

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 524.8

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
«ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР»**

Студент

_____ К. М. Кузнецова

Научный руководитель,
ассистент каф. №40

_____ В. Д. Стасенко

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**«ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНЫХ
ЧЕРНЫХ ДЫР»**

Студент	_____ К. М. Кузнецова
Научный руководитель, ассистент каф. №40	_____ В. Д. Стасенко
Рецензент, д.ф.-м.н., с.н.с.	_____ Ю. Н. Ерошенко
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ А. А. Кириллов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Первичные черные дыры	5
2 Эволюция гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры	7
2.1 Получение уравнения	7
2.2 Численное решение	8
2.3 Аналитическое решение	10
2.4 Остановка роста гало	11
3 Взаимодействие звезды с гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры	16
4 Заключение	24
Список использованных источников	25

ВВЕДЕНИЕ

Почти во всех современных космологических моделях галактики, скопления и все крупномасштабные структуры развиваются в результате гравитационной неустойчивости, возникающей из-за флуктуаций плотности с малой амплитудой. В большинстве этих моделей холодная скрытая масса (СМ) является важной составляющей общей плотности массы Вселенной, однако природа СМ остается неизвестной. В научной литературе рассматриваются различные кандидаты на роль СМ. Выдвигается гипотеза о том, что СМ состоит из стабильных частиц нового типа, выходящими за рамки стандартной модели. Другое предположение заключается в том, что часть или вся СМ находится в форме первичных черных дыр (ПЧД), образовавшихся в ранние времена [1; 2]. Учитывая безрезультатные исходы многих исследований в области частиц СМ и обилие новых наблюдений за черными дырами (ЧД), интерес к ПЧД как к перспективному кандидату в СМ за последнее десятилетие резко возрос.

На долю ПЧД в составе СМ наложено множество наблюдательных ограничений [3—5]. Научное сообщество занимается поиском новых наблюдательных проявлений, которые могли бы еще больше ограничить или предоставить прямые доказательства существования ПЧД. Один из подходов в этих поисках основан на взаимодействиях между ПЧД с двойными звездными системами. При таком рассеянии достаточно массивные ПЧД передают энергию двойной, что может приводить к разрушению гравитационно связанной системы. Однако разрушение — не единственный возможный результат таких процессов. ПЧД также могут участвовать в обменных процессах, при которых одна из звезд двойной системы выбрасывается и заменяется самой ПЧД. В этом случае динамика оставшейся звезды в двойной системе будет указывать на наличие массивного невидимого тела.

Миссия Gaia [6] обнаружила несколько двойных систем, состоящих из звезды и ЧД [7—9]. Свойства этих двойных не отвечают стандартным

астрофизическим моделям формирования подобных систем, поэтому выдвигается предположение, что они могли быть сформированы в результате обмена с ПЧД. В работе [10] показано, что процесс обмена с ПЧД может быть источником появления наблюдаемых Gaia двойных систем, свойства которых противоречат предсказаниям изолированной эволюции двойных систем, означая, что черная дыра в таких системах является первичной.

Другое важное свойство ПЧД состоит в том, что они генерируют флуктуации плотности, в результате чего вокруг них аккумулируется гало скрытой масса. В процессе взаимодействия с двойной звездной системой ПЧД с гало СМ могут, подобно изолированной ПЧД, участвовать в процессе обмена с одним из объектов системы. В результате в получившейся двойной системе звезды и ПЧД в присутствии гало СМ будет возникать поправка к гравитационному потенциалу точечной ПЧД. Вследствие этого орбита звезды станет незамкнутой и начнет прецессировать, что можно будет увидеть в наблюдениях. Эволюция гало СМ вокруг ПЧД, а также процессы, связанные с эффектами, происходящими с орбитой звезды-объекта двойной системы в присутствии гало являются целью данной работы.

1 ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Черные дыры, сформировавшиеся в результате прямого коллапса первичных флуктуаций плотности большой амплитуды в ранней Вселенной, называют первичными. В отличие от черных дыр звездного происхождения, ПЧД могут формироваться любой массы и их гравитационный радиус порядка $r_g \sim 10^{-8}(m_{\text{ПЧД}}/10^{20} \text{ г}) \text{ см}$, что делает эти объекты практически бесстолкновительными. На сегодняшний день не удалось обнаружить ПЧД непосредственно в наблюдениях, однако некоторые астрофизические явления дают основания для предположения о их связи с ПЧД.

Классической работой по ПЧД считается статья Зельдовича и Новикова 1966 года [1], в которой впервые было выдвинуто предположение о существовании таких объектов. В начале 1970-х годов Хокинг и Карр опубликовали работы, затрагивающие тему ПЧД, включая их совместную статью [2]. Быстро стала популярна гипотеза о том, что ПЧД могут объяснить СМ. Однако к современному моменту наложено множество наблюдательных ограничений на их плотность во Вселенной [11], хотя так называемое массовое окно $\sim 10^{17} \div 10^{22} \text{ г}$ все еще остается открытым для объяснения всей скрытой массы.

Вскоре после первого обнаружения гравитационных волн от слияния чёрных дыр массой $M_{\text{BH}} \approx 30M_{\odot}$ детекторами LIGO [12] возник вопрос о том, могут ли эти объекты иметь первичное происхождение [13; 14]. Анализ данных показал, что зарегистрированные слияния совместимы с гипотезой о первичной природе их компонентов. Традиционный сценарий для астрофизического канала формирования черных дыр состоит в коллапсе массивных звезд. Причем образующаяся черная дыра должна иметь массу $M_{\text{BH}} \gtrsim 3M_{\odot}$, а ПЧД, как было отмечено ранее, могут формироваться с любой массой. Таким образом, обнаружение чёрной дыры с массой $M_{\text{BH}} \lesssim 3M_{\odot}$ стало бы подтверждением существования ПЧД. Более того, первичные чёрные дыры могут служить источниками для сверхмассивных

чёрных дыр, присутствующих в ядрах большинства галактик, с массами от $10^5 M_\odot$ до $10^{10} M_\odot$, которые уже существовали при красных смещениях $z > 6$ [15]. Наличие достаточно массивных первичных чёрных дыр может служить затравкой для формирования сверхмассивных черных дыр при их дальнейшем росте за счет аккреции.

В контексте данной работы нам важно наличие ограничений на долю ПЧД в составе СМ, так как таким образом по крайней мере часть СМ не представляет собой ПЧД и может за счет вызванных ее флуктуаций плотности собираться вокруг ПЧД в гало. Хотя отметим, что модели с широким массовым распределением ПЧД также подходят в контексте данной работы. Например, ПЧД с массами $\sim 10^{18}$ г могли бы составлять основную часть скрытой массы, в то время как черные дыры $\gtrsim 10 M_\odot$ представляют только малую долю скрытой массы. В этом случае легкие черные дыры будут “собираться” вокруг тяжелых и поэтому результаты данной работы также применимы к этому сценарию.

2 ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Для описания эволюции гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры, воспользуемся одномерной сферической моделью, позволяющей получить информацию о физических параметрах гало [16].

2.1 ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сферическую область радиуса r , содержащую избыток материи, не оказывающей давления, в расширяющейся Вселенной. В пространственно-плоской Вселенной любая область, содержащая избыток плотности, в конечном итоге расширяется до максимального размера и коллапсирует. Полная масса материи внутри области радиуса r , M_{TOT} , во время расширения вычисляется через интеграл движения. Поскольку мы рассматриваем масштабы, которые намного меньше, чем Хаббловский радиус, излучение можем считать однородным, а его временная эволюция определяется общим расширением Вселенной, а не локальными условиями. Уравнение движения для этого радиуса r имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{8\pi G}{3}\rho_R - \frac{GM_{TOT}}{r^2}, \quad (2.1)$$

где ρ_R — плотность излучения. Для удобства перейдем к конформного времени $d\eta = dt/a(t)$ и в сопутствующую систему отсчета $r = a(\eta)R_\xi(\eta)\xi$, где ξ — сопутствующий номер данной оболочки, а $R_\xi(\eta)$ измеряет отклонение движения оболочки от однородного Хаббловского потока во Фридмановской Вселенной. В последующих выкладках мы опускаем индекс ξ в $R_\xi(\eta)$, но подразумевается, что существует отдельная эволюция для каждой оболочки.

