

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 530.22, 530.23

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА
ИНТЕГРИРУЕМОЙ $O(4)$ СИГМА-МОДЕЛИ**

Студент _____ И. Д. Федоров

Научный руководитель

PhD., к.ф.-м.н., доц. _____ М. Н. Алфимов

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕНОРМГРУППОВОГО ПОТОКА
ИНТЕГРИРУЕМОЙ $O(4)$ СИГМА-МОДЕЛИ**

Студент

_____ И. Д. Федоров

Научный руководитель

PhD., к.ф.-м.н., доц.

_____ М. Н. Алфимов

Рецензент

_____ В. А. Кривороль

Секретарь ГЭК,

к.ф.-м.н.

_____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,

д.ф.-м.н., проф.

_____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Деформированная $O(n)$ сигма-модель	4
1.1 Основные определения	4
2 Поиск деформированной метрики $O(4)$ сигма-модели в первом приближении теории возмущений	5
2.1 Однопетлевое РГ-уравнение	5
2.2 Ультрафиолетовый предел	8
2.3 Двухпетлевое РГ-уравнение	9
Заключение	11
Список использованных источников	13
Приложение А. Компоненты невозмущенного метрического тензора $O(4)$ сигма-модели в новых координатах	14

ВВЕДЕНИЕ

Сигма-модель – это теория поля, в которой поле принимает значение в некотором римановом многообразии. Это многообразие может быть произвольным, но чаще всего на нём вводится дополнительная структура, например, структура группы Ли или структура фактора группы Ли по некоторой подгруппе.

Исторически название происходит из статьи Гелл-Манна и Леви, которые представили линейную и нелинейную модель для описания частицы σ -бесспинового мезона, участвующего в бета-распаде вместе с пионами [1].

Примерами полевых пространств являются n -мерная сфера $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ (Рисунок 1), комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n = SU(n+1)/SU(n) \times U(1)$, пространство анти-де Ситтера $AdS_{d+1} = SO(d, 2)/SO(d, 1)$, евклидово пространство анти-де Ситтера $EAdS_{d+1} = SO(d+1, 1)/SO(d+1)$ [2].

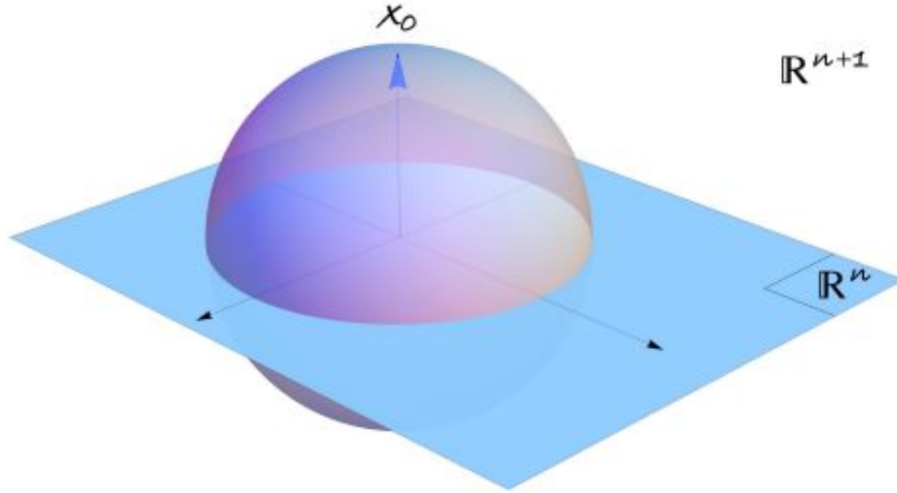


Рисунок 1 — Группа $SO(n+1)$ действует на сфере вращениями, подгруппа $SO(n)$ оставляет неподвижной точку x_0 . Это означает, что $S^n = SO(n+1)/SO(n)$

