

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
ТЕМНЫХ АТОМОВ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ**

Студент	_____ Д. Е. Полянский
Научный руководитель, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Ю. Хлопов

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
ТЕМНЫХ АТОМОВ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ**

Студент

_____ Д. Е. Полянский

Научный руководитель,

д.ф.-м.н., проф.

_____ М. Ю. Хлопов

Рецензент,

к.ф.-м.н.

_____ А. Г. Майоров

Секретарь ГЭК,

к.ф.-м.н.

_____ А. А. Кириллов

Зав. каф. №40,

д.ф.-м.н., проф.

_____ М. Д. Скорохватов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 XHe и его структура	4
1.1 Частица X и её свойства	4
1.2 Структура XHe	4
2 Условия на столкновительность XHe	5
3 Образование связанных состояний XHe	6
3.1 Оценка параметров γ, ϱ для случая $n = 1$ (атом Бора)	7
3.2 Численный расчёт α_9 и α_4 для $n = 1$	7
3.3 Оценка параметров γ, ϱ для случая $n > 1$ (атом Томсона)	10
3.4 Численный расчёт α_9 и α_4 для $2 \leq n \leq 5$	10
3.5 Вывод из численных расчётов	12
4 Определение концентрации $X(\text{He})_2$ в ранней вселенной	12
4.1 Базовая скорость радиационного захвата $X\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow X(\text{He})_2^{+2} + \gamma$. .	13
4.2 Скорость радиационного захвата второго гелия с учётом бозонной структуры	13
4.2.1 Самосогласованное описание состояния $X(\text{He})_2$ в Хартри–Фоковском приближении	14
4.2.2 Дополнение к потенциалам	14
4.2.3 Итоговое уравнение Хартри–Фока и его решение	14
4.2.4 Алгоритм решения	15
4.2.5 Квантово-механический вывод коэффициента радиационного захвата	16
4.2.6 Матричный элемент радиационного захвата	16
4.2.7 Вывод коэффициента скорости реакции σv через правило Ферми.	16
4.2.8 Максвелловское усреднение	17
4.3 Численная оценка относительной концентрации $X(\text{He})_2$	18
4.3.1 Теоретический вывод итоговой формулы относительной концентрации	18
4.3.2 Численная оценка, выводы	19
5 Заключение	20
Список использованных источников	21

ВВЕДЕНИЕ

Одна из ключевых и очень важных задач современной физики - изучение скрытой массы. Она составляет существенную часть от общей плотности энергии нерелятивистского вещества Вселенной.

Изучение скрытой массы на внегалактических масштабах началось с работ Фрица Цвикки в 1933 году [1]. Он обнаружил значительный разброс радиальных скоростей восьми галактик в скоплении Кома и пришел к выводу, что полная масса скопления должна быть в 400 раз больше, чем масса входящих звёзд для его устойчивости.

Другая проблема с распределением масс спиральных галактик была выявлена через исследование их кривых вращения в 1939 году Хоресом Бэбкоком [2]. В его диссертации была представлена подробная кривая вращения галактики туманности Андромеды, показавшая, что скорость вращения звезд вокруг центра не уменьшалась обратно пропорционально расстоянию до центра, как предсказывала классическая небесная механика, а оставалась почти неизменной. Эти отклонения были объяснены возможным существованием значительно большей массы галактик, чем та, которую можно наблюдать напрямую.

Такие наблюдения стали отправной точкой для поисков нового типа материи, позже названной скрытой массой. Наличие этой невидимой формы материи можно выявить по ее гравитационному влиянию на известное барионное вещество.

Измерения Planck и WMAP [3] показывают, что вклад скрытой массы в полную плотность вещества в современной Вселенной около 25%, что в 5 раз больше, чем вклад барионной материи. Предполагается, что скрытая масса состоит из новых частиц, отсутствующих в Стандартной Модели.

Целью данной работы является изучение составной скрытой массы и её связанных состояний в период первичного нуклеосинтеза. Ожидается оценка возможности реакций образования связанных состояний с частицами скрытой массы. Требуется анализ реакций с участием данных частиц, расчёты концентраций новых состояний и дальнейшее их изучение. Ожидается проверка согласуемости вклада таких объектов с наблюдаемой космологической плотностью материи.

1. XHe И ЕГО СТРУКТУРА

1.1. ЧАСТИЦА X И ЕЁ СВОЙСТВА

Существуют серьёзные экспериментальные ограничения на аномальные изотопы, которые образуются, если предположить существование гипотетически стабильных частиц с положительным или нечётным отрицательным зарядом, которые могли бы решить проблему скрытой массы. [4]

В данной работе рассматривается модель составной скрытой массы с участием гипотетически стабильных частиц X с зарядом $-2n$. При $T \simeq 60\text{--}100\text{ кэВ}$ первичный ${}^4\text{He}$, численно превосходящий стабильные частицы X^{-2} в $\sim 10^5$ раз [5], мгновенно захватывает их, образуя нейтральные тёмные атомы X-гелия (XHe). Радиус Бора $R \simeq 2 \times 10^{-13}\text{ см}$ и энергия связи $I_0 \approx 1.6\text{ МэВ}$ делают ионизацию XHe после первичного нуклеосинтеза невыгодной, а эффективное ядерное сечение $\sigma \sim \pi R^2 \approx 10^{-25}\text{ см}^2$ минимизирует перенос импульса. [6].

Стоит подчеркнуть, что свойства частицы X, такие как её масса и заряд, принципиально влияют на формирование стабильных связей XHe. Это обусловлено необходимостью компенсации кулоновского взаимодействия и устойчивостью атомоподобного состояния в ранней Вселенной.

Предполагается, что во всех моделях X-гелия X ведет себя как лептон или как специфический кластер тяжелых кварков новых семейств с подавленным адронным взаимодействием. [7]

Согласно результатам, полученным на эксперименте ATLAS, нижнее ограничение на массу частицы X составляет около 1 ТэВ [5].

1.2. СТРУКТУРА XHe

Далее мы будем рассматривать "тёмные" атомы XHe - систему, связанную кулоновским взаимодействием, из частицы X и n α -частиц (ядер ${}^4\text{He}$).

Структура данного состояния зависит от параметра a [8].

$$a = \alpha Z_x Z_\alpha A m_p R, \quad (1.1)$$

где α - постоянная тонкой структуры; Z_x, Z_α - зарядовые числа частицы X и n α -частиц соответственно; A, R - массовое число и радиус n α -частичного ядра соответственно, m_p - масса протона.

При $0 < a < 1$ связанное состояние выглядит как атом Бора с отрицательно заряженной частицей в центре и ядром $n\text{He}$, движущимся по боровской орбите.