Масштабный фактор $a(\eta)$ удовлетворяет уравнениям Фридмана для Вселенной, заполненной излучением и материей, не оказывающей давления,

$$a'^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_R) a^4; \quad a'' = \frac{4\pi G}{3} \rho_M a^3, \quad (2.2)$$

где штрих обозначает производную по η . Параметризуем плотности излучения и скрытой массы как $\rho_R = \rho_{eq} (a_{eq}/a)^4$, $\rho_M = \rho_{eq} (a_{eq}/a)^3$ соответственно, где ρ_{eq} — плотность Вселенной на момент перехода со стадии доминирования излучения на пылевидную стадию. Решение фоновых уравнений (2.2) есть

$$a(\eta) = a_{eq} \left[2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right) + \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right], \quad (2.3)$$

где $\eta_*^{-2} = 2\pi G \rho_{eq} a_{eq}^2 / 3$. После перехода к конформному времени получим уравнение (2.1) в виде

$$aR'' + a'R' + \left(\frac{GM_{\text{TOT}}}{\xi^3 R^2} - \frac{4\pi G}{3} a^3 \rho_M R \right) = 0. \quad (2.4)$$

Плотность энергии излучения не входит в это уравнение явно, но ее эффект входит в эволюцию масштабного фактора. Параметризовав полную массу материи внутри оболочки в терминах превышения над однородным фоном, обозначаемым как $\Phi(\xi) = \delta\rho_M / \rho_M$, получим

$$M_{\text{TOT}} \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_{eq} a_{eq}^3 [1 + \Phi(\xi)] \xi^3. \quad (2.5)$$

Сделав замену переменных от η к $x \equiv a/a_{eq}$ в уравнении (2.4), придем к уравнению

$$x(1+x) \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{2} \right) \frac{dR}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\Phi}{R^2} - R \right) = 0. \quad (2.6)$$

2.2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Для решения уравнения (2.6) численными методами был использован код на Matlab. Работа программы основана на методе Рунге-Кутты четвертого порядка, определяющем масштабный коэффициент x_{ta} и откло-

нение оболочки от Хаббловского потока R_{ta} в момент, когда флуктуация прекращает рост и останавливается. Время остановки, определяемое как $\dot{r} = 0$, в координатах уравнения (2.6) определяется условием

$$R + x \frac{dR}{dx} = 0. \quad (2.7)$$

Начальные условия для решения уравнения (2.6) имеют вид $R(x_0) = 1$ и $R'(x_0) = 0$ в некоторый ранний момент времени $x_0 \ll 1$. Физически эти условия соответствуют тому, что в начальный момент рассматриваемый слой расширяется вместе со Вселенной. Параметром уравнения (2.6) выступает

$$\Phi(\xi) \equiv \frac{\delta\rho_M}{\rho_M} = \frac{M_{PBH}}{M_{DM}}, \quad (2.8)$$

где M_{DM} — скрытая масса, содержащаяся в области радиуса r , а M_{PBH} — масса первичной черной дыры внутри этой области.

Регулируя значения скрытой массы M_{DM} и массы первичной черной дыры M_{PBH} , можно получить решение уравнения (2.6) для заданного параметра Φ . На основе полученных значений x_{ta} и R_{ta} также вычисляются соответствующие параметры сферического слоя скрытой массы: радиус и плотность на момент остановки

$$\rho_{ta} = \left(\frac{1}{4\pi r^2} \right) \frac{dM}{dr}; \quad r = R_{ta} x_{ta} \xi. \quad (2.9)$$

Для более поздних времен предположение о сферической симметрии нарушается; однако, мы можем предположить, что радиус вириализованного гравитационно-связанного объекта будет составлять половину радиуса остановки, а плотность внутри объекта будет в восемь раз больше плотности на момент разворота.

До порядка $\mathcal{O}(x^2)$ функция R зависит только от произведения Φx [16], поэтому для этого порядка по x масштабный коэффициент на момент остановки будет задан как $x_{ta} = C_x/\Phi$, где $C_x \equiv const$, и для того же порядка по x , $R_{ta} = const$.

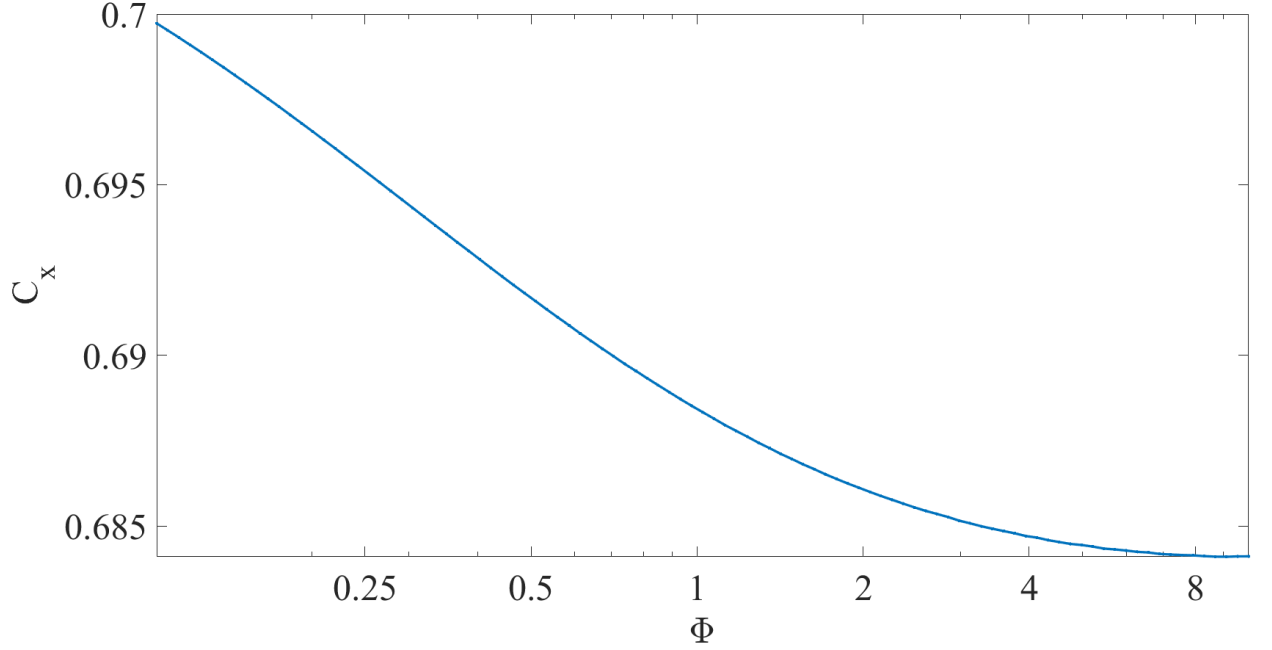


Рисунок 2.1 — График зависимости коэффициента C_x от параметра Φ .