Сигма модели могут оказаться лучше других известных теорий. Например, линейная сигма модель проще и точнее позволяет вычислить зарядовый радиус пионов и каонов, а также массы пионов и некоторых нуклонов, чем хиральная теория возмущения [3]. Так, QLL σ M в первом порядке теории возмущений предсказывает зарядовые массы некоторых мезонов без введения дополнительных параметров [4]:

$$r_\pi = 0.63 \text{ fm}$$

$$r_K = 0.51 \text{ fm},$$

в то время как в χ РТ требуется параметр L_g , который находится из эксперимента:

$$r_\pi^2 = 12L_9/f_\pi^2.$$

Эксперимент показывает, что

$$r_\pi = (0.672 \pm 0.008) \text{ fm}$$

$$r_K = (0.560 \pm 0.031) \text{ fm},$$

то есть QLL σ M согласуется с экспериментом. Также нелинейные сигма модели могут применяться в физике конденсированного состояния [5], в частности при описания квантового эффекта Холла, сверхтекучего гелия-3 [6].

В квантовой хромодинамике не получается описать такое явление как Конфайнмент с помощи теории возмущения. В этой связи для качественного описания непертурбативных явлений можно использовать игрушечные модели, схожие с КХД. Например, в сигма моделях наблюдается явление асимптотической свободы и некоторых других явлений из КХД [7].

Данная работа посвящена изучению нелинейной $O(4)$ сигма-модели. Предпринимаются попытки по нахождению вида деформированной метрики в двупетлевом случае.

1. ДЕФОРМИРОВАННАЯ $O(n)$ СИГМА-МОДЕЛЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как правило, в $O(n)$ сигма-моделях рассматриваются римановы многообразия. Действие записывается как

$$S[\mathbf{X}] = \frac{1}{4\pi} \int G_{ij}(\mathbf{X}) \partial_\mu X^i \partial^\mu X^j d^n \sigma, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{X}$ — координата на заданном многообразии, $G = \{G_{ij}\}$ — метрический тензор. Метрика такова, что при отсутствии деформации действие инвариантно относительно преобразований

$$X^i \rightarrow A^{ij} X^j \quad (1.2)$$

с любой $n \times n$ ортогональной матрицей A , или, говоря иначе, действие инвариантно относительно действия группы $O(n)$ ортогональных преобразований.

Чтобы проквантовать теорию, получить физически наблюдаемые величины, данные теории поля требуется перенормировать. Как известно, их можно описать при помощи уравнения ренормгруппы [8]. Уравнение ренормгруппы для метрики G выглядит следующим образом:

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G), \quad (1.3)$$

где $\dot{G}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} G_{ij}$ — производная метрического тензора по времени, V — некоторое векторное поле. В качестве времени t выступает некий параметр, непрерывно связанный с

масштабом энергии. В данной работе в метрике также фигурирует параметр $\hbar$ - некоторый аналог постоянной Планка, который в дальнейшем мы будем считать малым параметром.

Бета-функцию можно разложить по степеням $\hbar$:

$$\beta_{ij}(G) = \beta_{ij}^{(0)}(G) + \beta_{ij}^{(1)}(G) + \dots \quad (1.4)$$

Вид бета-функции к возмущенной метрике $\tilde{G}$ можно найти из уравнения ренорм-группы и используя пакеты `xTensor` и `xPert` в `Wolfram Mathematica`:

$$-\tilde{\beta}_{ij}(\tilde{G}) = \frac{d}{dt} \tilde{G}_{ij}. \quad (1.5)$$

Получим, что

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(0)} = R_{ij}, \quad (1.6)$$

то есть $\beta^{(0)}$ инварианта относительно смены схемы перенормировки. $\beta^{(1)}$ уже не обладает таким свойством:

$$\tilde{\beta}_{ij}^{(1)} = -R_i^k R_{jk} + (1 + c_2) G_{ij} R_{kl} R^{kl} + (1 - c_2) R_{ij} R - \frac{1}{2} G_{ij} R^2 - \frac{1}{2} c_2 \nabla_i \nabla_j R \quad (1.7)$$