При $1 < a < \infty$ связанные состояния выглядят как атомы Томсона, в которых $n\text{He}$ совершает колебания вокруг тяжелой отрицательно заряженной частицы.

В данной работе мы будем рассматривать оба варианта структуры для подробных расчётов. В модели атома Томсона мы пренебрегаем размером частицы X в центре. При достаточно больших n структура отдельных ядер ${}^4\text{He}$ разрушается, образуя сферически симметричный заряженный шар. По итогу мы имеем сферическое ядро $n\text{He}$, внутри которого, в центре, находится точечная частица X.

При внешнем воздействии (выведение из равновесного состояния) ядро $n\text{He}$ начинает колебаться вокруг частицы X.

Тогда можно записать потенциал кулоновского взаимодействия между $n\text{He}$ и X в зависимости от расстояния r между X и центром $n\text{He}$.

$$U_{\text{XHe}}(r) = \begin{cases} -\frac{4e^2n^2}{2R} \left(3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), & r < R \\ -\frac{4e^2n^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (1.2)$$

где e - элементарный заряд, n - число He на орбите X, R - радиус He.

Расчёты в [9] показывают, что амплитуда таких колебаний будет $\sim 10^{-16}$ см, при этом размеры "тёмного" атома $R_{\text{XHe}} > 10^{-13}$ см. Это свидетельствует об устойчивости системы XHe.

2. УСЛОВИЯ НА СТОЛКНОВИТЕЛЬНОСТЬ XHe

В рассматриваемой теории XHe образуется после первичного нуклеосинтеза при $T \approx 100$ кэВ. Для дальнейшего исследования образования связанных состояний "тёмных" атомов нужно оценить, будет ли столкновительным газ, состоящий из XHe, при $T \leq 100$ кэВ.

Зависимость столкновительности газа от температуры и числа He важна для понимания условий, при которых частицы формируют стабильные системы. Это оказывает существенное влияние на последующие процессы формирования связанных состояний XHe.

Выведем общую зависимость температуры, при которой возможны столкновения $\text{XHe} + \text{XHe}$, от числа n α -частиц в атоме XHe. Для этого запишем условие: характерное время взаимодействия τ меньше времени расширения t :

$$\tau = \frac{1}{vn_X\sigma} < t, \quad (2.1)$$

где $\sigma = \pi R^2$ - эффективное сечение,

$R = 1.2 \cdot 10^{-13} (4n)^{\frac{1}{3}}$ фм - Радиус атома XHe без учёта размера частицы X,

$v = \sqrt{\frac{3T}{m_X}}$ - тепловая скорость XHe,

$t = 1.7 \left(\frac{1\text{МэВ}}{T} \right)^2$ с - время расширения Вселенной.

Осталось оценить концентрацию n_X , зная, что вклад скрытой массы в полную плотность вещества в современной Вселенной около 25%:

$$n_X = \frac{\rho_X}{m_X} = \frac{\rho_{X,0}}{m_X} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = \frac{\rho_{X,0}}{m_X} (z+1)^3 = \frac{\Omega_{X,0} \rho_c}{m_X} (z+1)^3 = \frac{5\Omega_{b,0} \rho_c}{m_X} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \quad (2.2)$$

берём: $\Omega_{b,0} = 0.05$ —вклад барионов в общую плотность вселенной на сегодняшний день,

$T_0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ эВ — температура реликтового излучения сегодня,

$\rho_c = 4.7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{GeV}}{\text{cm}^3}$ — критическая плотность Вселенной сегодня,

m_X — масса частицы X.

Подставляя, получаем:

$$t = 1.7(\text{с}) \left(\frac{1\text{МэВ}}{T} \right)^2 > \frac{1}{v n_X \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3T}{m_X}} c \pi R^2 \frac{5\Omega_{b,0} \rho_c}{m_X} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3}.$$

Выражая T , получим:

$$T \gtrsim \frac{m_X}{n^{\frac{4}{9}}} \cdot 1.1 \cdot 10^{-8} \quad (2.3)$$

т.е взяв $m_X = 1$ ТэВ можно оценить:

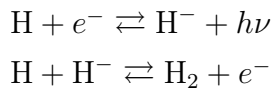
$$T > \frac{11 \text{ кэВ}}{n^{\frac{4}{9}}} \quad (2.4)$$

В таком случае при $T = 100$ кэВ XHe будет столкновительным для любого n . Но взяв $m_X = 10$ ТэВ для OHe ($n = 1$) столкновительность пропадёт при $T = 100$ кэВ. Хотя остальные виды XHe ($n > 1$) всё ещё будут столкновительными.

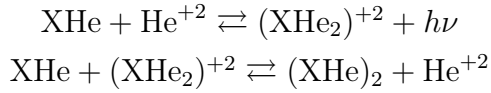
3. ОБРАЗОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ XHe

После доказательства столкновительности XHe в рассматриваемый период, требуется построить математическую модель и рассчитать коэффициенты скоростей соответствующих реакций.

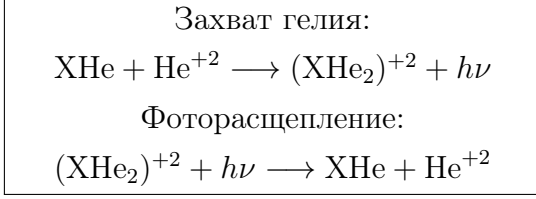
В нулевом приближении для образования связанных состояний XHe можно привести аналогию с образованием молекулы H_2 в межзвёздных облаках [10]:



Тогда по аналогии:



Рассмотрим подробнее две реакции:



Для них рассчитаем α_9 и α_4 - коэффициенты скорости фоторасщепления и образования соответственно.

В [10] это делается при помощи поперечного сечения фоторасщепления:

$$\sigma(\nu) = \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma k^3}{(1 - \gamma \varrho)(\gamma^2 + k^2)^3} \text{ см}^2, \quad (3.1)$$

где k - волновое число отщеплённого электрона (в нашем случае He), γ - параметр, связанный со сродством электрона к водороду, и ϱ - эффективная дальность. k , γ и ϱ выражены в атомных единицах.

3.1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ γ, ϱ ДЛЯ СЛУЧАЯ $n = 1$ (АТОМ БОРА)

Параметр γ может быть рассчитан из предположения, что [10]
 $\gamma = E((\text{XHe})^{+2}) - E((\text{XHe}))$, где E - соответствующие энергии ионизации атомов.

$$\gamma = -\frac{1.6}{Z_{\text{eff}}^2} + 1.6 = -\frac{1.6}{2^2} + 1.6 = 1.2 \text{ МэВ} \approx 0.0013 \text{ а.е.м.} \quad (3.2)$$

Параметр ϱ можно оценить как $\varrho = 2.646$ а.е.- параметр эффективной дальности, которая равна радиусу Ван-дер-Ваальса He.