2.3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аккреция скрытой массы на пылевидной стадии описывается уравнением (2.1) без учета давления излучения. Обозначим за r_{eq} радиус сферической оболочки слоя скрытой массы снаружи ПЧД на момент RD-MD перехода при $x = 1$. Внутри этой сферической оболочки ПЧД создает флуктуацию плотности $\delta_{eq} = 3M_{PBH}/4\pi\rho_{eq}r_{eq}^3$. Из предыдущей секции 2.2 (численного решения) радиус остановки сферического слоя скрытой массы связан с величиной флуктуации и его начальным радиусом как

$$r_{ta} \simeq \frac{2r_{eq}}{5\delta_{eq}} = \frac{8\pi\rho_{eq}r_{eq}^4}{15M_{PBH}}. \quad (2.10)$$

Масса сферического слоя скрытой массы радиусом r_{eq} и толщиной dr_{eq} будет $dM = 4\pi\rho_{eq}r_{eq}^2dr_{eq}$. После остановки слой вириализуется, в результате чего он сожмется в два раза $r = r_{ta}/2$, и его масса после соответствующих преобразований будет

$$dM = \left(\frac{15 M_{PBH}}{4}\right)^{3/4} \left(\frac{\pi\rho_{eq}}{r}\right)^{1/4} dr. \quad (2.11)$$

Профиль плотности же определяется выражением $\rho(r) = dM/4\pi r^2 dr$

$$\rho(r) = \left(\frac{15M_{PBH}}{16\pi} \right)^{3/4} \left(\frac{\rho_{eq}}{4} \right)^{1/4} r^{-9/4}. \quad (2.12)$$

Поскольку единственный свободный размерный параметр задачи — это масса ПЧД, то профиль плотности должен масштабироваться как $\rho(r/r_*)$, где $r_* = (M_{PBH}/\rho_{eq})^{1/3}$. Из выражения (2.12) легко видеть, что это действительно так

$$\rho \approx 0.29 \rho_{eq} \left(\frac{r}{r_*} \right)^{-9/4}. \quad (2.13)$$

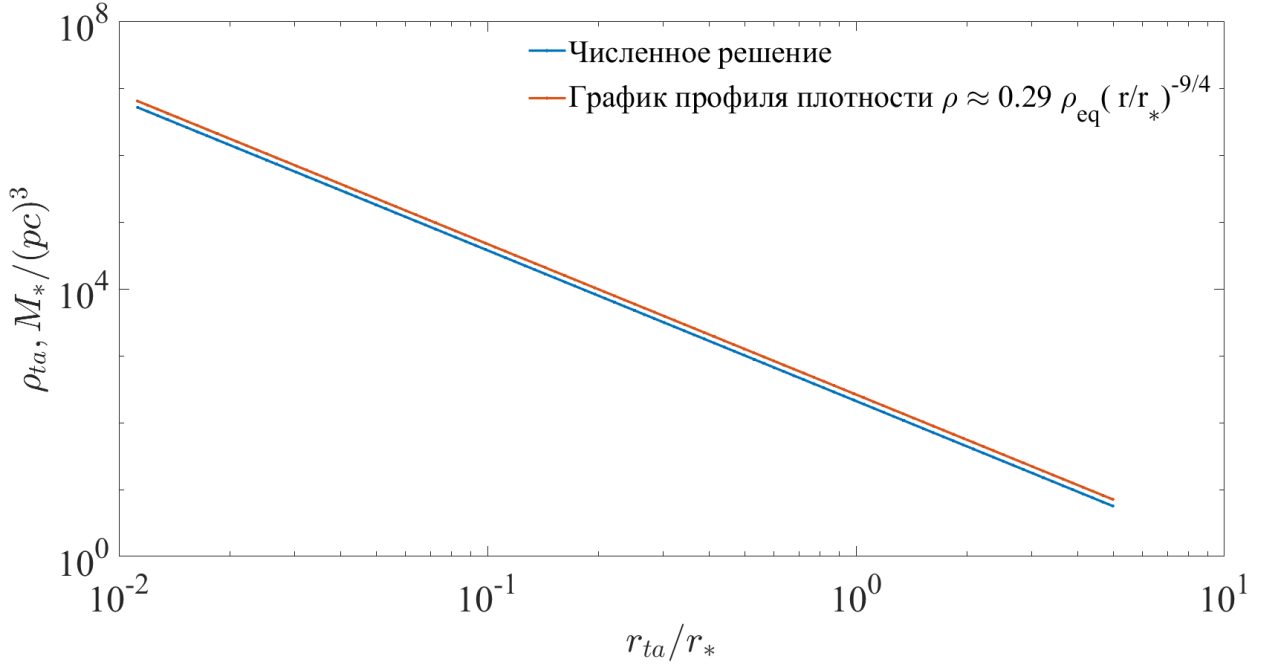


Рисунок 2.2 — Профиль плотности сферической оболочки материи, масштабированный как $\rho(r/r_*)$, где $r_* = (M_{PBH}/\rho_{eq})^{1/3}$. Синей пунктирной линией обозначена зависимость, полученная при численном решении 2.2, красной — зависимость, полученная при аналитическом решении.

2.4 ОСТАНОВКА РОСТА ГАЛО

Как неоднократно отмечалось ранее, первичная черная дыра на массовом масштабе M генерирует флуктуацию плотности $\delta \sim M_{PBH}/M$ [15], поэтому рост массы гало вокруг первичной черной дыры должен подчиняться стандартному закону роста флуктуаций на пылевидной стадии

$$\delta \propto (1+z)^{-1}$$

$$M_h \approx M_{PBH} \frac{1+z_{eq}}{1+z}. \quad (2.14)$$

С другой стороны гало скрытой массы также формируются из адиабатических инфляционных флуктуаций. При больших красных смещениях эти гало будут на много порядков легче, чем те, которые формируются вокруг первичных черных дыр. Однако современные галактики сформировались именно из инфляционных возмущений, что подтверждается анализом крупномасштабной структуры Вселенной. Из этих соображений становится ясно, что при некоторых красных смещениях рост гало вокруг ПЧД прекращается и гало начинают формироваться преимущественно из инфляционных возмущений. Момент перехода “механизма” формирования структур из одного режима в другой можно оценить с помощью аналитической теории Пресса-Шехтера [17], согласно которой доля материи в структурах с массой большей, чем M_h будет

$$P_{\text{inf}}(M > M_h) = 1 - \text{erf} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M_h)} \right), \quad (2.15)$$

где erf — функция ошибок, $\delta_c = 1.69$ — критическое значение флуктуации плотности, вычисленное в линейной теории, для сферического коллапса и $\sigma^2(M_h)$ — дисперсия флуктуации материи на массовом масштабе M_h

$$\sigma^2(M_h, z) = D^2(z) \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) W^2(kR), \quad (2.16)$$

где $P(k) = A T^2(k) k^{n_s}$ с $n_s = 0.96$ и $T(k)$ — спектр мощности и переходная функция для адиабатических инфляционных возмущений [18; 19], A — нормировочная константа, например, на данные реликтового излучения, $D(z) = g(z)/[g(0)(1+z)]$ описывает линейный рост флуктуаций плотности и $W(kR)$ — сферическая оконная функция в импульсном пространстве

$$W(kR) = \frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3}, \quad (2.17)$$

которая соответствует цилиндрическому фильтру в физическом пространстве, и масштаб R с масштабом M_h связан соотношением $R = (3M/4\pi\rho_M)^{1/3}$ и ρ_M — современная плотность материи.

Доля же массы, которая аккумулируется вокруг ПЧД, определяется выражением

$$P_{PBH} = \frac{M_h f_{PBH}}{M_{PBH}} = f_{PBH} \frac{1 + z_{eq}}{1 + z}. \quad (2.18)$$

Легко видеть, что если доля ПЧД в составе скрытой массы $f_{PBH} = 0.01$, то к красному смещению $z \approx 30$ вокруг ПЧД будет собрана вся скрытая масса в пренебрежении вкладом гало от инфляционных возмущений. Определим момент остановки роста гало вокруг ПЧД как решение уравнения

$$P_{PBH}(M_h(z)) = P_{inf}(M_h(z)), \quad (2.19)$$

где M_h определяется выражением (2.14). Для наглядности решение уравнения (2.19) удобно представить графическим способом. В частности, момент остановки роста гало вокруг ПЧД массой $M_{PBH} = 1M_\odot$ составляет:

- $z \approx 34$ при $f_{PBH} = 10^{-5}$,
- $z \approx 25$ при $f_{PBH} = 10^{-4}$,
- $z \approx 7$ при $f_{PBH} = 10^{-3}$,

что отражено на Рис. 2.3.

