

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №40 «ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ»

УДК 531.3, 539.1.05

На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВА ПОЛИНА ФЕДОРОВНА

**«РЕКОНСТРУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ
ДАННЫХ 32-КАНАЛЬНОГО МИНИ ПЭТ»**

Направления подготовки:

09.04.04 «Программная инженерия»

14.04.02 «Ядерная физика и технологии»

Диссертация на соискание степени магистра

Научный руководитель,

к.ф.-м.н.

_____ П. Е. Тетерин

Научный консультант

_____ Ф. А. Дубинин

Москва 2025

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

«РЕКОНСТРУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ 32-КАНАЛЬНОГО МИНИ ПЭТ»

Студент	_____ П. Ф. Васильева
Научный руководитель, к.ф.-м.н.	_____ П. Е. Тетерин
Научный консультант	_____ Ф. А. Дубинин
Рецензент к.ф.-м.н.	_____ А. В. Гробов
Рецензент к.т.н., доц.	_____
Секретарь ГЭК, к.ф.-м.н.	_____ Е. Ю. Солдатов
Зав. каф. №40, д.ф.-м.н., проф.	_____ М. Д. Скорохватов
Рук. учеб. прог., к.ф.-м.н.	_____ Е. Ю. Солдатов

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ПОЗИТРОН-ЭМИССИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ	7
1. Физика Позитрон-эмиссионной томографии.....	7
1.1. Распад радиофармпрепарата и рождение позитрона	7
1.2. Движение позитрона в веществе: от вылета до аннигиляции ..	7
1.3. Детектирование гамма-квантов и построение изображения ..	9
1.4. Расчет длины свободного пробега позитрона для ^{44}Ti	10
2. ПЭТ-томографы в медицине.....	14
2.1. Онкология: поиск опухолей и оценка лечения	14
2.2. Неврология: изучение работы мозга.....	15
2.3. Другие применения	16
2.4. Ограничения и риски. Будущее технологии	16
3. Экспериментальная установка	18
ГЛАВА 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ.....	20
1. Общие шаги	20
2. Преобразование Радона. Синограмма	23
2.1. Преобразование Радона	23
2.2. Синограмма	25
3. Обратное преобразование Радона. Томограмма	28
3.1. Обратное преобразование Радона. Метод Фурье синтеза.	28
3.2. Томограмма	30
4. Код для восстановления изображения.	33
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ	37

1. Моделирование установки с точечным источником	37
2. Моделирование установки с источником круглой формы.....	38
ГЛАВА 4. ФИЛЬТРАЦИЯ	40
1. Фильтрация синограммы.....	40
1.1. Ram-Lak	40
1.2. Shepp-Logan.....	41
1.3. Cosine	42
1.4. Hamming	43
1.5. Hann.....	44
1.6. Сравнение фильтров.....	44
2. Фильтрация изображения. DBSCAN	45
2.1. Общие принципы.....	45
2.2. Применение в фильтрации изображений и томографии	47
2.3. Разработанный код на основе исследований	50
ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗУЧЕННОГО. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	54
1. Моделированные данные. Точечный источник.....	54
2. Моделированные данные. Множество круговых источников различного диаметра.	60
3. Реальные данные с установки	64
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	69
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	71
ПРИЛОЖЕНИЕ	74

ВВЕДЕНИЕ

Позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) — это современный метод медицинской визуализации, позволяющий изучать метаболические процессы в организме на молекулярном уровне. В основе ПЭТ лежит детектирование гамма-излучения, возникающего при аннигиляции позитронов с электронами. Этот метод широко применяется в онкологии, неврологии и кардиологии, обеспечивая высокую точность диагностики. Однако качество реконструированных изображений может значительно варьироваться в зависимости от используемых алгоритмов обработки данных, количества детекторов и методов фильтрации.