В данной работе рассматривается $O(4)$ сигма-модель. Цель — найти метрику, удовлетворяющую RG-уравнению (1.3) хотя бы в первом порядке теории возмущений. Возмущение метрики имеет вид

$$\tilde{G}_{ij} = G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)} + \dots, \quad (1.8)$$

где $G_{ij}^{(n)}$ имеет размерную характеристику $\hbar^{n-1}$. Мы ограничиваемся $O(4)$ -сигма-моделью, поскольку случай $n = 3$ уже тщательно изучен [9], а при $n \geq 5$ возникающие технические сложности значительно усложняют анализ, поэтому $n = 4$ является первым естественным шагом в рамках исследования.

2. ПОИСК ДЕФОРМИРОВАННОЙ МЕТРИКИ $O(4)$ СИГМА-МОДЕЛИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. ОДНОПЕТЛЕВОЕ RG-УРАВНЕНИЕ

Если рассматривать первое приближение ($\hbar^{-1}$), то уравнению ренорм-группы (1.3) удовлетворяет следующая метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar} \left(\frac{dr^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)} + \frac{1-r^2}{1-\kappa^2 r^2} d\varphi_1^2 + r^2 d\varphi_2^2 \right), \quad (2.1)$$

где $\hbar = \hbar(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ – параметры, зависящие от масштаба энергии. Убедимся в этом непосредственно. Результат вычисления символов Кристоффеля Γ_{jk}^i на данной метрике дает

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= r \frac{\kappa^2 + 1 - 2\kappa^2 r^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= r \frac{(1-\kappa^2)(1-r^2)}{1-\kappa^2 r^2}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2), \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -r \frac{1-\kappa^2}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r},\end{aligned}\tag{2.2}$$

остальные компоненты равны нулю. Отсюда через тензор Римана получаем тензор Риччи:

$$R_{11} = R_{1,i1}^i = \frac{-2 + 2\kappa^2 r^2 - 2\kappa^4 r^2(r^2 - 1)}{(r^2 - 1)(1 - \kappa^2 r^2)^2},\tag{2.3}$$

$$R_{22} = R_{2,i2}^i = \frac{2(\kappa^2 - 1)(r^2 - 1)}{(1 - \kappa^2 r^2)^2},\tag{2.4}$$

$$R_{33} = R_{3,i3}^i = 2r^2 - 2\kappa^2 r^4,\tag{2.5}$$

остальные компоненты равны нулю. Предположим теперь, что поле V_i из уравнения ренормгруппы (1.3) потенциально, откуда $\nabla_i V_j + \nabla_j V_i = 2\nabla_i \nabla_j \Psi$. Теперь, переписывая уравнение ренормгруппы с использованием полученных результатов, имеем

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2) + 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}}{(1-r^2)(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{h}(1-\kappa^2 r^2)(1-r^2) + 2hr^2 \kappa \dot{\kappa}(1-r^2)}{(1-\kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}r^2 \end{pmatrix} + 2\nabla_i \nabla_j \Psi = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2 + 2\kappa^2 r^2 - 2\kappa^4 r^2(r^2 - 1)}{(r^2 - 1)(1 - \kappa^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\kappa^2 - 1)(r^2 - 1)}{(1 - \kappa^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 - 2\kappa^2 r^4 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $h = \frac{2\kappa}{\dot{h}}$. Если предположить, что поля V_i нет, то рассматривая, например, компоненту с $i = j = 3$, получим

$$\dot{h} = 2 - 2\kappa^2 r^2.\tag{2.7}$$

В полученном уравнении фигурирует координата r , но параметры метрики не должны зависеть от координат. Значит, нулевое поле не удовлетворяет уравнению ренормгруппы. Попробуем найти поле, которое подходит. Так как $\nabla_j \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \equiv \Psi_j$ – ковариантная компонента, то по общему правилу ковариантного дифференцирования имеем

$$\nabla_i \nabla_j \Psi = \nabla_i \Psi_j = \frac{\partial \Psi_j}{\partial x^i} - \Psi_k \Gamma_{ij}^k.\tag{2.8}$$