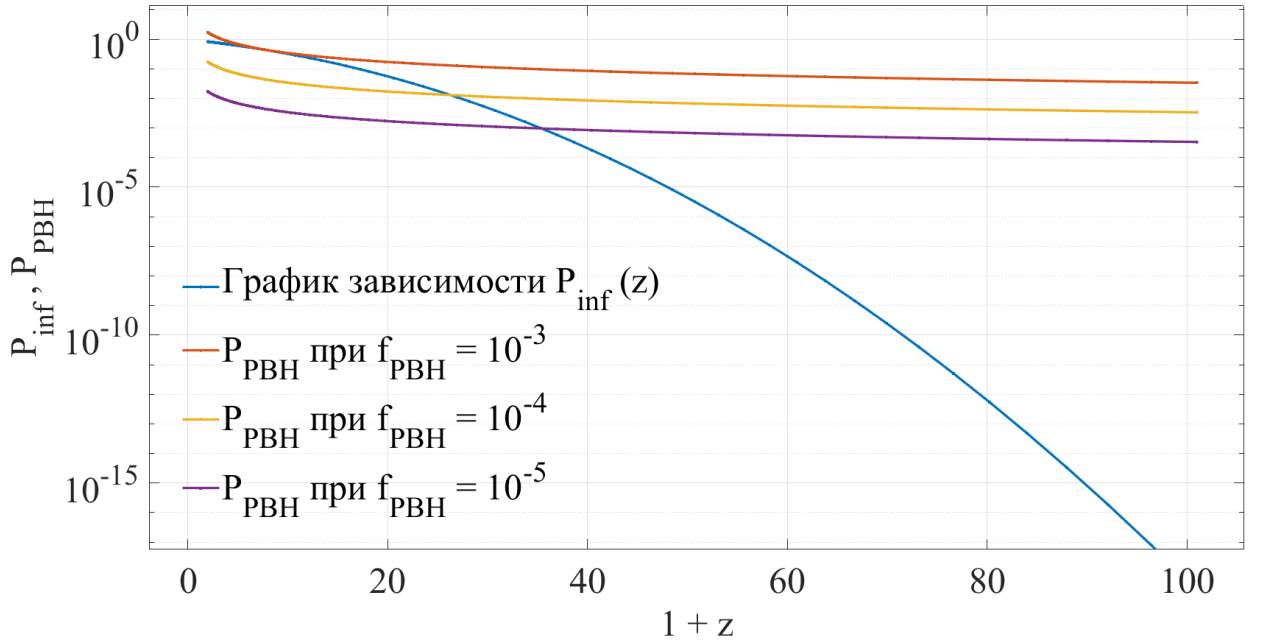


Рисунок 2.3 — Графическое решение уравнения (2.19). Точка пересечения синей и красной линий показывает момент остановки роста гало вокруг первичной черной дыры при $f_{PBH} = 10^{-3}$; синей и желтой линий — момент остановки роста гало при $f_{PBH} = 10^{-4}$; синей и фиолетовой — момент остановки роста гало при $f_{PBH} = 10^{-5}$. Масса ПЧД $M_{PBH} = 1M_\odot$.

Далее уравнение (2.19) решалось численно и были определены зависимости доли ПЧД в составе скрытой массы f_{PBH} от красного смещения на момент остановки роста гало для различных масс ПЧД M_{PBH} . Эти результаты демонстрирует Рис. 2.4, из которого видно, что момент остановки роста гало z_{stop} слабо зависит от массы ПЧД M_{PBH} , тогда как от параметра f_{PBH} зависимость проявляется более явно. Рис. 2.4 также позволяет увидеть, что у уравнения (2.19) формально отсутствуют решения при $f_{PBH} \gtrsim 10^{-3}$. Дело в том, что при таких значениях доли ПЧД, как уже было упомянуто выше, вокруг них будет собрана вся скрытая масса, согласно (2.18). В противоположном случае $f_{PBH} < 10^{-3}$ некоторая доля плотности Вселенной будет представлять собой маломассивные компактные гало (compact minihalo), состоящих из ПЧД и скрытой массы вокруг них. Относительную плотность этих объектов легко определить с помощью уравнения (2.18) как

$$\frac{\Omega_{CMH}}{\Omega_{DM}} = f_{PBH} \frac{1 + z_{eq}}{1 + z_{stop}}. \quad (2.20)$$

На Рис. 2.5 показан график зависимости доли компактных гало от доли ПЧД в составе скрытой массы. Сама же масса сформированных гало может быть определена графически с помощью соотношения

$$M_h = \frac{M_{PBH} \Omega_{CMH}}{f_{PBH} \Omega_{DM}}. \quad (2.21)$$

Видно, что компактные гало оказываются примерно в 100 раз тяжелее затравочных ПЧД, потому что момент прекращения роста гало наступает примерно при красных смещениях $z \sim 30$, это показывает пунктирная линия на Рис. 2.5.

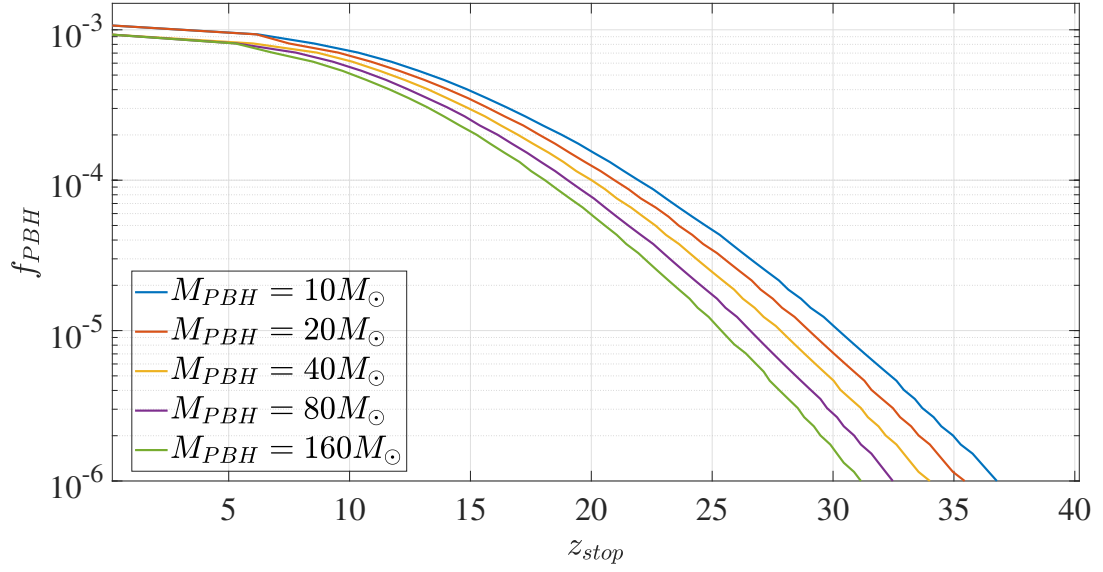


Рисунок 2.4 — Зависимость параметра f_{PBH} от момента остановки роста гало z при различных значениях массы ПЧД M_{PBH} .