Актуальность работы заключается в разработке методов реконструкции изображений для микроПЭТ-систем доклинического назначения. Особенности компактных детекторных колец (малый диаметр, ограниченное число проекций, большой угловой размер детекторов) создают специфические артефакты, требующие специальных подходов к обработке данных. Решение этой задачи важно для повышения качества визуализации в фармакокинетических и биомедицинских исследованиях.

Целью данной работы является разработка алгоритма реконструкции изображения по данным 32-канального мини-ПЭТ, а также исследование методов фильтрации для улучшения качества изображения.

Задачи исследования:

1. Проанализировать принципы реконструкции томографических изображений, включая прямое и обратное преобразование Радона.
2. Изучить методы фильтрации синограмм включая стандартные фильтры (Ram-Lak, Shepp-Logan, Hann и др.).
3. Изучить методы фильтрации изображений. Отдельно рассмотреть алгоритм кластеризации DBSCAN.
4. Выполнить моделирование работы ПЭТ-системы с точечными и распределёнными источниками для верификации алгоритмов.

5. Применить разработанные методы к реальным данным, полученным с экспериментальной установки, оценить их эффективности.

Методы исследования:

- Математическое моделирование процессов реконструкции изображений в GEANT4.
- Графическое отображение с помощью программного пакета ROOT CERN.
- Программная реализация алгоритмов на MATLAB и Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и scikit-learn.
- Анализ качества изображений с помощью метрик, таких как отношение сигнал/шум и ширина на полувысоте.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанных алгоритмов для улучшения качества изображений в ПЭТ-системах с малым радиусом кольца детекторов, что может быть полезно в научных и медицинских исследованиях.

ГЛАВА 1. ПОЗИТРОН-ЭМИССИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ

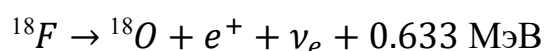
1. Физика Позитрон-эмиссионной томографии

Позитронно-эмиссионная томография — это один из самых современных методов медицинской визуализации, позволяющий изучать метаболические процессы в организме на молекулярном уровне. В основе ПЭТ лежит детектирование гамма-излучения, возникающего при аннигиляции позитронов с электронами. Чтобы понять, как работает этот метод, нужно разобрать всю цепочку физических процессов: от распада радиоактивного изотопа до регистрации парных гамма-квантов.

1.1. Распад радиофармпрепарата и рождение позитрона

В ПЭТ используются короткоживущие изотопы, испытывающие β^+ -распад. Пациенту вводят специальный радиофармпрепарат, например, фтордезоксиглюкозу (^{18}F -FDG), содержащую позитрон-излучающий изотоп фтор-18 (^{18}F).

Когда ядро ^{18}F распадается, один из протонов превращается в нейтрон, испуская позитрон (e^+) и электронное нейтрино (ν_e):



Позитрон рождается с кинетической энергией, которая может достигать максимального значения, характерного для данного изотопа (для ^{18}F это около 633 кэВ). Однако средняя энергия позитрона оказывается ниже — примерно 250 кэВ. Это происходит в силу кинематики — энергия распределяется между позитроном и нейтрино, поэтому и спектр β^+ -распада непрерывный.

1.2. Движение позитрона в веществе: от вылета до аннигиляции

Сразу после рождения позитрон начинает взаимодействовать с окружающей средой — молекулами воды, липидов и других веществ в тканях организма.

Позитрон теряет энергию несколькими способами:

- *Ионизационные потери* — выбивание электронов из атомов.
- *Возбуждение атомов* — передача энергии без ионизации.
- *Тормозное излучение* — испускание фотонов при резком торможении в кулоновском поле ядер.

Эти процессы продолжаются до тех пор, пока позитрон не замедлится до тепловых скоростей (энергии порядка 1 эВ).

Пробег позитрона зависит от его начальной энергии и плотности среды. В мягких биологических тканях (плотность ~ 1 г/см³) позитрон с энергией 250 кэВ пролетает в среднем 1–2 мм, прежде чем аннигилирует.