В итоге получаем:

$$\sigma(\nu) = \frac{8.94 \cdot 10^{-21} k^3}{(1.69 \cdot 10^{-6} + k^2)^3} \text{ см}^2.$$

3.2. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ α_9 И α_4 ДЛЯ $n = 1$

В [10] коэффициент скорости фоторасщепления:

$$\alpha_9 = \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{4F_{\nu}\sigma(\nu)d\nu}{h\nu}. \quad (3.3)$$

Где $F_{\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$ - поток излучения А.Ч.Т., выраженный формулой Планка. Взяв $h\nu = 1.6(k^2 + \gamma^2)$ МэВ, можно получить для минимальной частоты излучения ν_1 при $k_1 = 0$:

$$\alpha_9 = \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma k^3}{(1 - \gamma \varrho)(\gamma^2 + k^2)^3} \text{ см}^2 \cdot \frac{d\nu}{h\nu} \quad (3.4)$$

$$= C_1 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\left(e^{\frac{(k^2 + \gamma^2) \cdot 1.6 \text{ МэВ}}{k_b T}} - 1 \right)} \frac{k^4 dk}{(k^2 + \gamma^2)} \quad (3.5)$$

$$= C_1 \beta(T) \quad (3.6)$$

где $C_1 = \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma}{(1 - \gamma \varrho)} \text{ см}^2 \cdot \frac{16\pi}{c^2 h^3} \cdot (1.6 \text{ МэВ})^3 \approx 2.82 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$.

Оценить α_4 можно через [10], используя Максвелловское распределение для газа:

$$\alpha_4 = \int_0^\infty \left(\frac{m_{\text{He}}}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_{\text{He}} v^2}{2kT}} v \sigma(v) 4\pi v^2 dv. \quad (3.7)$$

Сечение захвата:

$$\sigma(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{m v c} \right)^2 \frac{\sigma(\nu)}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Сделав замену в интеграле, можно получить:

$$\alpha_4 = C_2 \cdot \frac{1}{(k_b T)^{3/2}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\left(e^{\frac{(k^2 + \gamma^2) \cdot 1.6 \text{ МэВ}}{k_b T}} - 1 \right)} \frac{k^4 dk}{(k^2 + \gamma^2)} \quad (3.8)$$

$$= C_2 \cdot \frac{1}{(k_b T)^{3/2}} \cdot \beta(T) \quad (3.9)$$

где $C_2 = \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma}{(1 - \gamma \varrho)} \text{ см}^2 \cdot \left(\frac{m_{\text{He}}}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{m_{\text{He}}^3 c^2} \cdot (1.6 \text{ МэВ})^3 = 1.12 \cdot 10^{-15} \frac{\text{МэВ}^{3/2} \text{ см}^3}{\text{с}}$.

Само уравнение для концентрации $(\text{XHe})^{+2}$ можно получить из

$$\frac{dn_{(\text{XHe})^{+2}}}{dt} = K_4 \cdot n_{\text{XHe}} n_{\text{He}} - K_9 \cdot n_{(\text{XHe})^{+2}}, \quad (3.10)$$

где $n_{(\text{XHe})}$, n_{XHe} , n_{He} - концентрации соответствующих состояний.

Константы скорости реакции K_9 , K_4 рассчитываются домножением α_9 , α_4 на коэффициент разбавления [10] $W \approx 10^{-14}$.

$$K_9 = W \cdot \alpha_9$$

$$K_4 = W \cdot \alpha_4$$

После численного моделирования, получены значения K_9 (Рисунок 1) и K_4 (Рисунок 2) в интервале температур $10 \text{ кэВ} \leq T \leq 100 \text{ кэВ}$.