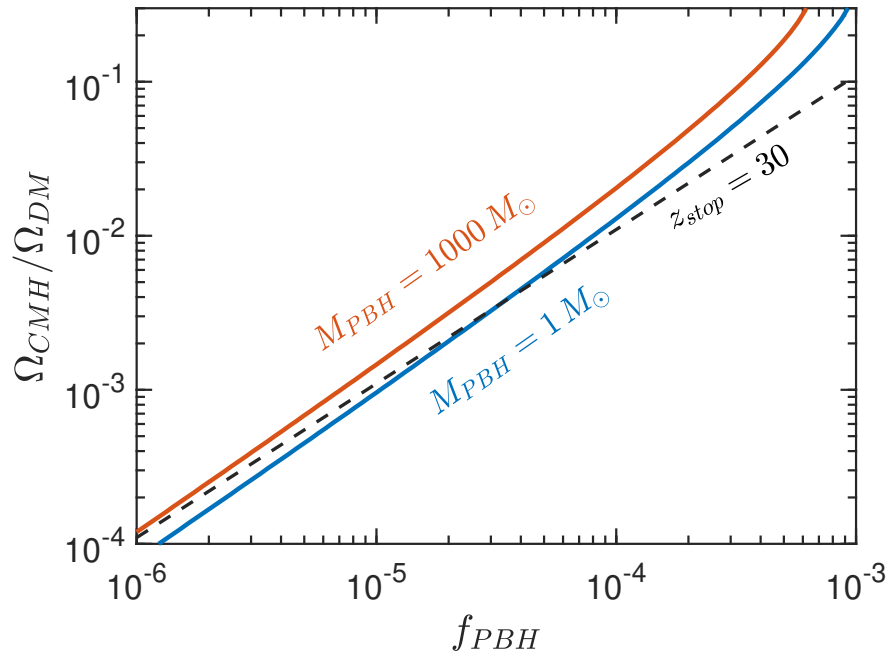


Рисунок 2.5 — Зависимость доли компактных гало в составе скрытой массы от f_{PBH} для двух масс ПЧД. Пунктирной линией показан случай фиксированного момента остановки $z_{stop} = 30$ в уравнении (2.20).

3 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗДЫ С ГАЛО СКРЫТОЙ МАССЫ ВОКРУГ ПЕРВИЧНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Звезды во Вселенной гравитационно связанные с первичной черной дырой двигаются по эллиптическим орбитам вокруг нее. Присутствие гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры будет приводить к отклонению полного ньютоновского гравитационного потенциала от потенциала точечной массы черной дыры $U = -\frac{GM_{PBH}}{r}$ [20]. В результате гравитационно связанные с первичной черной дырой орбиты звезд не будут замкнуты, а станут прецессировать.

При наличии малой поправки δU к ньютоновскому потенциалу первичной черной дыры угол прецессии орбиты звезды за время одного оборота равен [21]

$$\delta\phi = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} \int_0^\pi r^2(\phi) \delta U d\phi \right), \quad (3.1)$$

где L — сохраняющийся угловой момент звезды с массой m . При интегрировании в этом выражении в качестве траектории частицы берется невозмущенная эллиптическая орбита

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos(\phi)}, \quad (3.2)$$

где e — эксцентриситет эллипса, $p = \frac{L^2}{Gm^2 M_{PBH}} = a(1 - e^2)$ — параметр орбиты, a — большая полуось.

Рассмотрим степенной профиль плотности вещества, создающего поправку δU в дополнение к потенциалу первичной черной дыры:

$$\rho = \hat{\rho} \left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^\gamma, \quad (3.3)$$

где $\hat{\rho}$, $\hat{r}$ — нормирующие плотность вещества и радиус оболочки соответственно; γ — параметр. Соответствующая полная масса скрытой массы внутри сферы радиуса r равна

$$M_{DM}(r) = \frac{4}{3 + \gamma} \pi \hat{\rho} \hat{r}^3 \left[\left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^{3+\gamma} - \left(\frac{R_{min}}{\hat{r}} \right)^{3+\gamma} \right], \quad (3.4)$$

где R_{min} — минимальный радиус, до которого “дотянется” профиль плотности (3.3). Причем результаты не зависят от его конкретного выбора при разумных предположениях, поэтому он оценивается как Шварцшильдовский радиус черной дыры $R_{min} \sim 2GM_{PBH}/c^2$. Поправка к потенциалу в случае профиля плотности (3.3) будет

$$\delta U = 4\pi G \left[\frac{1}{(3 + \gamma)(2 + \gamma)} \hat{\rho} \hat{r}^2 \left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^{2+\gamma} + \frac{C_1}{r} + C_2 \right], \quad (3.5)$$

где C_1 , C_2 — константы. Подставляя первое слагаемое поправки к потенциалу (3.5) в величину угла прецессии (3.1), получим:

$$\delta\phi_1 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} 4\pi G \left(\frac{1}{(3 + \gamma)(2 + \gamma)} \right) \hat{\rho} \hat{r}^{-\gamma} \int_0^\pi r^{4+\gamma}(\phi) d\phi \right). \quad (3.6)$$

Вклад от второго слагаемого поправки (3.5), пропорционального $1/r$, в величину угла прецессии будет:

$$\delta\phi_2 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} 4\pi G C_1 \int_0^\pi r(\phi) d\phi \right). \quad (3.7)$$

Вклад же от постоянной в выражении для поправки (3.5) в величину угла прецессии будет

$$\delta\phi_3 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} 4\pi G C_2 \int_0^\pi r^2(\phi) d\phi \right), \quad (3.8)$$

Учитывая, что в качестве траектории частицы берется невозмущенная эллиптическая орбита (3.2), в выражениях (3.6) и (3.7) присутствует интеграл вида:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(1 + e \cos x)^\alpha}, \quad (3.9)$$

где α — параметр. Сделав переход к интегрированию по $\cos x$ и замены $l = (1 + \cos x)/2$, $z = -2e/(1 - e)$, интеграл (3.9) примет вид:

$$\int_0^1 (1 - e)^{-\alpha} \left(\frac{l}{1 - l} \right)^{1/2} (1 - zl)^{-\alpha} dl. \quad (3.10)$$

Третий множитель в интеграле можем представить в виде ряда по степеням zl :

$$(1 - zl)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n l^n, \quad (3.11)$$

где введено обозначение $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$. Теперь получим выражение (3.10) в виде:

$$(1 - e)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \int_0^1 l^{n-1/2} (1 - l)^{-1/2} dl. \quad (3.12)$$

Интеграл в выражении (3.12) является Эйлеровым интегралом вида $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1 - x)^{b-1} = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b)/\Gamma(a + b)$, тогда:

$$\begin{aligned} (1 - e)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n + 1)} = \\ = (1 - e)^{-\alpha} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (1/2)_n}{(1)_n n!} z^n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Принимая во внимание, что сумма в выражении выше — это гипергеометрический ряд $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((a)_n (b)_n z^n) / ((c)_n n!)$, а $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, $\Gamma(1) = 0! = 1$, окончательно получим:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + e \cos x)^{\alpha}} = (1 - e)^{-\alpha} \pi F\left(\alpha, \frac{1}{2}; 1; z\right). \quad (3.14)$$

Подстановка полученного интеграла в формулы для угла прецессии дает:

$$\delta\phi_1 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} \frac{4\pi^2 G \hat{p} \hat{r}^{-\gamma}}{(3 + \gamma)(2 + \gamma)} \left(\frac{p}{1 - e} \right)^{4+\gamma} F\left(4 + \gamma, \frac{1}{2}; 1; z\right) \right), \quad (3.15)$$

$$\delta\phi_2 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} 4\pi^2 G C_1 \left(\frac{p}{1-e} \right) F\left(1, \frac{1}{2}; 1; z\right) \right), \quad (3.16)$$

$$\delta\phi_3 = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} 4\pi^2 G C_2 \left(\frac{p}{1-e} \right)^2 F\left(2, \frac{1}{2}; 1; z\right) \right). \quad (3.17)$$

Гипергеометрические функции в формулах (3.16) и (3.17) можно записать в следующем виде:

$$F\left(1, \frac{1}{2}; 1; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \left(\frac{z}{4}\right)^n = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} F\left(2, \frac{1}{2}; 1; z\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n (\frac{1}{2})_n}{(1)_n \cdot n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \left(\frac{z}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (2n)!}{n! \cdot n!} \left(\frac{z}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{(1-z)^{1/2}} + \frac{z}{2 \cdot (1-z)^{3/2}} = -\frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Слагаемые $\delta\phi_2$ и $\delta\phi_3$ не будут вносить вклад в величину угла прецессии, так как множители внутри скобок в (3.16) и (3.17) не зависят от L , и соответствующие частные производные равны 0. Тогда угол прецессии орбиты получен из формулы (3.15), и с учетом $z = -2e/(1-e)$ $\delta\phi$ примет следующий вид

$$\delta\phi = \delta\phi_1 = -\frac{4\pi^2 \hat{\rho} \hat{r}^{-\gamma} p^{3+\gamma}}{(1-e)^{4+\gamma} M_{PBH}} F\left(4 + \gamma, \frac{3}{2}; 3; -\frac{2e}{1-e}\right). \quad (3.20)$$