Для более энергичных изотопов, таких как ^{15}O (средняя энергия позитрона ~ 735 кэВ), пробег увеличивается до 3–5 мм. Это важно учитывать, поскольку чем дальше позитрон улетает от точки распада, тем хуже пространственное разрешение ПЭТ-изображения.

Когда позитрон теряет почти всю энергию, он взаимодействует с электроном, и происходит процесс аннигиляции. В подавляющем большинстве случаев (99.7%) рождаются два гамма-кванта с энергией 511 кэВ, разлетающихся в противоположных направлениях (рис.1).

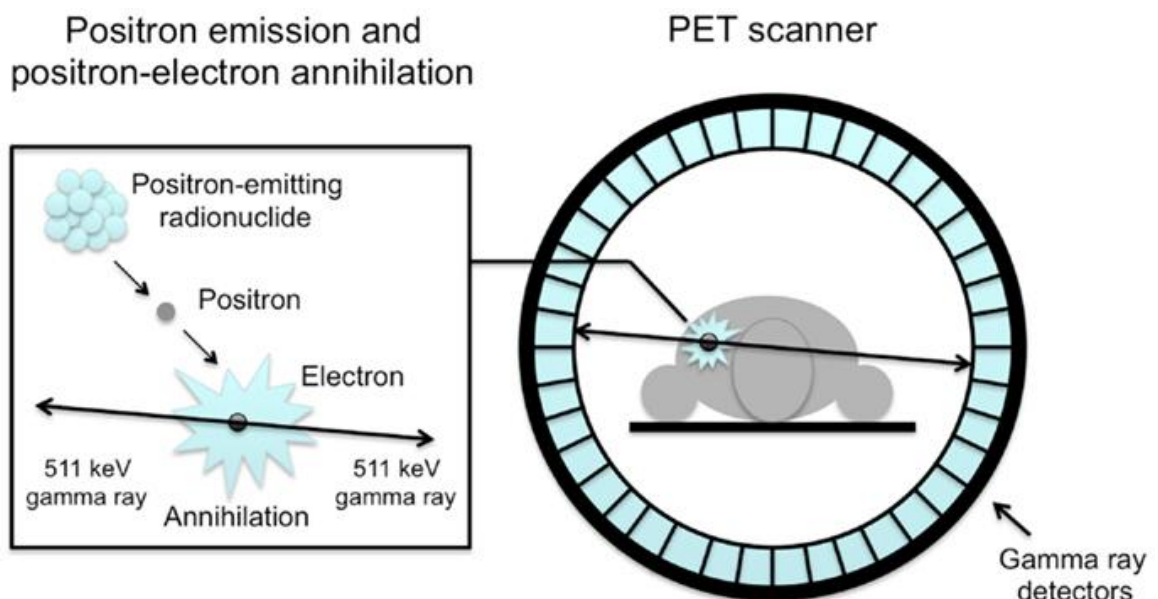
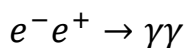


Рис. 1. Схематичное изображение аннигиляции e^-e^+ -пары с примером локализации в теле внутри ПЭТ.[1]



Поскольку суммарная энергия покоя электрона и позитрона составляет 1.022 МэВ, а импульс системы близок к нулю, рождается два фотона с энергией 511 кэВ каждый, чтобы сохранить энергию и импульс.

Отклонение от 180° и уширение линии аннигиляции

В реальности угол между гамма-квантами не всегда строго 180°, а их энергия может немного отличаться от 511 кэВ. Это происходит по двум причинам:

1. Остаточный импульс позитрона перед аннигиляцией (если он не полностью остановился).
2. Эффект Допплера из-за движения электронов в атомах.

Эти эффекты приводят к тому, что в ПЭТ-детекторах наблюдается небольшое уширение линии аннигиляции (на 2–3 кэВ) и отклонение угла разлёта на ~0.5°.

1.3. Детектирование гамма-квантов и построение изображения

ПЭТ-сканер состоит из множества детекторов, расположенных в кольце. Когда два гамма-кванта регистрируются одновременно (в пределах окна совпадений, обычно 4–12 нс), пара сработавших детекторов определяет линию отклика (LOR, Line of Response) — прямую, соединяющую точки детектирования.