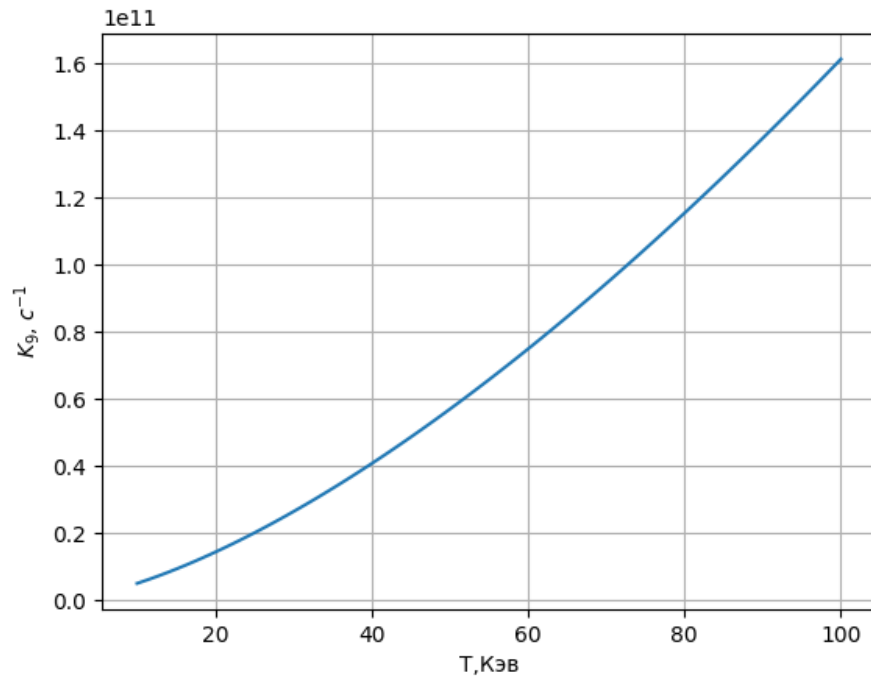


Рисунок 1 — Коэффициент скорости фоторасщепления K_9 при $n = 1$

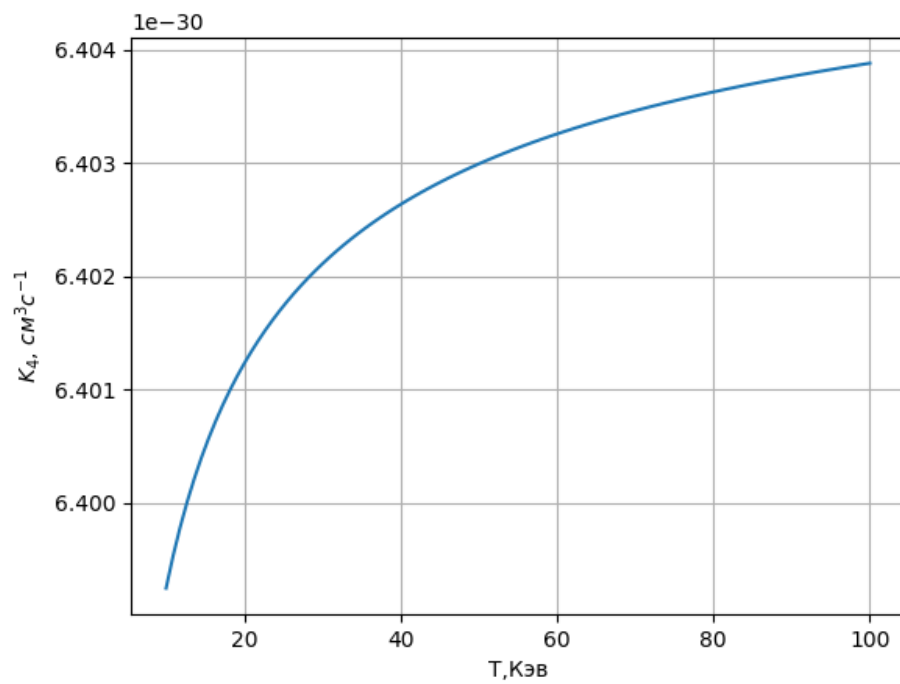


Рисунок 2 — Коэффициент скорости образования K_4 при $n = 1$

3.3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ γ, ϱ ДЛЯ СЛУЧАЯ $n > 1$ (АТОМ ТОМСОНА)

Для атома Томсона расчет параметров γ, ϱ выполняется другим способом.

$$\gamma = E((\text{ХНе})^{+2}) - E((\text{ХНе}))$$

Энергия связи представляется через формулу Вайцеккера:

$$E(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \frac{a_5}{A^{3/4}}, \quad (3.11)$$

где A, Z - массовое и зарядовое числа соответственно, $n_1 - n_5$ - коэффициенты в формуле Вайцеккера.

$$\text{При этом } E(\text{ХНе}) = E(4n, 2n), \quad E((\text{ХНе})^{+2}) = E(4(n+1), 2(n+1)).$$

$$a_1 \approx 15.75 \text{ МэВ},$$

$$a_2 \approx 17.8 \text{ МэВ},$$

$$a_3 \approx 0.711 \text{ МэВ},$$

$$a_4 \approx 23.7 \text{ МэВ},$$

$$a_5 \approx 34 \text{ МэВ} - \text{всегда чётно-чётные.}$$

Тогда :

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= E(4(n+1), 2(n+1)) - E(4n, 2n) = \\ &= 4a_1 + 2 \cdot 2^{1/3} a_2 (n^{2/3} - (n+1)^{2/3}) - 2 \cdot 2^{1/3} a_3 ((n+1)^{5/3} - n^{5/3}) + \frac{a_5 \left(\frac{1}{(n+1)^{3/4}} - \frac{1}{n^{3/4}} \right)}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

При расчётах используется константа перевода $c = 0.00107 \text{ а.е.м./МэВ}$.

В расчётах роль $\varrho(n)$ меньше, чем $\gamma(n)$. В [9] при численном моделировании для небольших $n = 2 - 5$ параметр эффективной дальности остаётся порядка $\varrho(n) \sim 2 - 3 \text{ а.е.}$

3.4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ α_9 И α_4 ДЛЯ $2 \leq n \leq 5$

Из предыдущих расчётов:

$$\alpha_9 = C_1(n) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\left(e^{\frac{(k^2 + \gamma^2(n)) \cdot 1.6 \text{ МэВ}}{k_B T}} - 1 \right)} \frac{k^4 dk}{(k^2 + \gamma^2(n))} = C_1(n) \beta(T, n), \quad (3.12)$$

$$\text{где } C_1 = \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma(n)}{(1 - \gamma(n) \varrho)} \text{ см}^2 \cdot \frac{16\pi}{c^2 \hbar^3} \cdot (1.6 \text{ МэВ})^3 \approx 2.16 \cdot 10^{25} \cdot \frac{\gamma(n)}{1 - \gamma(n) \varrho} \text{ с}^{-1}.$$

Аналогично:

$$\alpha_4 = C_2(n) \cdot \frac{1}{(k_b T)^{3/2}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\left(e^{\frac{(k^2 + \gamma^2(n)) \cdot 1.6 \text{ МэВ}}{k_b T}} - 1 \right)} \frac{k^4 dk}{(k^2 + \gamma^2(n))} = C_2(n) \cdot \frac{1}{(k_b T)^{3/2}} \cdot \beta(T, n), \quad (3.13)$$

$$\text{где } C_2(n) = \frac{6.85 \cdot 10^{-18} \gamma(n)}{(1 - \gamma(n) \varrho)} \text{ см}^2 \cdot \left(\frac{m_{\text{He}}}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{m_{\text{He}}^3 c^2} \cdot (1.6 \text{ МэВ})^3 \approx \\ \approx 8.59 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{\gamma(n)}{1 - \gamma(n) \varrho} \frac{\text{МэВ}^{3/2} \text{ см}^3}{c}.$$

Произведено домножение на коэффициент разбавления и численное моделирование.

$$K_9(n) = C_1(n) \cdot W \cdot \beta(T, n)$$

$$K_4(n) = C_2(n) \cdot W \cdot \frac{1}{(k_b T)^{3/2}} \cdot \beta(T, n).$$

Ниже результат численного моделирования: коэффициент скорости фоторасщепления $K_9(n)$ (Рисунок 3) и коэффициент скорости образования $K_4(n)$ (Рисунок 4).