Предположим, что Ψ не зависит от φ_2 . Рассмотрим компоненту с $i = j = 3$. Для неё в силу этой независимости имеем

$$\nabla_3 \nabla_3 \Psi = -\Psi_1 \Gamma_{33}^1. \quad (2.9)$$

Тогда эта же компонента уравнения (2.6) перепишется как

$$2r^2 - 2\kappa^2 r^4 - 2\Psi_1 \Gamma_{33}^1 = -\dot{h}r^2. \quad (2.10)$$

Будем искать Ψ_1 в таком виде, чтобы

$$\Psi_1 \Gamma_{33}^1 = -\kappa^2 r^4 + \beta r^2, \quad (2.11)$$

где β – некоторая достаточно гладкая функция, зависящая от координат и параметров h , κ . Подставляя это в уравнение, имеем

$$\dot{h} = 2\beta - 2, \quad (2.12)$$

откуда видно, что β от координат зависеть не должна. Выбирая $\beta = \kappa^2$, то согласно (2.11) получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} \equiv \Psi_1 = -\frac{r\kappa^2}{1 - \kappa^2 r^2}, \quad (2.13)$$

откуда $\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2| + C(\phi_1)$. Теперь подставляя такой потенциал в компоненту с $i = j = 2$ уравнения (2.6) получаем, что $C(\phi_1) = 0$. Проверяя последнюю ненулевую компоненту с $i = j = 1$ того же уравнения, получим

$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h}, \quad (2.14)$$

что говорит о том, что полученный потенциал действительно подходит.

Таким образом, метрика (2.1) удовлетворяет однопетлевому уравнению ренорм-группы с потенциалом

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln |1 - \kappa^2 r^2|, \quad (2.15)$$

причем на параметры h и κ накладывается ограничение в виде следующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{h} = 2\kappa^2 - 2, \quad (2.16)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa}{h}. \quad (2.17)$$

Делая замену $h = \frac{2\kappa}{\hbar}$ и решая систему, получаем

$$\begin{cases} \hbar = \text{const}, \\ \kappa(t) = -\tanh \hbar t. \end{cases} \quad (2.18)$$

2.2. УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЙ ПРЕДЕЛ

Займемся решением в двухпетлевом порядке. Заметим, что преобразование координат, в которых в UV пределе метрика имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + e^{\alpha t} (A_{\mu\nu} e^{x_1} + B_{\mu\nu} e^{-x_1}) + \dots, \quad (2.19)$$

поможет найти следующую поправку по $\hbar$. Действительно, этот предел даст разложение по всем степеням $\hbar$ в пределе $t \rightarrow -\infty$, как показано в [10]. С другой стороны, исходная метрика допускает разложение по всем степеням t . Поэтому полученное разложение метрики в новых координатах можно использовать как краевое условие. Это схематично показано в Таблица 1.

Таблица 1 - Разложение по степеням e^t , $\hbar$ в UV и исходной метрике

$e^t \backslash \hbar$	0	1
0	+	+
1	+	?

По аналогии с заменой координат в случае $O(6)$ сигма-модели, описанной в [11], было найдено следующее преобразование координат, которое преобразует метрику к нужному виду:

$$\begin{cases} r = 1 + a \cdot e^{-x_1} \tau \\ \theta = \frac{x_2}{2} + b \cdot e^{-x_1} \tau \\ \phi = \frac{x_3}{2} + c \cdot e^{x_1} \tau \end{cases}, \quad (2.20)$$

где a, b, c - константы, $\tau = e^t$. Полный вид метрики в новых координатах x_1, x_2, x_3 указан в Приложении А. При разложении $\tau \rightarrow 0$ получим, что метрика имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\hbar} \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\hbar} e^t (A_{\mu\nu} e^{x_1} + B_{\mu\nu} e^{-x_1}) + \dots, \quad (2.21)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ -b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