Поскольку позитрон пролетает 1–5 мм до аннигиляции, истинное положение радиоактивного изотопа не совпадает с точкой аннигиляции. Это вносит фундаментальное ограничение в разрешение ПЭТ (обычно 3–5 мм для клинических систем).

Современные технологии, такие как TOF-PET (Time-of-Flight PET), позволяют частично компенсировать эту погрешность. В TOF-PET измеряется разница во времени прихода гамма-квантов, что помогает точнее локализовать

аннигиляцию.

1.4. Расчет длины свободного пробега позитрона для ^{44}Ti

В эксперименте с макетом мини-ПЭТ (см. стр. 18) в качестве источника позитронов использовался изотоп титан-44 (^{44}Ti). Хотя этот радионуклид не применяется в клинической практике из-за чрезмерно большого периода полураспада ($T_{1/2} \approx 59$ лет), он играет важную роль в исследовательских целях.

Дело в том, что ^{44}Ti служит удобным источником позитронов для циклотронов — установок, где производятся короткоживущие изотопы для реальных радиофармпрепаратов. В нашем же эксперименте выбор пал именно на титан-44 по двум ключевым причинам:

1. Стабильность источника: благодаря долгому периоду полураспада не нужно учитывать быстрое падение активности.
2. Упрощённый сбор статистики: постоянный поток позитронов позволил получить чёткие данные для последующей обработки.

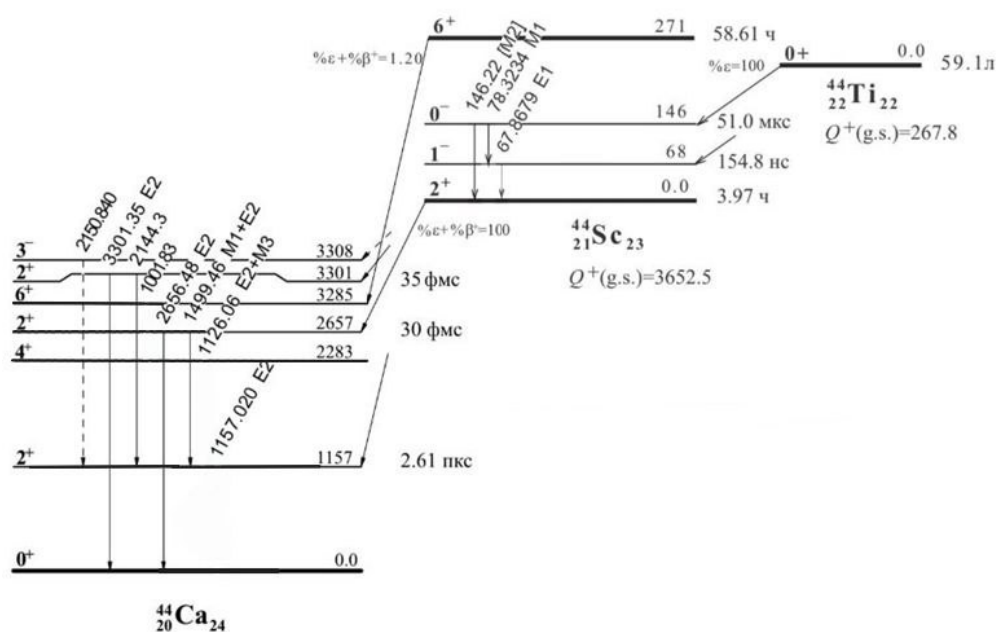


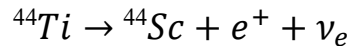
Рис. 2. Основные моды распада ^{44}Ti .

Таким образом, хотя ^{44}Ti и не подходит для диагностики пациентов, он оказался идеальным вариантом для лабораторных исследований работы ПЭТ-

систем.