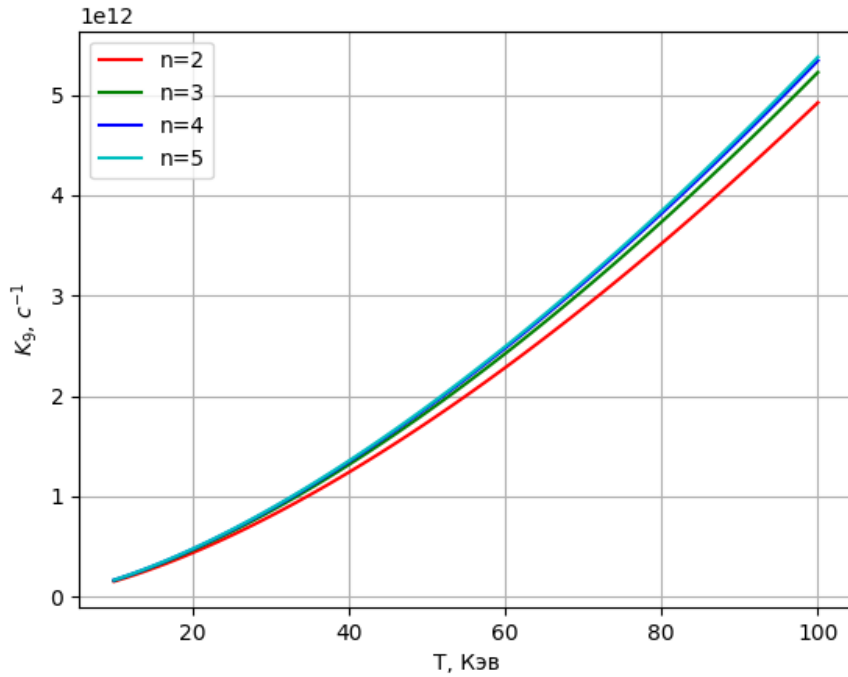


Рисунок 3 — Коэффициент скорости фоторасщепления $K_9(n)$ при $2 \leq n \leq 5$

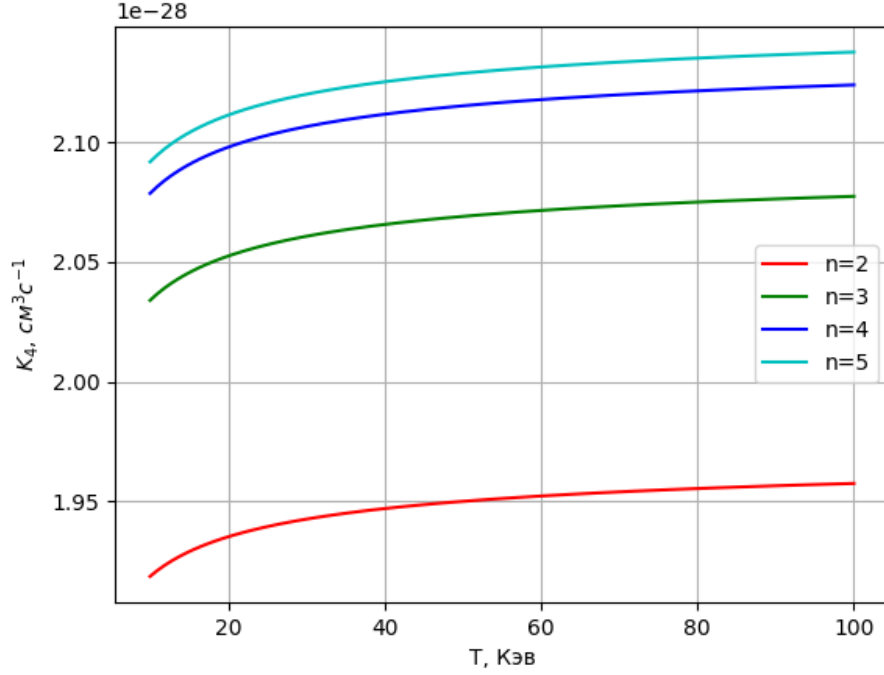


Рисунок 4 — Коэффициент скорости образования $K_4(n)$ при $2 \leq n \leq 5$

3.5. ВЫВОД ИЗ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Изучая реакцию с полученными значениями $K_4(n)$ и $K_9(n)$:

$$\frac{dn_{(\text{XHe})^{+2}}}{dt} = K_4 \cdot n_{\text{XHe}} n_{\text{He}} - K_9 \cdot n_{(\text{XHe})^{+2}} \quad (3.14)$$

можно сделать вывод о том, что скорость фоторасщепления на порядки выше скорости образования. При расчётах не учитывается бозонная структура гелия. Подобный метод оценки нуждается в пересмотре.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ $\text{X}(\text{He})_2$ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

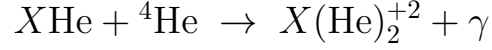
Для дальнейшего изучения реакций с XHe требуется определить концентрацию $\text{X}(\text{He})_2$ при температурах $T = 10 - 100$ кэВ.

Ниже рассматривается XHe как нейтральная система. Не находится на боровской орбите частицы X^{-2}

Реакция радиационного захвата второй α -частицы на орбиту X :



4.1. БАЗОВАЯ СКОРОСТЬ РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА



Радиационный захват ядра подробно рассматривается в [6]. Частный случай $A \equiv \text{He}$ даёт формулу коэффициента скорости реакции:

$$\sigma v = \frac{f \pi \alpha}{m_p^2} \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{A}\right)^2 T \sqrt{\frac{1}{A m_p E}}, \quad (4.2)$$

где $f \simeq 10^{-3}$ — параметр изоспинового подавления, α — постоянная тонкой структуры, m_p — масса протона, Z и A — заряд и массовое число ядра-мишени (He), T — температура плазмы, E — энергия связи конечного атома $X(\text{He})_2$.

Для реакции используем значения

$$\frac{Z}{A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad E = 1.6 \text{ МэВ}.$$

Подстановка величин в (4.2) даёт линейную зависимость от температуры: значения коэффициента скорости реакции после расчётов получаются порядка $\sim 10^{-24} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$. Результаты численного моделирования представлены на рисунке 5.

У данного метода оценки есть существенный недостаток: бозонная структура гелия не учитывается. Так же как и снятие запрета Паули.

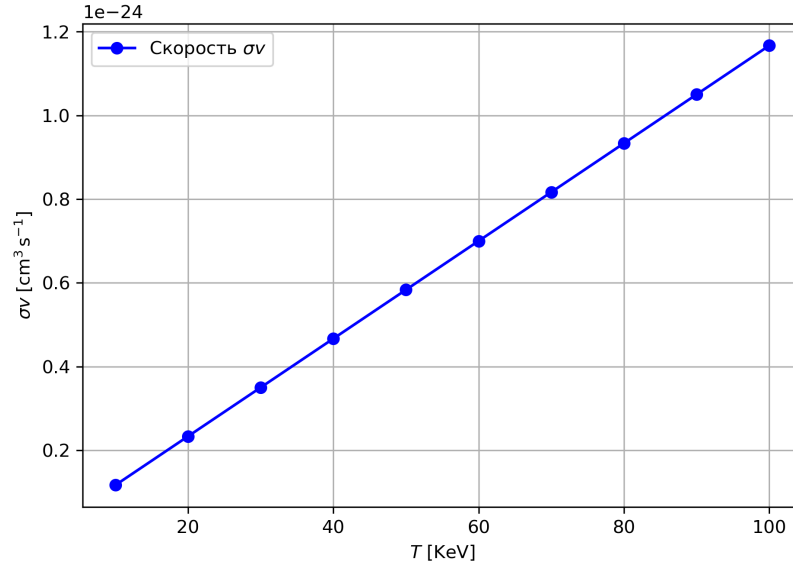


Рисунок 5 — Зависимость коэффициента скорости реакции σv от температуры без учёта бозонной структуры He

4.2. СКОРОСТЬ РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА ВТОРОГО ГЕЛИЯ С УЧЁТОМ БОЗОННОЙ СТРУКТУРЫ

Для учёта бозонной структуры требуется вывести уравнение (4.2), полученное в [6]. Рассмотрим модель бозонного атома [11, 12]. Авторы выводят вариант уравне-

ния Хартри–Фока для атомов, в которых несколько одинаковых заряженных бозонов (например, π^- -мезонов) одновременно связаны с тяжёлым ядром.