В случае профиля плотности вещества (2.13), полученного из аналитического решения 2.3, когда $\gamma = -9/4$, соответствующие полная масса и поправка к потенциалу примут вид:

$$M_{DM}(r) = \frac{16\pi}{3} 0.29 \rho_{eq} r_*^3 \left[\left(\frac{r}{r_*}\right)^{3/4} - \left(\frac{R_{min}}{r_*}\right)^{3/4} \right]. \quad (3.21)$$

Соответствующая поправка к гравитационному потенциалу будет

$$\delta U = -\frac{64\pi G}{3} 0.29\rho_{eq} r_*^2 \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-1/4}, \quad (3.22)$$

где мы отбросили слагаемые, которые дают нулевой вклад в угол прецессии $\delta\phi$. После соответствующих преобразований получим следующее выражение для угла прецессии

$$\delta\phi = -\frac{4\pi^2 0.29\rho_{eq} r_*^{9/4} p^{3/4}}{(1-e)^{7/4} M_{PBH}} F(7/4, \frac{3}{2}; 3; -\frac{2e}{1-e}). \quad (3.23)$$

Заметим, что при подстановке $r_* = (M_{PBH}/\rho_{eq})^{1/3}$, $p = a(1-e^2)$, $a = (GM_{PBH}T^2/(4\pi^2))^{1/3}$ в (3.20), получим:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{4\pi^2 0.29\rho_{eq}(1-e^2)^{3+\gamma}}{(1-e)^{4+\gamma}} \\ &\times \frac{(M_{PBH}/\rho_{eq})^{-\gamma/3} (GM_{PBH}T^2/(4\pi^2))^{1+\gamma/3}}{M_{PBH}} F(4+\gamma, \frac{3}{2}; 3; -\frac{2e}{1-e}) \quad (3.24) \\ &= -\frac{4\pi^2 0.29\rho_{eq}^{1+\gamma/3} (1-e^2)^{3+\gamma} (GT^2/(4\pi^2))^{1+\gamma/3}}{(1-e)^{4+\gamma}} F(4+\gamma, \frac{3}{2}; 3; -\frac{2e}{1-e}). \end{aligned}$$

Из структуры полученного выражения видно, что $\delta\phi$ не зависит от массы ПЧД M_{PBH} .

На Рис. 3.1 представлена зависимость угла прецессии $\delta\phi$ от эксцентриситета орбиты звезды e для различных значений периодов обращения и соответствующих им больших полуосей орбиты. Из графика видно, что при $e = 0$ величина угла прецессии будет максимальной, что означает по видимому то, что за период обращения такая орбита не замкнется. С наблюдательной точки зрения такой случай не представляет интереса для рассмотрения, так как эффект “незамыкания” круговой орбиты отследить не представляется возможным.

Уравнение, описывающее движение звезды вокруг ПЧД с учетом гало скрытой массы имеет следующий вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M_{PBH} + M_{DM}(r))}{r^3} \vec{r}. \quad (3.25)$$

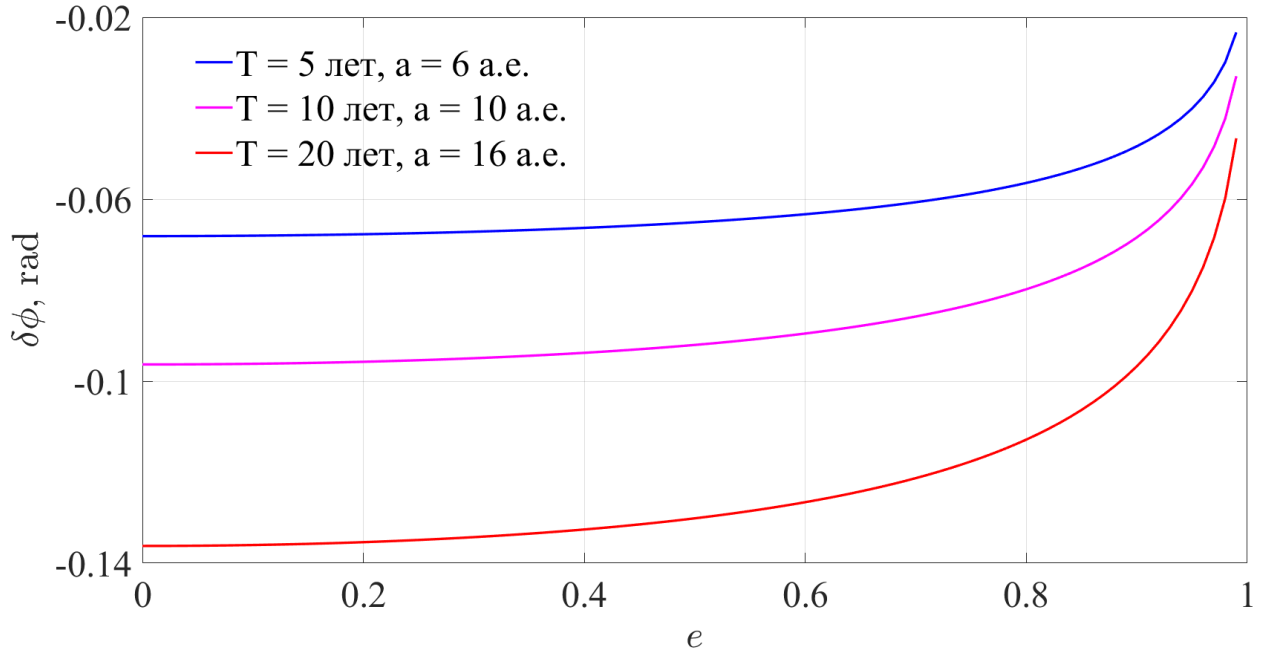


Рисунок 3.1 — Зависимость угла прецессии $\delta\phi$ от эксцентриситета орбиты звезды e . Синяя линия построена для орбитального периода и большой полуоси $T = 5$ лет, $a \approx 6$ а.е. соответственно, фиолетовая — $T = 10$ лет, $a \approx 10$ а.е. соответственно, красная — $T = 20$ лет, $a \approx 16$ а.е. соответственно.

Для численного решения уравнения (3.25) было построено несколько траекторий движения звезды, отвечающих различным параметрам орбиты и изображены они на Рис. 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5. С помощью формулы (3.23) были также вычислены углы прецессии соответствующих орбит. Для полученных графиков выявлено, что прецессия орбиты за время одного оборота уменьшается с ростом эксцентриситета e и увеличивается с ростом орбитального периода T .

