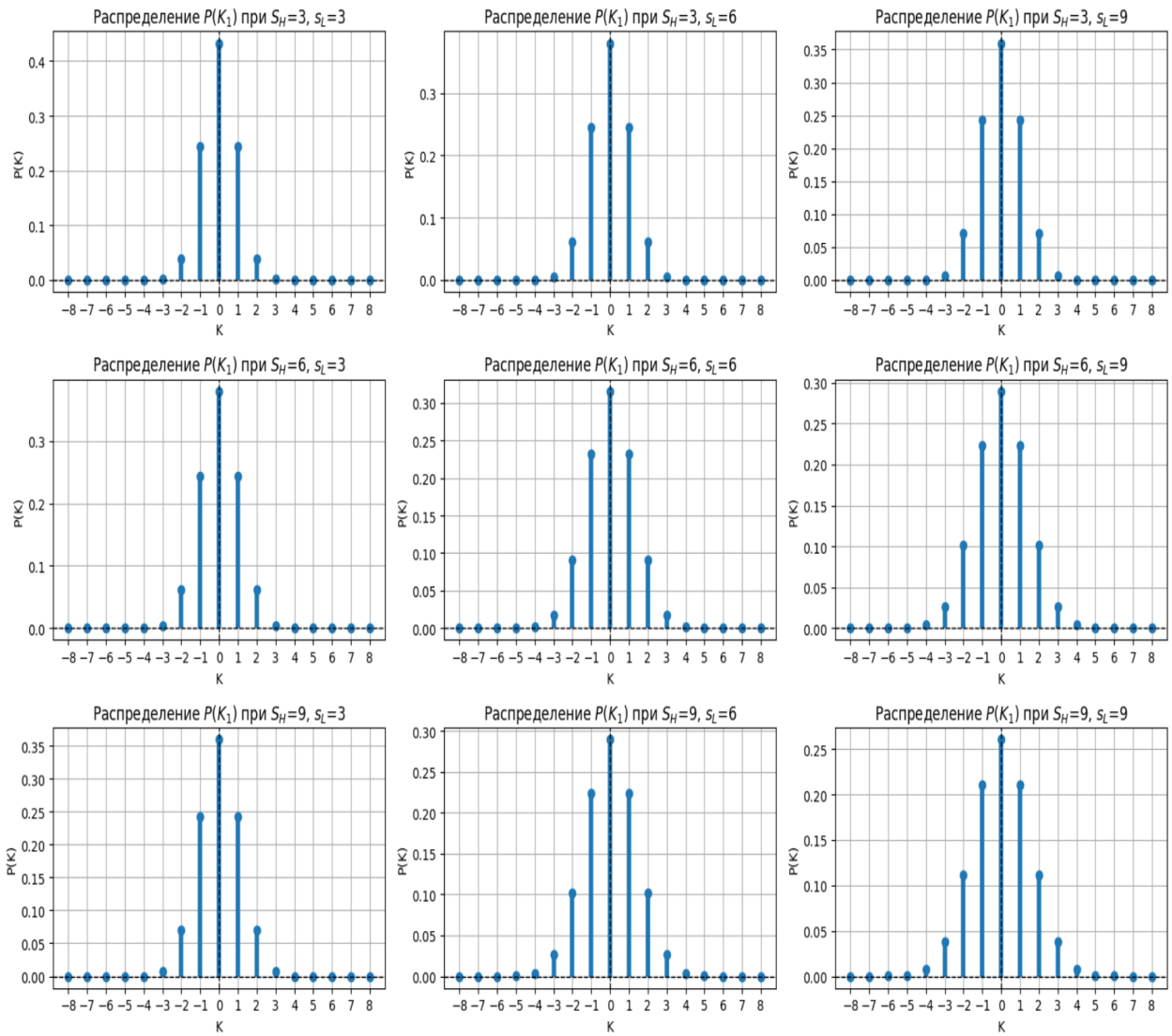

Рисунок В.1 — Распределения спиральности осколка при $S_{H,L} = [3, 6, 9]$ параметр μ т.е положение пика, было выбрано в точке $L = S_H + S_L$.