4.2.1. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЯ $X(\text{He})_2$ В ХАРТРИ–ФОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работе [11] получено уравнение Хартри–Фока для N_b идентичных бозонов в атомных единицах:

$$\left[-\frac{\Delta}{2} - \frac{Z}{r} + (N_b - 1) \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \chi_j(\mathbf{r}) = E_j \chi_j(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

где $\rho(\mathbf{r}') = \sum_k |\chi_k(\mathbf{r}')|^2$, $\chi_j(\mathbf{r})$ -волновая функция j -ого бозона, Z — заряд тяжёлого центра, E_j - энергия связи, N_b - число бозонов.

Для состояния $X(\text{He})_2$ имеем $N_b = 2$ и $Z = Z_X = -2$.

Оба α -ядра заполняют одну s -орбиталь. Подстановка $\chi_1 = \chi_2 \equiv \chi$ даёт

$$\rho(\mathbf{r}') = 2|\chi(\mathbf{r}')|^2, \quad (4.4)$$

$$(N_b - 1) \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = 2 \int \frac{|\chi(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = U_H(r). \quad (4.5)$$

4.2.2. ДОПОЛНЕНИЕ К ПОТЕНЦИАЛАМ

Добавим ядерное α - α взаимодействие, которое описывается потенциалом Али–Бодмера [13]. Он представляет собой сумму сильного короткодействующего отталкивания и длиннодействующего мягкого притяжения. В численных расчётах потенциал удерживает два ядра гелия на расстоянии и обеспечивает энергию связи, совпадающую с экспериментальной [13].

$$V_{\alpha\alpha}(r) = V_R e^{-r^2/R_R^2} + V_A e^{-r^2/R_A^2}, \quad \begin{cases} V_R = +457 \text{ МэВ}, & R_R = 0.70 \text{ фм}, \\ V_A = -75 \text{ МэВ}, & R_A = 1.45 \text{ фм}, \end{cases} \quad (4.6)$$

где V_R, R_R - константы отталкивания; V_A, R_A - константы притяжения.

Потенциал точно воспроизводит фазовые сдвиги α - α при энергии $E_{cm} \leq 12$ МэВ и положение резонанса ^8Be (108 кэВ) [13].

4.2.3. ИТОГОВОЕ УРАВНЕНИЕ ХАРТРИ-ФОКА И ЕГО РЕШЕНИЕ

Производится переход к безразмерной s -волне $u(r) = r \chi(r)$. Тогда оператор Лапласа превращается во вторую производную, а нормировка становится $\int_0^\infty |u(r)|^2 dr = 1$. Итоговое уравнение:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_{He}} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{4\alpha\hbar c}{r} + U_H(r) + V_{\alpha\alpha}(r) \right] u(r) = E u(r) \quad (4.7)$$

4.2.4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

1. Задаётся пробная волновая функция в виде экспоненты $1s$: $u^{(0)}(r) = r \chi^{(0)}(r)$ с $\chi^{(0)}(r) = 2e^{-r/a_0}/\sqrt{\pi a_0^3}$.
2. Из $u^{(n)}$ вычисляется $|\chi^{(n)}|^2 = |u^{(n)}|^2/r^2$, строится $U_H^{(n)}(r)$.
3. Дискретизируется гамильтониан $H = T + V_C + U_H^{(n)} + V_{\alpha\alpha}$ на равномерной сетке $\Delta r = 0.01$ фм, $r_{\max} = 10$ фм, $N = 900$.
4. Вычисляется минимальное собственное значение $E^{(n+1)}$ и собственный вектор $u^{(n+1)}$, производится нормировка $\int |u|^2 dr = 1$.
5. Проверяется сходимость $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|/\|u^{(n)}\| < 10^{-7}$. При выполнении условия получаем $(E, u(r))$, иначе производится возвращение к шагу 2.

Схема сходится не более чем за 10 итераций. Суммарная ошибка энергии < 0.05 МэВ.

Результаты моделирования (Рисунок 6):

Энергия связи (одно ядро): $E = -1.03 \pm 0.05$ МэВ - ожидаемо меньше (по модулю), чем у ХНе. Полная энергия связи: $E_{\text{bind}} \approx 2E = -2.06$ МэВ.

Максимум функции плотности вероятности $r_{\text{peak}} = 1.80 \pm 0.02$ фм, что немного больше боровского радиуса ХНе.

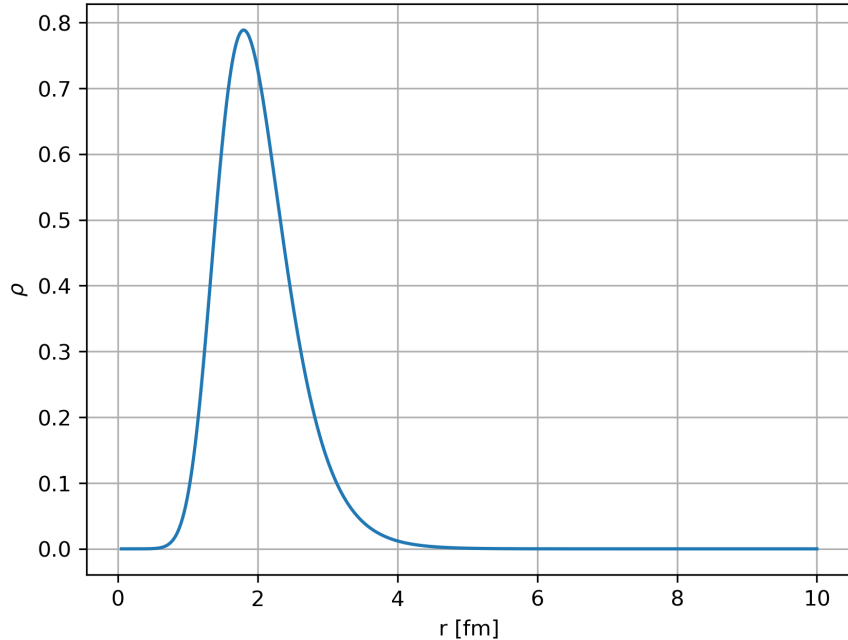


Рисунок 6 — Плотность вероятности захваченного Не на орбите Х в состоянии $X(\text{He})_2$

Таким образом, уравнение Хартри-Фока, дополненное с учётом бозонной природы гелия, позволяет численно моделировать более точную пространственную структуру

$X(\text{He})_2$. Это уточняет энергию связи и пространственное распределение заряда системы.