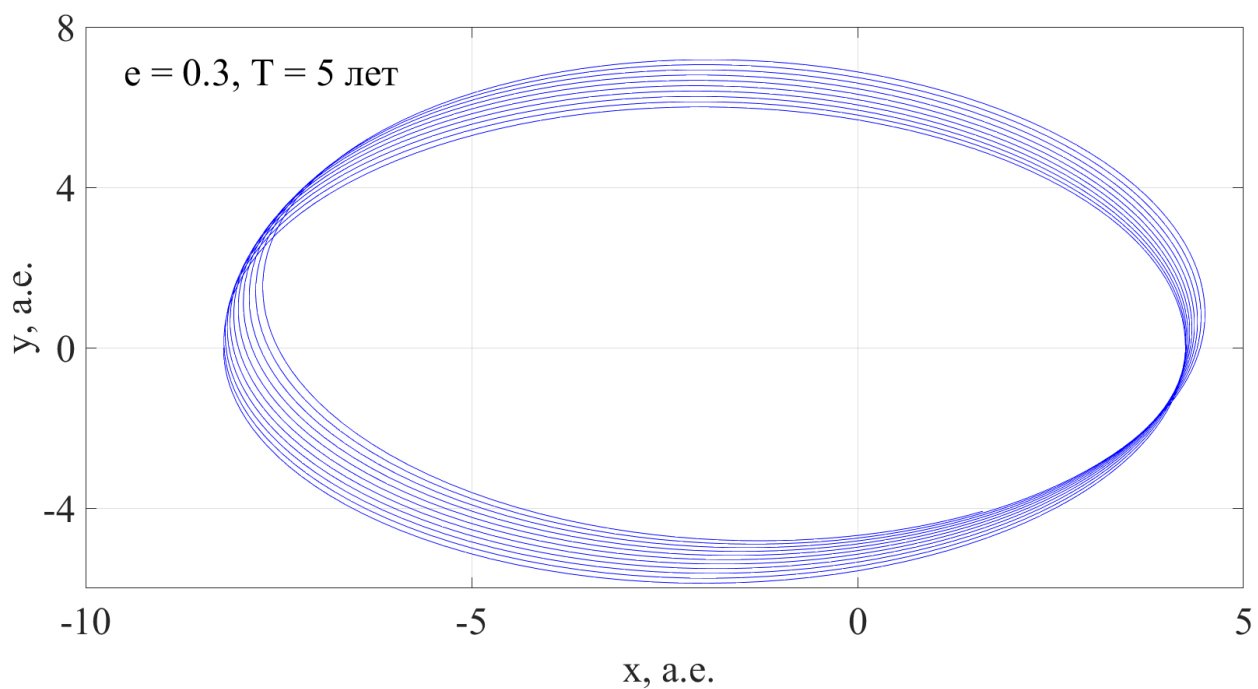


Рисунок 3.2 — Прецессия орбиты с эксцентриситетом $e = 0.3$ и периодом обращения $T = 5$ лет за время $t = 50$ лет. Угол прецессии орбиты $\delta\phi = -0.0671$ рад $= 3.85^\circ$.

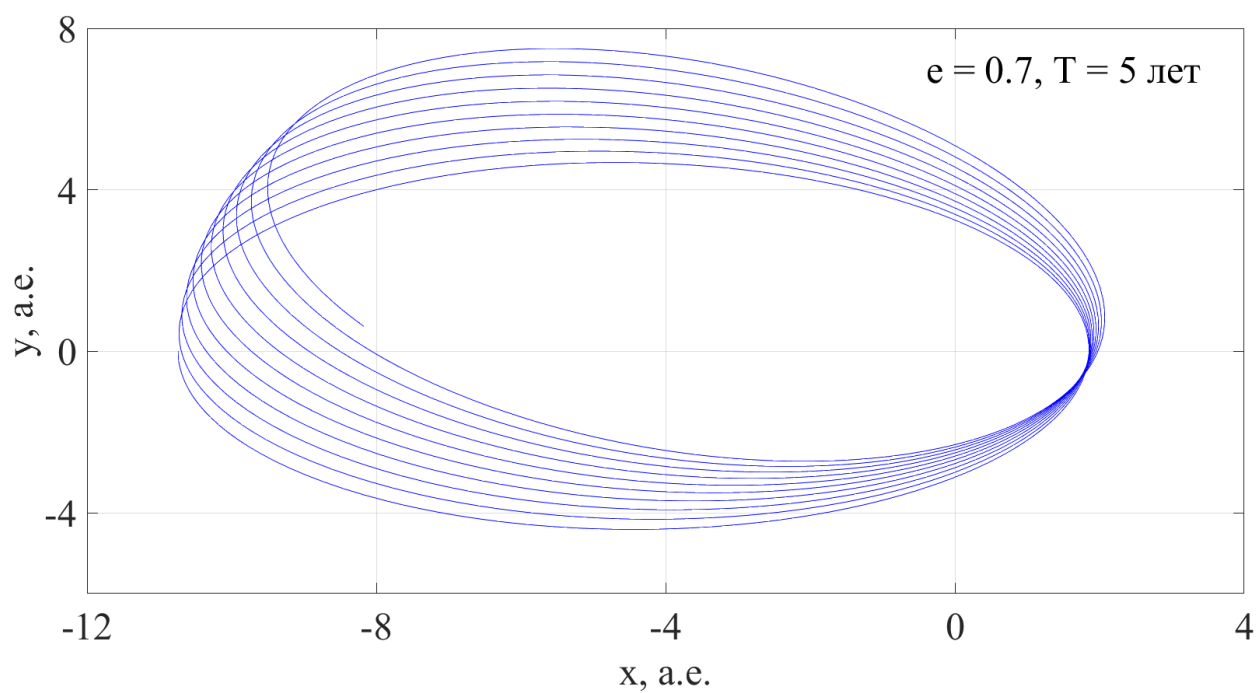


Рисунок 3.3 — Прецессия орбиты с эксцентриситетом $e = 0.7$ и периодом обращения $T = 5$ лет за время $t = 50$ лет. Угол прецессии орбиты $\delta\phi = -0.0607$ рад $= 3.48^\circ$.

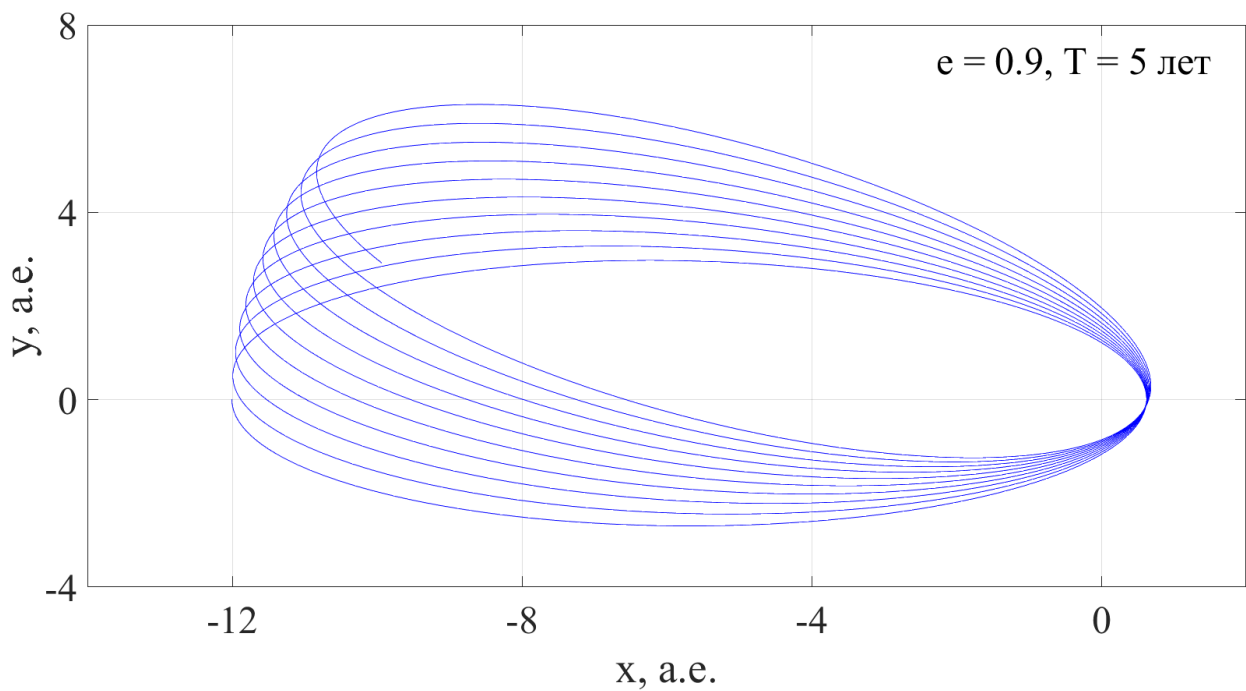


Рисунок 3.4 — Прецессия орбиты с эксцентриситетом $e = 0.9$ и периодом обращения $T = 5$ лет за время $t = 50$ лет. Угол прецессии орбиты $\delta\phi = -0.0484$ рад $= 2.77^\circ$.