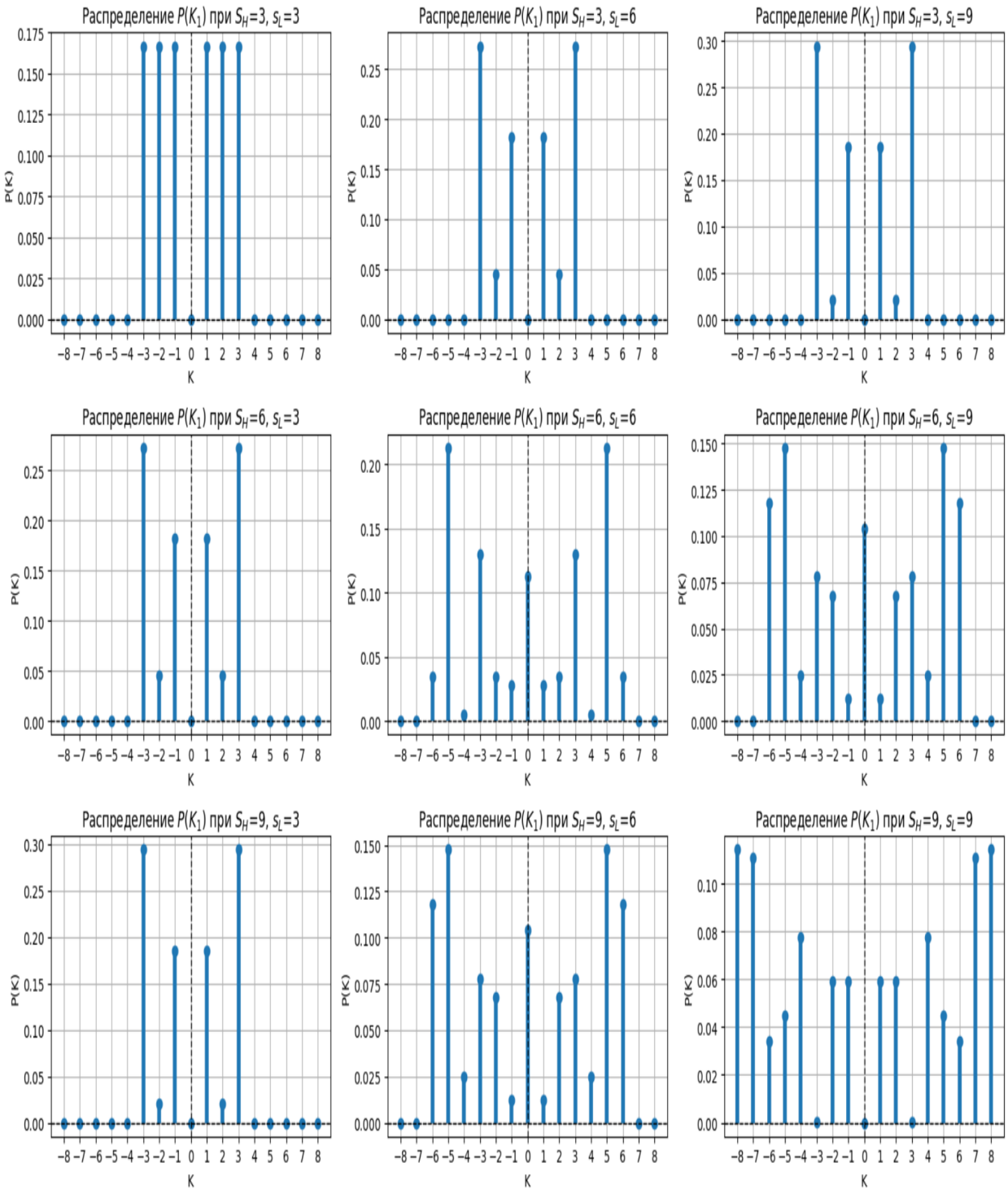

Рисунок В.2 — Распределения спиральности осколка при $S_{H,L} = [3, 6, 9]$ параметр μ т.е положение пика, было выбрано в точке $L = \dfrac{(S_H + S_L) + |S_H - S_L|}{2}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Angular Momentum of Primary Products Formed in the Spontaneous Fission of ^{252}Cf / J. B. Wilhelmy [и др.] // Phys. Rev. C. — 1972. — Т. 5, вып. 6. — С. 2041—2060.
2. Angular momentum generation in nuclear fission / J. Wilson [и др.] // Nature. — 2021. — Т. 590, № 7847. — С. 566—570.
3. *Moretto L. G.*, *Peaslee G. F.*, *Wozniak G. J.* Angular momentum bearing modes in fission // Nuclear Physics A. — 1989. — Т. 502. — С. 453—472.
4. *Vogt R.*, *Randrup J.* Event-by-event study of photon observables in spontaneous and thermal fission // Phys. Rev. C. — 2013. — Т. 87, вып. 4. — С. 044602.
5. *Vogt R.*, *Randrup J.* Angular momentum effects in fission // Phys. Rev. C. — 2021. — Т. 103, вып. 1. — С. 014610.
6. Fission Fragment Intrinsic Spins and Their Correlations / A. Bulgac [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Т. 126, вып. 14. — С. 142502.
7. Angular momentum of fission fragments from microscopic theory / P. Marevi ć [и др.] // Phys. Rev. C. — 2021. — Т. 104, вып. 2. — С. L021601.
8. *Randrup J.*, *Vogt R.* Generation of Fragment Angular Momentum in Fission // Phys. Rev. Lett. — 2021. — Т. 127, вып. 6. — С. 062502.
9. Fragment Intrinsic Spins and Fragments' Relative Orbital Angular Momentum in Nuclear Fission / A. Bulgac [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Т. 128, вып. 2. — С. 022501.