Основные характеристики титана-44:

- Период полураспада: ~ 59 лет.
- Максимальная энергия позитрона (E_{max}): ~ 1.47 МэВ (средняя энергия $\sim 0.6\text{--}0.7$ МэВ).
- Основной канал распада (рис. 2):



Пробег позитрона зависит от его начальной энергии и плотности среды.

- Расчет длины пробега позитрона в воде/тканях.

Плотность воды ρ при нормальных условиях ($T = 20^\circ\text{C}$, $P = 1$ атм):

$$\rho \sim 1000 \text{ кг/м}^3 = 1 \text{ г/см}^3.$$

Расчет длины пробега можно произвести несколькими способами:

- Эмпирическая формула для пробега в воде:

Для позитронов с энергией $0.01\text{--}10$ МэВ пробег R (в см) в воде/тканях можно оценить по формуле [2]:

$$R \approx 0.41 \cdot E^{1.47}$$

где E — энергия позитрона в МэВ.

Для средней энергии позитрона (~ 0.65 МэВ):

$$R \approx 0.41 \cdot (0.65)^{1.47} \approx 0.23 \text{ см} = 2.3 \text{ мм}$$

Для максимальной энергии (1.47 МэВ):

$$R \approx 0.41 \cdot (1.47)^{1.47} \approx 0.78 \text{ см} = 7.8 \text{ мм}$$

Эмпирической формула полезна для оценок. Для более точных значений лучше использовать следующий способ вычисления длины пробега.

- Расчет по таблицам NIST ESTAR CSDA (Continuous Slowing-Down Approximation) [3]:
 - Для $E = 0.65$ МэВ $\rightarrow$ пробег ~ 0.28 см (2.8 мм).
 - Для $E = 1.47$ МэВ $\rightarrow$ пробег ~ 0.85 см (8.5 мм).

- Расчет длины пробега позитрона в использованном источнике

Источник титан-44, находящийся в оболочке из нержавеющей стали, с

помощью которого проводились измерения, имеет цилиндрическую форму (рис. 3). Изображенные на рисунке параметры:

- ✓ $D \times H$, мм: 7×10 ;
- ✓ $h \times d$, мм: 5.2×2.5 .

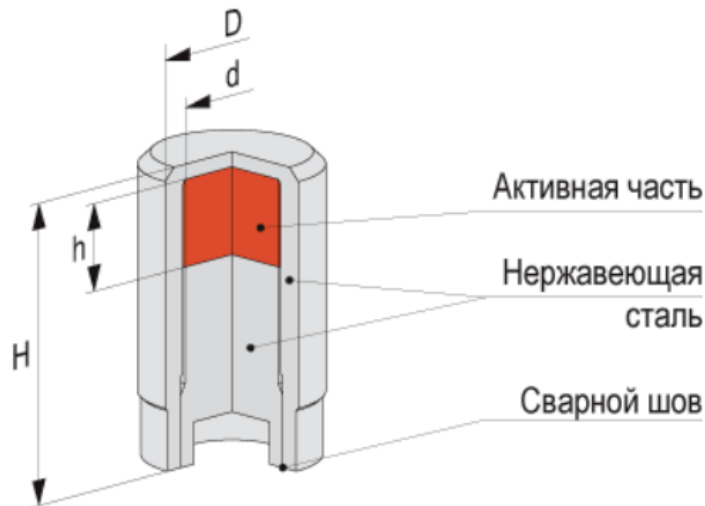


Рис. 3. Схема устройства источника.

Таким образом, позитроны аннигилируют фактически в источнике, так как плотность среды, то есть оболочки (нержавеющей стали) очень высокая. Произведем соответствующие расчеты.

Формула для нахождения линейного пробега на основе массового пробега (данных из CSDA):

$$R = \frac{r_{\text{масс}}^{\text{сред}}}{\rho_{\text{сред}}} \quad (1)$$

где $r_{\text{масс}}^{\text{сред}}$ – массовая длина пробега позитрона в среде, $\rho_{\text{сред}}$ – плотность среды.