После некоторых простых преобразований координат, метрику можно привести к виду

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{1}{2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \\ & + e^{\frac{t}{b^2}} e^{\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 + \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}} dx_2 \right) \\ & + e^{\frac{t}{b^2}} e^{-\frac{x_1}{b}} \left(dx_1 - \frac{ib}{\sqrt{1+b^2}} dx_3 \right), \end{aligned}$$

то есть получить так называемые скрининг-заряды [11]. В случае рассматриваемой модели, скрининг-заряды определяются следующим образом

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= b \mathbf{E}_1 + i\beta \mathbf{e}_1, & \alpha_2 &= b \mathbf{E}_1 - i\beta \mathbf{e}_1, \\ \alpha_3 &= -b \mathbf{E}_1 + i\beta \mathbf{e}_2, & \alpha_4 &= -b \mathbf{E}_1 - i\beta \mathbf{e}_2,\end{aligned}\tag{2.23}$$

где $(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а β определяется выражением

$$\beta = \sqrt{1 + b^2}.\tag{2.24}$$

Данные скрининг-заряды, следуя [11], схематично изображены на диаграмме Рисунок 2.

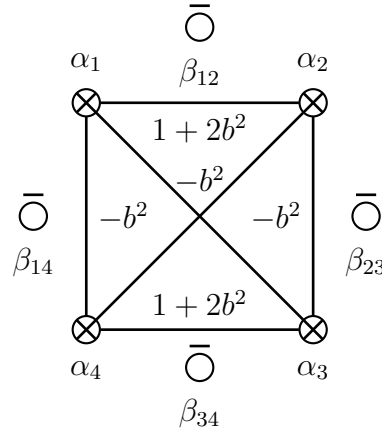


Рисунок 2 — Диаграмма скрининговых зарядов

2.3. ДВУХПЕТЛЕВОЕ РГ-УРАВНЕНИЕ

Метрика (2.1) во втором приближении ($\hbar^0$) не удовлетворяет РГ уравнению (1.3). Значит, нужно искать поправку. Мы знаем, какому краевому условию должна удовлетворять поправка к метрике в двухпетлевом случае (Таблица 1). Так как $G_{ij}^{(0)}$ не зависит от угловых координат φ_1, φ_2 , то логично предположить, что $G_{ij}^{(1)}$ тоже не будет от них зависеть. Еще предположим, что следующая поправка диагональна. Таким образом, мы предполагаем, что

$$G_{ij}^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} f \cdot G_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & g \cdot G_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & h \cdot G_{33}^{(0)} \end{pmatrix},\tag{2.25}$$

где $f = f(r, \kappa(t)), g = g(r, \kappa(t)), h = h(r, \kappa(t))$ - зависят только от r, κ . Попробуем искать поправку к метрике в виде

$$G_{ij}^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.26}$$

где $f(r)$ – произвольная функция, которая зависит только от r , так как мы предполагаем, что изометрии относительно φ_1 и φ_2 сохраняются.

Символы Кристоффеля порядка $\hbar^0$ и $\hbar^1$ легко вычисляются и равны:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1(0)} &= r \frac{\kappa^2 + 1 - 2\kappa^2 r^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} \\
\Gamma_{11}^{1(1)} &= -r \frac{\kappa^2 + 1 - 2\kappa^2 r^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} f(r) \\
\Gamma_{22}^{1(0)} &= -r \frac{(\kappa^2 - 1)(1 - r^2)}{1 - \kappa^2 r^2} \\
\Gamma_{22}^{1(1)} &= r \frac{(\kappa^2 - 1)(1 - r^2)}{1 - \kappa^2 r^2} f(r) \\
\Gamma_{33}^{1(0)} &= -r(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2) \\
\Gamma_{33}^{1(1)} &= r(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2) f(r)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