10. *Bulgac A.* Angular correlation between the fission fragment intrinsic spins // Phys. Rev. C. — 2022. — Т. 106, вып. 1. — С. 014624.

11. Angular momentum in fission fragments / T. Døssing [и др.] // Phys. Rev. C. — 2024. — Т. 109, вып. 3. — С. 034615.

12. Spatial orientation of the fission fragment intrinsic spins and their correlations / G. Scamps [и др.] // Physical Review C. — 2023. — Т. 108.

13. *Барабанов А. Л.*, *Гречухин Д. П.* Поляризация и выстренность осколков деления ядер // Ядерная физика. — 1988. — Т. 47, вып. 3. — С. 648—656.

14. *Barabanov A. L.*, *Furman W. I.* Formal theory of neutron induced fission // Z. Phys. A. — 1997. — Т. 357. — С. 411—418.

15. *Барабанов А. Л.* Симметрии и спин-угловые корреляции в реакциях и распадах. — Москва : ФИЗИМАТЛИТ, 2010. — С. 520. — ISBN 978-5-9221-1226-0.

16. *Ericson T.* On the level density of deformed nuclei // Nuclear Physics. — 1958. — Т. 6. — С. 62—81.

17. *Michael B.*, *Bernard R.*, *et al.* Future of nuclear fission theory // Nucl. Part. Phys. G. — 2020. — Т. 47. — С. 113002.

18. *Vogt R.*, *Randrup J.* Detailed modeling of fission with FREYA // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2020. — Т. 954. — С. 161225. — Symposium on Radiation Measurements and Applications XVII.

19. *Bertsch G. F.*, *Kawano T.*, *Robledo L. M.* Angular momentum of fission fragments // Phys. Rev. C. — 2019. — Т. 99, вып. 3. — С. 034603.