Необходимые характеристики для расчетов в нержавеющей стали:

- Для $E = 0.65$ МэВ: $r_{\text{масс}}^{\text{ст}} = 0.31$ г/см².
- Для $E = 1.47$ МэВ: $r_{\text{масс}}^{\text{ст}} = 1.02$ г/см²
- Плотность нержавеющей стали: $\rho_{\text{ст}} = 8$ г/см³

Для средней энергии позитрона (~ 0.65 МэВ):

$$R = \frac{0.31 \text{ г/см}^2}{8 \text{ г/см}^3} \approx 0.039 \text{ см} = 0.39 \text{ мм}$$

Для максимальной энергии (1.47 МэВ):

$$R = \frac{1.02 \text{ г/см}^2}{8 \text{ г/см}^3} \approx 0.127 \text{ см} = 1.27 \text{ мм}$$

Итоговое сравнение результатов расчета длины свободного пробега представлены в таблице 1.

Таблица 1. Длина пробега позитрона в различных средах.

Энергия позитрона E , МэВ	Среда: вода/ткани Длина пробега R , мм	Среда: нержав. сталь Длина пробега R , мм
0.65	2.8 ± 0.3	0.39 ± 0.05
1.47	8.5 ± 0.8	1.27 ± 0.12

Исходя из полученных значений, при сравнении длины пробега позитрона и толщины оболочки источника (максимальная длина пробега 1.27 мм против 0.9 мм) можно сделать вывод, что большая часть позитронов аннигилирует внутри источника. Также, можно оценить это значение:

- Активная зона источника: $r = 2.6$ мм.
- Толщина оболочки из нержавеющей стали: $l_{\text{ст}} = 0.9$ мм.

Позитрон преодолеет оболочку, если его линейный пробег в стали ≥ 0.9 мм. Из предыдущих расчётов:

- Пробег при 0.65 МэВ = 0.38 мм $\rightarrow$ не проходит.
- Пробег при 1.47 МэВ = 1.18 мм $\rightarrow$ проходит.

Необходимо найти пороговую энергию $E_{\text{порог}}$, при которой пробег = 0.9 мм. Зависимость пробега от энергии для стали:

$$R(E) \approx 0.118 \cdot E^{1.35} \text{ мм}$$

Подставляем $R = 0.9$ мм:

$$0.9 = 0.118 \cdot E^{1.35}$$

$$E^{1.35} = 7.63$$

$$E^{1.35} \approx 7.63^{\frac{1}{1.35}} \approx 1.15 \text{ МэВ}$$

Спектр позитронов ^{44}Ti аппроксимируется распределением Ферми-Кюри. Общая доля позитронов с $E \geq 1.15 \text{ МэВ} \approx 25\%$ (из интеграла спектра, подробнее см. приложение 1).

2. ПЭТ-томографы в медицине

Позитронно-эмиссионная томография (ПЭТ) является одним из самых информативных методов диагностики, который позволяет визуализировать не просто анатомические структуры, а метаболические процессы в тканях на молекулярном уровне. В отличие от КТ или МРТ, показывающих строение органов, ПЭТ выявляет области с аномально высокой или низкой биохимической активностью. Это делает технологию незаменимой в онкологии, неврологии и кардиологии. [4]