В этом приближении из (1.3) мы получаем следующие уравнения:

$$\dot{G}_{ij}^{(1)} + \partial_i V_j^{(1)} + \partial_j V_i^{(1)} - 2V_k^{(0)} \Gamma_{ij}^{k(1)} - 2V_k^{(1)} \Gamma_{ij}^{k(0)} = - \left(\beta_{ij}^{(1)}(G^{(0)}) + \beta_{ij}^0(G^{(0)} + G^{(1)}) - \beta_{ij}^0(G^{(0)}) \right). \tag{2.28}$$

Будем рассматривать общую схему перенормировки. Поправки к бета функции по $\hbar^1$ оказываются диагональными и равны:

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}) &= \frac{\hbar(2r^4 k^6 - 2r^2(r^2 + 2)k^4 + 4r^2 k^2 + 2k^2 - 2)}{(r^2 - 1)k(r^2 k^2 - 1)^3} + \\
&\quad + c_2 \frac{\hbar(r^4(4r^4 - 1)k^8 - 12r^6 k^6 + 4r^4 k^6 + 2r^2 k^6 + 3(3r^4 - 4r^2 + 1)k^4 + 6r^2 k^2 - 3)}{(r^2 - 1)k(r^2 k^2 - 1)^3} \\
\beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) &= \frac{(r^2 - 1)\hbar(-2r^6 k^6 + 2r^4 k^6 + 4r^4 k^4 - 2r^2 k^4 - 4r^2 k^2 + 2)}{k(r^2 k^2 - 1)^2} + \\
&\quad + c_2 \frac{(r^2 - 1)\hbar(2r^6 k^6 + r^2 k^6 - 6r^4 k^4 + 2r^2 k^4 + 3(r^2 - 2)k^2 + k^4 + 3)}{k(r^2 k^2 - 1)^2} \\
\beta_{33}^{(1)}(G^{(0)}) &= - \frac{r^2 \hbar(k^2 - 1)(-2r^4 k^4 + 2r^2 k^4 + 2r^2 k^2 - 2)}{k(r^2 k^2 - 1)^2} - \\
&\quad - c_2 \frac{r^2 \hbar(k^2 - 1)(r^4(2r^2 - 1)k^6 + r^2(2 - 9r^2)k^4 + 3(4r^2 - 1)k^2 - 3)}{k(r^2 k^2 - 1)^2} \\
\beta_{11}^0(G^{(0)} + G^{(1)}) - \beta_{11}^0(G^{(0)}) &= \frac{f'(r)(r^2 k^2 - 1)^2(r^4 k^2 - 2r^2 + 1)}{2r(r^2 - 1)(r^2 k^2 - 1)^3} \\
\beta_{22}^0(G^{(0)} + G^{(1)}) - \beta_{22}^0(G^{(0)}) &= \frac{\hbar(r^2 - 1)(k^2 - 1)(rf'(r)(r^2 k^2 - 1) - 4f(r))}{2(r^2 k^2 - 1)^2} \\
\beta_{33}^0(G^{(0)} + G^{(1)}) - \beta_{33}^0(G^{(0)}) &= \frac{1}{2} \hbar r ((r^2 - 1)f'(r) + 4f(r))(r^2 k^2 - 1)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Из недиагональных уравнений получаем условие на $V^{(1)}$

$$\begin{cases} 2V_r^{(1)} \Gamma_{r\varphi_1}^{r(0)} = \partial_r V_{\varphi_1}^{(1)} - \partial_{\varphi_1} V_r^{(1)} \\ 2V_r^{(1)} \Gamma_{r\varphi_2}^{r(0)} = \partial_r V_{\varphi_2}^{(1)} - \partial_{\varphi_2} V_r^{(1)}, \end{cases} \tag{2.30}$$