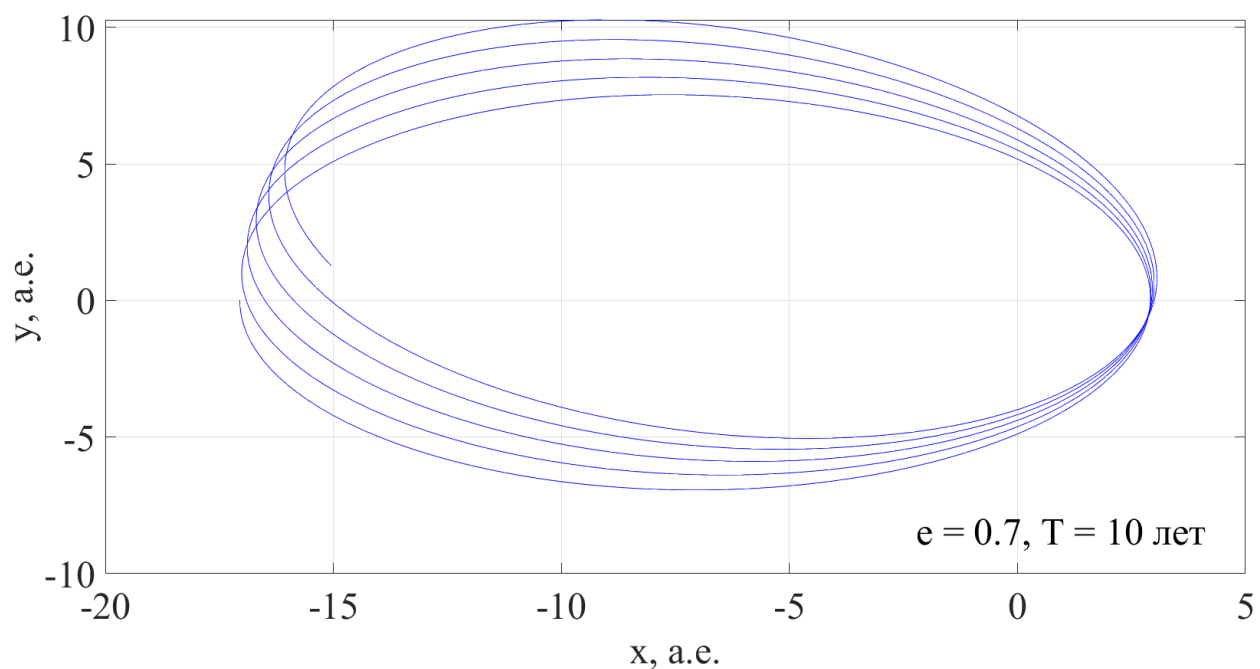


Рисунок 3.5 — Прецессия орбиты с эксцентриситетом $e = 0.7$ и периодом обращения $T = 10$ лет за время $t = 50$ лет. Угол прецессии орбиты $\delta\phi = -0.0858$ рад $= 4.92^\circ$.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены процесс эволюции гало СМ вокруг ПЧД, а также эффекты, возникающие в двойной системе из ПЧД, окруженной гало СМ, и звезды, которые приводят к прецессии орбиты последней.

В ходе работы было получено численное решение уравнения, описывающего эволюцию оболочки скрытой массы вокруг первичной черной дыры. Также была получена аналитическая формула профиля плотности скрытой массы вокруг ПЧД (2.13), которая отражает зависимость, полученную при численном решении 2.2.

Из решения уравнения (2.19) был определен момент остановки роста гало скрытой массы вокруг первичной черной дыры и построен график 2.4, показывающий зависимость параметра $f_{РВН}$ от момента остановки роста гало для различных масс ПЧД.

Также для профиля плотности (2.13) были найдены формулы (3.22), описывающая поправку к потенциалу точечной массы ПЧД, возникающую в присутствии гало СМ вокруг нее, и (3.23), выражающая угол прецессии, возникающей из-за этой поправки. Для полученного угла прецессии был построен график зависимости от эксцентриситета орбиты Рис. 3.1. Кроме того, анализ полученных при численном решении уравнения (3.25) траекторий движения звезды по орбите вокруг ПЧД на Рис. 3.2, 3.3, 3.4 и 3.5 показал соответствие зависимости, полученной аналитически, а именно: уменьшение угла прецессии с ростом эксцентриситета орбиты. Полученные результаты могут быть использованы для поиска ПЧД в астрономических наблюдениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Zel'dovich Y. B., Novikov I.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // Soviet Astronomy. — 1966.
2. *Carr B. J., Hawking S. W.* Black holes in the early Universe // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1974. — Т. 168. — С. 399—415.
3. *Hawkins M. R. S.* The case for primordial black holes as dark matter: Primordial black holes as dark matter // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — Т. 415, № 3. — С. 2744—2757.
4. *Carr B., Kühnel F.* Primordial black holes as dark matter candidates // SciPost Physics Lecture Notes. — 2022.
5. Observational Evidence for Primordial Black Holes: A Positivist Perspective / B. Carr [и др.]. — 2023. — arXiv: [2306.03903](https://arxiv.org/abs/2306.03903) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
6. The Gaia mission / T. Prusti [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2016. — Т. 595. — A1.
7. A Sun-like star orbiting a black hole / K. El-Badry [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2022. — Т. 518, № 1. — С. 1057—1085.
8. *El-Badry K.* On the formation of a 33 solar-mass black hole in a low-metallicity binary // The Open Journal of Astrophysics. — 2024. — Т. 7.
9. Search for a Black Hole Binary in Gaia DR3 Astrometric Binary Stars with Spectroscopic Data / A. Tanikawa [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2023. — Т. 946, № 2. — С. 79.
10. Three-body exchanges with primordial black holes / B. Bhalla [и др.] // Phys. Rev. D. — 2025. — Т. 111, вып. 4. — С. 043029.

11. Constraints on primordial black holes / B. Carr [и др.] // Rept. Prog. Phys. — 2021. — Т. 84, № 11. — С. 116902. — arXiv: [2002.12778 \[astro-ph.CO\]](#).
12. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. Abbott [и др.] // Physical Review Letters. — 2016. — Т. 116, № 6.
13. Did LIGO detect dark matter? / S. Bird [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 20. — С. 201301. — arXiv: [1603.00464 \[astro-ph.CO\]](#).
14. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 117, № 6. — С. 061101. — arXiv: [1603.08338 \[astro-ph.CO\]](#) ; — [Erratum: Phys.Rev.Lett. 121, 059901 (2018)].
15. *Carr B., Silk J.* Primordial Black Holes as Generators of Cosmic Structures // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2018. — Т. 478, № 3. — С. 3756—3775. — arXiv: [1801.00672 \[astro-ph.CO\]](#).
16. *Kolb E. W., Tkachev I. I.* Large-amplitude isothermal fluctuations and high-density dark-matter clumps // Phys. Rev. D. — 1994. — Т. 50, вып. 2. — С. 769—773.
17. *Press W. H., Schechter P.* Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation // Astrophys. J. — 1974. — Т. 187. — С. 425—438.
18. The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields / J. M. Bardeen [и др.] // Astrophys. J. — 1986. — Т. 304. — С. 15—61.
19. *Mo H. J., White S. D. M.* The Abundance and clustering of dark haloes in the standard lambda-CDM cosmogony // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2002. — Т. 336. — С. 112. — arXiv: [astro-ph/0202393](#).
20. *Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н.* Взвешивание темной материи в центре Галактики // Письма в ЖЭТФ. — 2015. — Т. 101. — С. 875—880.
21. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика: Том 1. Механика. — ФИЗМАЛИТ, 2013.