Исследование ренорм-группового потока интегрируемой O(4) сигма-модели

Федоров Иван Денисович

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель PhD., к.ф.-м.н., доц. Алфимов М. Н.

Отчет о научно-исследовательской работе

Москва, 24 июня 2025 г.

Мотивировка

Нелинейная сигма-модель – скалярная теория поля, описывающая поле как некоторую точечную частицу, движущуюся по фиксированному многообразию.

Сигма-модели находят множество применений в физике:

1. Описание спиновых цепочек [S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, 1989]
2. Описание квантового эффекта Холла [P. Fendley, 2000]
3. Асимптотическая свобода и интегрируемость позволяет им выступать как игрушечная модель КХД [M.C. Abbott, Z. Bajnok and Balog, 2021]
4. Механизм спонтанного нарушения хиральной симметрии и генерации динамической массы кварков m_{dyn} без введения множества свободных параметров [M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, 2006]

Мотивировка. КХД

QLLσM в первом порядке теории возмущений предсказывает зарядовые радиусы мезонов без введения дополнительных параметров:

$$r_\pi = 0.63 \text{ fm}$$
$$r_K = 0.51 \text{ fm}$$

в то время как в χPT требуется параметр L_g, который находится из эксперимента:

$$r_\pi^2 = 12 L_9 / f_\pi^2$$

Эксперимент показывает, что

$$r_\pi = (0.672 \pm 0.008) \ \text{ fm}$$
$$r_K = (0.560 \pm 0.031) \ \text{ fm}$$

[M. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp and E. van Beveren, 2003]

Деформированная нелинейная $O(n)$ сигма-модель

В нелинейных $O(n)$ сигма-моделях поле описывается как точечная частица, движущуюся по $(n-1)$-мерной сфере. Действие данной модели

$$S\left[\mathbf{X}\right] = \frac{1}{4\pi}\int G_{ij}(\mathbf{X})\partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \, d^2\sigma,$$

где G_{ij} – метрический тензор, который должен удовлетворять уравнению ренорм-группы (РГ)

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G),$$

где V - некоторое векторное поле.

$$\beta_{ij}^{(0)}(G) = R_{ij},$$

$$\beta_{ij}^{(1)} = -R_i^k R_{jk} + (1+c_2)G_{ij}R_{kl}R^{kl} + (1-c_2)R_{ij}R - \\ -\frac{1}{2}G_{ij}R^2 - \frac{1}{2}c_2\nabla_i\nabla_j R$$

Нелинейные $O(n)$ сигма-модели

1. Обладают асимптотической свободой при $n \geq 3$
2. Интегрируемые
3. Непрерывные деформации, сохраняющие интегрируемость
4. $O(3)$ изучена вплоть до 4й петли [M. Alfimov and A. Litvinov, 2022]

$O(4)$ сигма-модель. Однопетлевое уравнение ренормгруппы

Разложение метрики по степеням $\hbar$:

$$G_{ij} = G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots,$$

где $G_{ij}^{(n)}$ имет размерную характеристику $\hbar^{n-1}$.
Исходная метрика, дающая решение в лидирующем порядке

$$G_{ij}^{(0)} = \frac{2\kappa}{\hbar} \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

то есть является решением уравнения

$$\dot{G}_{ij}^{(0)} + \nabla_i V_j^{(0)} + \nabla_j V_i^{(0)} = -R_{ij}.$$

Цель - выяснить, как выглядит $G_{ij}^{(1)}$.

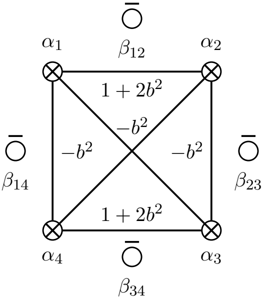
Скрининг-заряды $O(4)$ сигма-модели

Следуя [V. Fateev, 1996], приведем метрику к виду

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 + \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_2\right)^2$$

$$+ e^{\frac{t}{b^2}}\, e^{-\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 - \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}}\, dx_3\right)^2 + O\left(e^{2t}\right), \quad t \to -\infty$$

где $b = b(\hbar)$. Диаграмма скрининговых зарядов:



Двухпетлевой случай. Ультрафиолетовый предел

Координаты (x_1, x_2, x_3), где метрика в UV имеет данный вид:

$$\begin{cases} r = 1 + a \cdot e^{-x_1} e^t \\ \theta = \frac{x_2}{2} + b \cdot e^{-x_1} e^t \\ \phi = \frac{x_3}{2} + c \cdot e^{x_1} e^t \end{cases},$$

где a, b, c - константы. Исходная метрика раскладывается по степеням e^t в UV пределе $(t \to -\infty)$, метрика со скининг-зарядами - по степеням $\hbar$ [V. Fateev, 1996]

e^t \ $\hbar$	0	1
0	$+$	$+$
1	$+$	?

Это дает краевые условия на метрику.

Двухпетлевой случай. Специальный вид поправки

Пробовали искать в виде

$$G_{ij}^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} f \cdot G_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g \cdot G_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & h \cdot G_{33}^{(0)} \end{pmatrix},$$

где $f = f(r, \kappa(t)), g = g(r, \kappa(t)), h = h(r, \kappa(t))$, но в этом случае выражения оказываются слишком громоздкими. Рассматривается частный случай $g = h = 0$.

Двухпетлевой случай. Специальный вид поправки

Искали в виде

$$G_{ij}^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r) G_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили

$$f(r) = \frac{1}{2\hbar(\kappa^2 r^4 - 1)} \left(\beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1} \beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}) \right),$$

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)} \Gamma^{r\ \ (0)}_{rr} + 2V_r^{(0)} \Gamma^{r\ \ (1)}_{rr} = -(\beta_{rr})^{(1)},$$

то есть найдена $f(r)$, а значит и поправка. Ограничения на $\hbar, \kappa$ нужно найти из последнего уравнения специальным выбором схемы перенормировки

Заключение

1. Проверено, что метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2}\, d\varphi_1^2 + r^2\, d\varphi_2^2\right),$$

   удовлетворяет РГ уравнению в однопетлевом случае.
2. Выдвинута гипотеза о виде поправки во второй петле
3. Найдено частное решение РГ уравнения

$$f(r) = \frac{1}{2\hbar(\kappa^2 r^4 - 1)}\left(\beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1-\kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1}\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)})\right),$$

$$g = h = 0$$

4. Получен вид метрики в ультрафиолетовом пределе
5. Дальнейшая работа заключается в нахождении ограничений на $\hbar, \kappa$ и проверке найденной метрики в ультрафиолетовом пределе

Спасибо за внимание!

Вид метрики $O(4)$ сигма-модели в UV

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\hbar}\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\hbar}e^{t}\left(A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_1}\right) + \ldots,$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \qquad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ -b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$