которое имеет частное решение $V_r^{(1)} = V(r)$ и $V_\varphi = 0$. Запишем второе и третье диагональное уравнение:

$$\begin{cases} -2V_r^{(1)}\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(0)} - 2V_r^{(0)}\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} \\ -2V_r^{(1)}\Gamma_{\varphi_1\varphi_2}^r{}^{(0)} - 2V_r^{(0)}\Gamma_{\varphi_2\varphi_2}^r{}^{(1)} = -(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Заметим, что это два разных уравнения на $V_r^{(1)}$, значит они должны быть совместными, то есть

$$\frac{\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(0)}}{\Gamma_{\varphi_2\varphi_2}^r{}^{(0)}} = \frac{\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(1)}}{\Gamma_{\varphi_2\varphi_2}^r{}^{(1)}} = \frac{(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)}}{(\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)}}. \quad (2.32)$$

Несложно проверить, что

$$\frac{\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(0)}}{\Gamma_{\varphi_2\varphi_2}^r{}^{(0)}} = \frac{\Gamma_{\varphi_1\varphi_1}^r{}^{(1)}}{\Gamma_{\varphi_2\varphi_2}^r{}^{(1)}} = \frac{\kappa^2 - 1}{(1 - \kappa^2 r^2)^2}, \quad (2.33)$$

а значит

$$(\beta_{\varphi_1\varphi_1})^{(1)} = (\beta_{\varphi_2\varphi_2})^{(1)} \frac{\kappa^2 - 1}{(1 - \kappa^2 r^2)^2}. \quad (2.34)$$

Отсюда получим, что

$$2f(r)\hbar(\kappa^2 r^4 - 1) = \beta_{22}^{(1)}(G^{(0)}) - \frac{(1 - \kappa^2 r^2)^2}{\kappa^2 - 1} \beta_{11}^{(1)}(G^{(0)}), \quad (2.35)$$

то есть мы нашли $f(r)$ для любого параметра c_2 . Теперь можно найти $V_r^{(1)}$ из (2.31) и получить ограничения на $\hbar$ и κ из уравнения

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)}\Gamma_{rr}^r{}^{(0)} + 2V_r^{(0)}\Gamma_{rr}^r{}^{(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)} \quad (2.36)$$

Для этого нужно выразить из (2.31) $V(r)$, подставить его в (2.3) и выбрать такую схему перенормировки, при которой решения для $\kappa, \hbar$ не будут зависеть от координат. Возможно, такой схемы не найдется. В таком случае нужно будет попробовать рассмотреть более общий случай, в котором лишь $h(r, \kappa(t)) = 0$, где h - некоторая функция из (2.25).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе изучалась $O(4)$ -сигма модель в однопетлевом и двухпетлевом случаях. Показано, что метрика

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar} \left(\frac{dr^2}{(1 - r^2)(1 - \kappa^2 r^2)} + \frac{1 - r^2}{1 - \kappa^2 r^2} d\varphi_1^2 + r^2 d\varphi_2^2 \right),$$

удовлетворяет уравнению ренормгруппы в первой петле.

Были совершены попытки найти поправку к метрике в предположении, что лишь одна компонента поправки ненулевая. Это предположение не принесло ожидаемого результата, поэтому для нахождения поправки первого порядка по $\hbar$ к метрике было

решено использовать другой подход, а именно, рассмотрение ультрафиолетового предела. Найдены координаты, в которых метрика имеет определенный вид, содержащий скрининг-заряды. Получены скрининг-заряды. Получено уравнение на поправку к метрике, представленной в диагональном виде. Решение данного уравнения в ультрафиолетовом пределе должно давать тот же результат, который мы получили при UV-разложении метрики со скрининг-зарядами в новых координатах. В предположении, что поправка к метрике в двухпетлевом случае имеет вид

$$G_{ij}^{(1)} = \hbar \begin{pmatrix} f(r)G_{rr}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найжены выражения для $f(r)$, V_i . Дальнейшая работа заключается в нахождении ограничений на параметры $\hbar, \kappa$. Это делается путем анализа уравнения

$$\dot{f}(r) + 2\partial_r V_r^{(1)} + 2V_r^{(1)}\Gamma_{rr}^{r(0)} + 2V_r^{(0)}\Gamma_{rr}^{r(1)} = -(\beta_{rr})^{(1)}$$