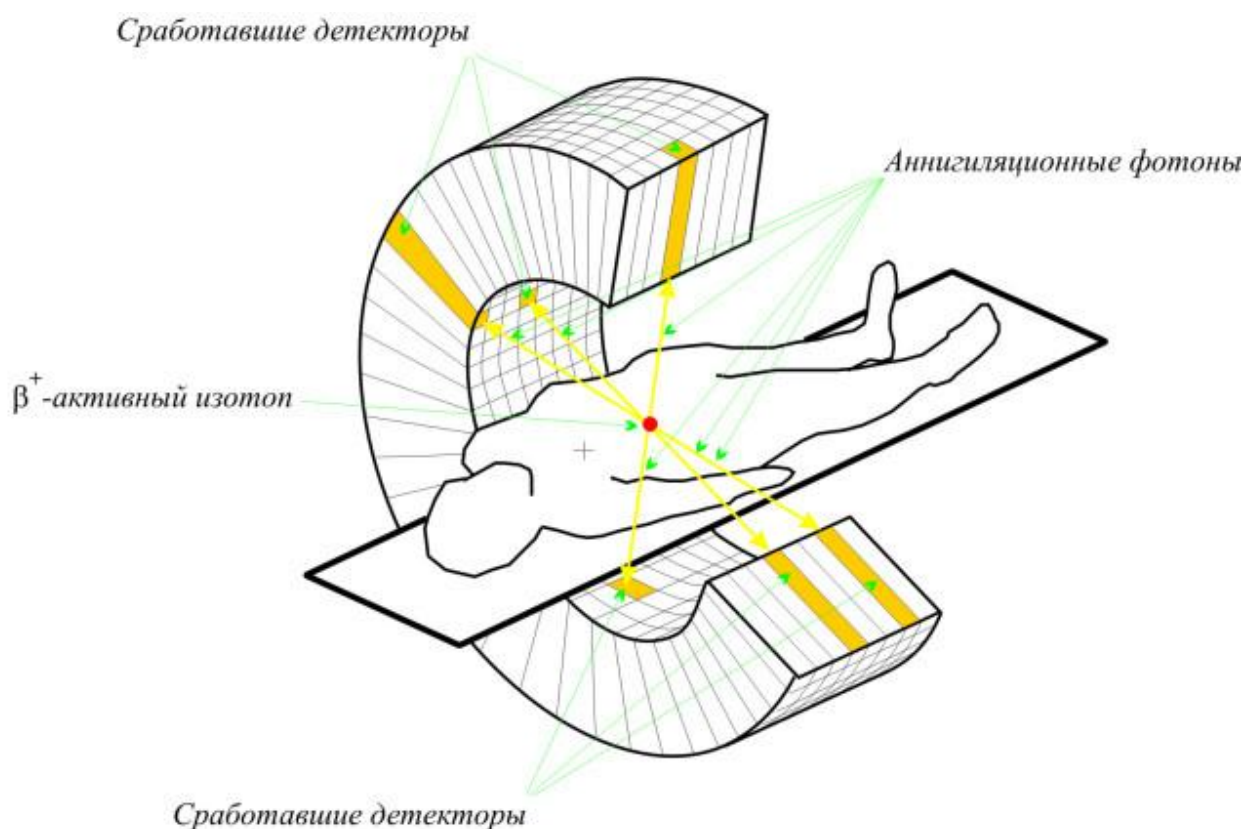


Рис. 4. Принципиальная схема работы ПЭТ.[5]

2.1. Онкология: поиск опухолей и оценка лечения

Основное применение ПЭТ — диагностика и мониторинг раковых заболеваний. Метод основан на том, что злокачественные клетки потребляют

больше глюкозы, чем здоровые. Пациенту вводят радиофармпрепарат на основе фтордезоксиглюкозы (^{18}F -FDG), который накапливается в опухолях. При сканировании эти области "подсвечиваются" на изображении.

- *Выявление первичных опухолей и метастазов.* ПЭТ обнаруживает очаги размером от 4–5 мм, что особенно важно для рака лёгких, молочной железы, лимфом.
- *Оценка эффективности химиотерапии.* Сравнивая снимки до и после лечения, врачи видят, уменьшился ли метаболизм в опухоли.
- *Планирование лучевой терапии.* ПЭТ помогает точно определить границы новообразования, чтобы минимизировать повреждение здоровых тканей.

Иногда используют и другие маркеры: например, ^{11}C -холин для рака простаты или ^{68}Ga -PSMA для поиска рецидивов.