4.2.5. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТА РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА

Производится вывод аналитического выражения для величины σv . Начальное относительное движение атома $X\text{He}$ и ядра ${}^4\text{He}$ описывается плоской волной, нормированной в объёме V ,

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad k \equiv |\mathbf{k}| = \mu v, \quad (4.8)$$

где μ — приведённая масса пары, v — их относительная скорость.

Конечное состояние— s-волновая функция

$$\Psi_f(\mathbf{r}) \equiv \chi(r) = \frac{u(r)}{r}, \quad (4.9)$$

где $u(r)$ получена численно из уравнения Хартри-Фока.

4.2.6. МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА

Начальное и конечное состояния дают матричный элемент:

$$M_{fi} = e_{\text{eff}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_\gamma}{V}} (\boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \mathbf{D}_{fi}), \quad (4.10)$$

где $\mathbf{D}_{fi} = \int d^3r \Psi_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \Psi_i(\mathbf{r})$ —оператор дипольного момента, e_{eff} - эффективный заряд, ω_γ - энергия фотона.

После стандартного разложения плоской волны $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kr) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ остаётся единственный радиальный интеграл

$$\boxed{\mathcal{I}_1(k) = \int_0^\infty dr r^3 u(r) j_1(kr)}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}. \quad (4.11)$$

Усреднение по двум поляризациям фотона и интегрирование по всем направлениям $\hat{\mathbf{k}}$ даёт $\sum_\lambda \langle |\boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \mathbf{D}_{fi}|^2 \rangle = |\mathcal{I}_1(k)|^2 / 3$.

4.2.7. ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТА СКОРОСТИ РЕАКЦИИ σv ЧЕРЕЗ ПРАВИЛО ФЕРМИ.

Золотое правило Ферми в интегральной форме даёт вероятность перехода:

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_\gamma(\omega_\gamma), \quad \rho_\gamma(\omega_\gamma) = \frac{V\omega_\gamma^2}{\pi^2 c^3}. \quad (4.12)$$

Учитывая поток плоской волны $j = v/V$ и переходя к натуральным единицам $\hbar = c = 1$, получается окончательное выражение:

$$\sigma v(k) = \frac{16\pi\alpha}{9\mu^2} \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \omega_\gamma^3 |\mathcal{I}_1(k)|^2 \quad (4.13)$$

где $\omega_\gamma \approx |E_b|$, μ — приведённая масса системы He–XHe.

4.2.8. МАКСВЕЛЛОВСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Для температурной зависимости выражения произведём усреднение по Максвеллу:

$$\langle \sigma v \rangle_T = \int d^3k f_{\text{МВ}}(k, T) \sigma v(k), \quad (4.14)$$

$$\text{где } f_{\text{МВ}}(k, T) = \left(\frac{1}{2\pi\mu T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{k^2}{2\mu T}\right). \quad (4.15)$$

Подставляя :

$$\langle \sigma v \rangle_T = \frac{16\pi\alpha}{9\mu^2} \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \omega_\gamma^3 \int d^3k f_{\text{МВ}}(k, T) |\mathcal{I}_1(k)|^2 \quad (4.16)$$

В пределе $kr \ll 1$ происходит переход $\mathcal{I}_1 \propto k$. Интеграл начинает линейно зависеть от T . Тогда $\langle \sigma v \rangle_T \propto T$ — результат, лежащий в основе оценки [6].

После численного интегрирования получается зависимость, близкая к линейной от T (Рисунок 7). Учёт бозонной структуры гелия увеличивает коэффициент скорости реакции $X\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow X(\text{He})_2^{+2} + \gamma$.

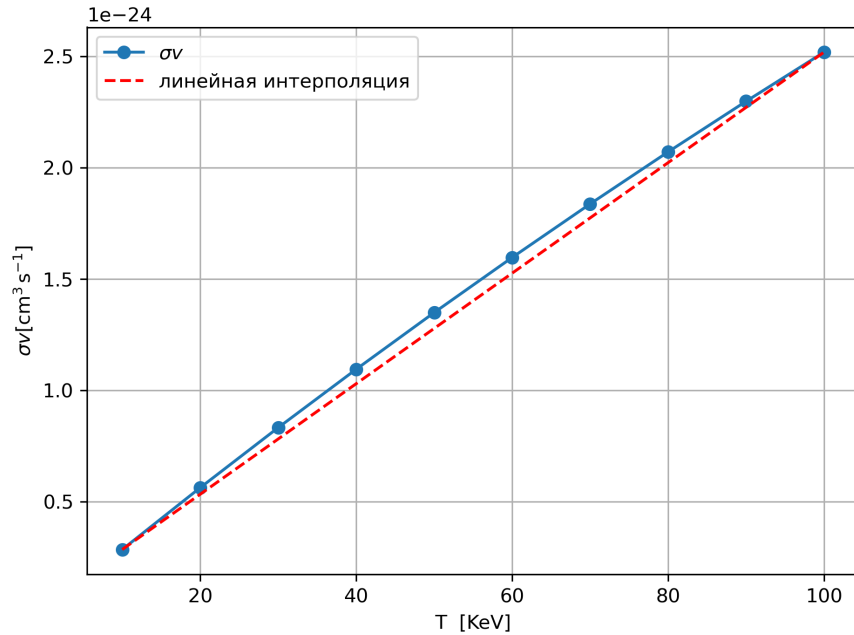


Рисунок 7 — Зависимость коэффициента скорости реакции σv от температуры с учётом бозонной структуры

4.3. ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ $X(\text{He})_2$

Аналитическая формула для относительной концентрации имеет вид:

$$R(T) \equiv \frac{n_{X(\text{He})_2}(T)}{n_{X\text{He}}(T)}. \quad (4.17)$$

4.3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ИТОГОВОЙ ФОРМУЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Рассматривается кинетическое уравнение реакции для радиационного захвата без учёта обратного фоторасщепления. Считаем, что исходные $X\text{He}$ не исчерпываются (их плотность практически постоянна). Имеем:

$$\dot{n}_{X(\text{He})_2} = \langle \sigma v \rangle(T) n_{X\text{He}} n_{^4\text{He}}. \quad (4.18)$$

Вводя относительную величину (4.17), получаем

$$\dot{R} = \langle \sigma v \rangle(T) n_{^4\text{He}}(T). \quad (4.19)$$

Плотность фотонов в изотропном реликтовом излучении [14]

$$n_\gamma(T) = \frac{2 \zeta(3)}{\pi^2} \frac{T^3}{(\hbar c)^3}. \quad (4.20)$$

Отношение барионов к фотонам сохраняется: $n_B = \eta n_\gamma$, $\eta \simeq 6.1 \times 10^{-10}$ [14]. Массовая доля первичного ^4He равна $Y_p^{\text{mass}} \simeq 0.25$. Доля на барион:

$$Y_{^4\text{He}}^{\text{num}} = \frac{Y_p^{\text{mass}}}{4} \approx 0.0625. \quad (4.21)$$