и выбором подходящей схемы перенормировки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] M. Gell-Mann and M. Lévy, *The axial vector current in beta decay*, *Il Nuovo Cimento* **16** (1960) 705.
- [2] K. Zarembo, *Integrability in sigma-models*, in *Les Houches Summer School: Integrability: From Statistical Systems to Gauge Theory*, vol. 106 of *Les Houches Lect. Notes*, pp. 205–247, Oxford University Press (2019), DOI.
- [3] M.D. Scadron, F. Kleefeld and G.E. Rupp, *Pion chiral symmetry breaking in the quark-level linear sigma model and chiral perturbation theory*, *arXiv: High Energy Physics - Phenomenology* (2006) [[arXiv:hep-ph/0601196](#)].
- [4] M. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp and E. van Beveren, *Meson form factors and the quark-level linear σ model*, *Nuclear Physics A* **724** (2003) 391.
- [5] S.C. Zhang, H.J. Schulz and T. Ziman, *GROUND STATE ENERGIES OF THE NONLINEAR SIGMA MODEL AND THE HEISENBERG SPIN CHAINS*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1110.
- [6] P. Fendley, *Critical points in two-dimensional replica sigma models*, 2000.
- [7] M.C. Abbott, Z. Bajnok, J. Balog, A. Hegedűs and S. Sadeghian, *Resurgence in the $o(4)$ sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) .
- [8] V.A. Fateev and A.V. Litvinov, *Integrability, duality and sigma models*, *Journal of High Energy Physics* (2018) [[arXiv:1804.03399](#)].
- [9] M. Alfimov and A. Litvinov, *On loop corrections to integrable 2d sigma model backgrounds*, *Journal of High Energy Physics* **2022** (2022) .
- [10] V. Fateev, *Integrable deformations of affine toda theories and duality*, *Nuclear Physics B* **479** (1996) 594.
- [11] A.V. Litvinov and L.A. Spodyneiko, *On dual description of the deformed $o(n)$ sigma model*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) 139.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Компоненты невозмущенного метрического тензора $O(4)$ сигма-модели в новых координатах

$$G_{11} = \frac{a^2 (1 - \tau^2) \tau^2 e^{-2x_1}}{\hbar ((a\tau^2 e^{-x_1} + 1)^2 - 1) ((\tau^2 - 1)^2 (a\tau e^{-x_1} + 1)^2 - 1)} + \frac{b^2 (1 - \tau^2) \tau^2 e^{-2x_1} (a\tau e^{-x_1} + 1)^2}{\hbar} + \frac{c^2 \tau^2 e^{2x_1} \left(-(1 - \tau^2) (a\tau^2 e^{-x_1} + 1)^2 - \tau^4 + 1 \right)}{\hbar - \hbar (\tau^4 - 1)^2 (a\tau e^{-x_1} + 1)^2},$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{b\tau (1 - \tau^2) e^{-x_1} (a\tau e^{-x_1} + 1)^2}{2\hbar},$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{c\tau e^{x_1} \left(-(1 - \tau^2) (a\tau^2 e^{-x_1} + 1)^2 - \tau^4 + 1 \right)}{2 (\hbar - \hbar (\tau^4 - 1)^2 (a\tau e^{-x_1} + 1)^2)},$$

$$G_{22} = \frac{(1 - \tau^2) (a\tau e^{-x_1} + 1)^2}{4\hbar},$$

$$G_{23} = G_{32} = 0,$$

$$G_{33} = -\frac{(1 - \tau^2) (a\tau e^{-x_1} + 1)^2 + \tau^2 - 1}{4 (\hbar - \hbar (\tau^2 - 1)^2 (a\tau e^{-x_1} + 1)^2)},$$