Следовательно

$$n_{^4\text{He}}(T) = Y_{^4\text{He}}^{\text{num}} \eta \frac{2 \zeta(3)}{\pi^2} \frac{T^3}{(\hbar c)^3}. \quad (4.22)$$

В эпоху первичного нуклеосинтеза, параметр Хаббла выражается через температуру как [14]

$$H(T) = 1.66 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}, \quad (4.23)$$

где $M_{\text{Pl}} = 1.221 \times 10^{22} \text{ МэВ}$ ($\hbar = c = 1$), g_* — эффективное число степеней свободы всех частиц, находящихся в термодинамическом равновесии при температуре T . Из [14]

$$g_*(10\text{--}100 \text{ кэВ}) \simeq 10.75.$$

Поскольку при таких температурах энтропия излучения сохраняется и $T \propto a^{-1}$, то связь между малым приращением времени dt и изменением температуры dT имеет вид:

$$dt = - \frac{dT}{H(T) T}. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.22) и (4.24) в (4.19) и интегрируя от $T_i = 0.10 \text{ МэВ}$ до $T_f = 0.01 \text{ МэВ}$, получаем:

$$R_{X(\text{He})_2} = Y_{4\text{He}}^{\text{num}} \eta \int_{T_f}^{T_i} \frac{\langle \sigma v \rangle(T)}{H(T)} \frac{2 \zeta(3)}{T \pi^2} \frac{T^3}{(\hbar c)^3} dT. \quad (4.25)$$

4.3.2. ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА, ВЫВОДЫ

Численно вычисляя относительную концентрацию $X(\text{He})_2$ (относительно $X\text{He}$) имеем результаты:

- 1) Без учёта бозонной структуры He: $R_{X(\text{He})_2} = 1.03 \cdot 10^{-4}$
- 2) С учётом бозонной структуры He: $R_{X(\text{He})_2} = 2.33 \cdot 10^{-4}$

Можно видеть, что бозонная поправка даёт прибавку в концентрации более, чем в 2 раза.

Стоит заметить, что значения относительной концентрации оказались выше ожидаемых. Подобные результаты нуждаются в дальнейшем рассмотрении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается гипотеза составной скрытой массы, в которой гипотетические стабильные частицы с зарядом $-2n$ образуют нейтральные атомоподобные состояния XHe с первичными ядрами гелия. Рассмотрена структура XHe . Оценены интервалы температур, при которых тёмные атомы будут столкновительными. Результаты дают возможность дальнейшего изучения XHe при температурах $T = 10 - 100$ кэВ.

Рассмотрен вариант образования связанных состояний XHe , как аналогия с образованием молекулы водорода в межзвёздных облаках. Получены оценки на коэффициенты скорости образования и фоторасщепления в зависимости от температуры $10 \text{ кэВ} \leq T \leq 100 \text{ кэВ}$ при $n = 1$.

Применена модель атома Томсона для численных расчётов коэффициентов скорости реакции образования связанного состояния для $2 \leq n \leq 5$. Скорость фоторасщепления на порядки выше скорости образования, также не учтены бозонные поправки. Метод расчёта нуждается в пересмотре.

Изучена реакция образования состояния $X(He)_2$. Рассмотрена готовая формула базовой скорости реакции из работы [6].

Из модели бозонных атомов с использованием уравнения Хартри-Фока получена волновая функция гелия на орбите X в $X(He)_2$. Теоретически выведена формула коэффициента скорости реакции с бозонной поправкой, произведены численные оценки.

Получена относительная концентрация $X(He)_2$, образованного в диапазоне температур $T = 10 - 100$ кэВ:

- 1) Без учёта бозонной структуры He : $R_{X(He)_2} = 1.03 \cdot 10^{-4}$
- 2) С учётом бозонной структуры He : $R_{X(He)_2} = 2.33 \cdot 10^{-4}$.

Отличия в концентрации между базовым и бозонным случаями составляет $\sim 117\%$.

Полученные значения концентраций свидетельствуют о том, что бозонные поправки необходимо учитывать в рамках более детализированных моделей для точного понимания процессов формирования составной скрытой массы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] F. Zwicky, *Republication of: The redshift of extragalactic nebulae, General Relativity and Gravitation* **41** (2009) 207.
- [2] H.W. Babcock, *The rotation of the Andromeda Nebula, Lick Observatory Bulletin* **498** (1939) 41.
- [3] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D.N. Spergel, C.L. Bennett, J. Dunkley et al., *Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results, The Astrophysical Journal Supplement Series* **208** (2013) 19.
- [4] J.R. Cudell, M. Khlopov and Q. Wallemacq, *The nuclear physics of OHe, Bled Workshops Phys.* **13** (2012) 10 [1211.5684].
- [5] G. Aad, B. Abbott, D.C. Abbott, K. Abeling, S.H. Abidi, A. Aboulhorma et al., *Search for heavy long-lived multi-charged particles in the full LHC Run 2 pp collision data at $s=13$ TeV using the ATLAS detector, Physics Letters B* **847** (2023) 138316 [2303.13613].
- [6] M.Y. KHLOPOV, A.G. MAYOROV and E.Y. SOLDATOV, *Composite dark matter and puzzles of dark matter searches, International Journal of Modern Physics D* **19** (2010) 1385–1395.
- [7] M.Y. Khlopov and C. Kouvaris, *Strong interactive massive particles from a strong coupled theory, Phys. Rev. D* **77** (2008) 065002.
- [8] V. Beylin, M. Khlopov, V. Kuksa and N. Volchanskiy, *Hadronic and hadron-like physics of dark matter, Symmetry* **11** (2019) 587.
- [9] T.E. Bikbaev, M.Y. Khlopov and A.G. Mayorov, *Numerical simulation of bohr-like and thomson-like dark atoms with nuclei*, 2021.
- [10] T. de Jong, *The density of h2 molecules in dark interstellar clouds*, Aug, 1972.
- [11] M.Y. Amusia and L.V. Chernysheva, *On the bosonic atoms, JETP Letters* **107** (2018) 91–95.
- [12] A. Tani, N. Ikeno, D. Jido, H. Nagahiro, H. Fujioka, K. Itahashi et al., *Structure of double pionic atoms, Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2021** (2021) .
- [13] S. Ali and A. Bodmer, *Phenomenological - potentials, Nuclear Physics* **80** (1966) 99.
- [14] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The early universe*, vol. 69 (1990).