2.2. Неврология: изучение работы мозга

ПЭТ применяют для диагностики нейродегенеративных заболеваний:

- *Болезнь Альцгеймера.* Сканирование с ^{18}F -флорбетапином выявляет скопления амилоидных бляшек.
- *Эпилепсия.* Перед операцией определяют очаг патологической активности с помощью ^{18}F -ФДГ (в зоне приступов метаболизм снижен).
- *Болезнь Паркинсона.* Используют маркеры дофаминовых рецепторов (например, ^{18}F -DOPA).

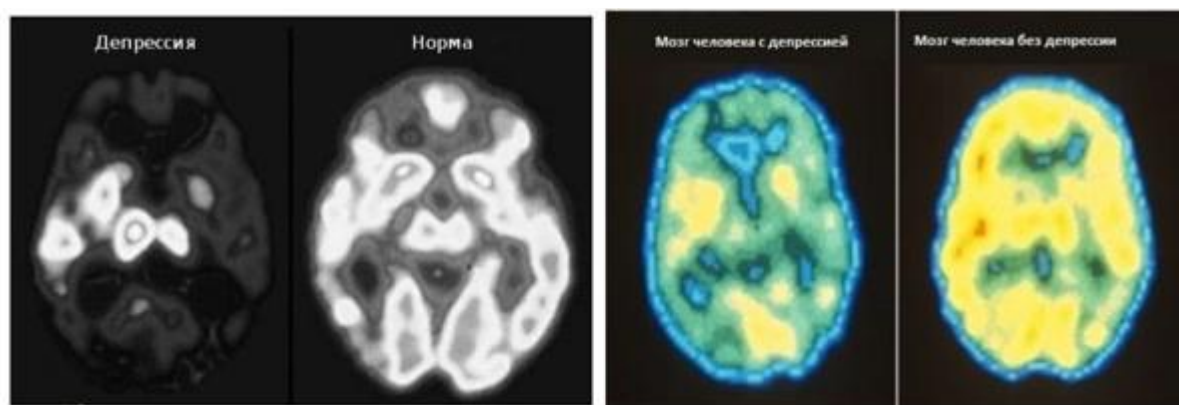


Рис. 5. Снимок ПЭТ мозга, пораженного депрессией.[6]

Метод также исследует последствия инсультов и травм, показывая зоны мозга с нарушенным обменом веществ.

2.3. Другие применения

Кардиология: диагностика ишемической болезни

При ПЭТ сердца применяют ^{13}N -аммиак или ^{82}Rb -хлорид, которые накапливаются в здоровых участках миокарда. Если кровоснабжение нарушено (из-за атеросклероза или тромба), на снимке появляются "холодные" зоны. Это помогает:

- Выявлять ишемию на ранних стадиях;
- Отличать живую ткань от рубцовой после инфаркта;
- Принимать решение о стентировании или шунтировании.

Инфекции и воспаления

ПЭТ с ^{18}F -ФДГ обнаруживает скрытые очаги инфекции (например, при туберкулёзе или имплант-ассоциированных воспалениях). Метод полезен при лихорадке неясного происхождения, когда другие исследования не дают результата.

2.4. Ограничения и риски. Будущее технологии

Несмотря на преимущества, ПЭТ имеет нюансы:

- Лучевая нагрузка (около 5–10 мЗв за исследование, что сопоставимо с КТ);
- Ложноположительные результаты (например, при воспалении или после вакцинации);
- Высокая стоимость.

Современные гибридные ПЭТ/КТ и ПЭТ/МРТ сканеры сочетают метаболическую и анатомическую визуализацию, повышая точность (рис. 6). Разрабатываются новые радиофармпрепараты для целевой диагностики — например, маркеры иммунных клеток (^{89}Zr -антитела) или гипоксии (^{18}F -мизонидазол).

ПЭТ-томография — это "окно" в биохимию живого организма. Она меняет подход к лечению рака, деменции и сердечных заболеваний, позволяя врачам видеть болезнь до появления структурных изменений. С развитием персонализированной медицины значение метода будет только расти.

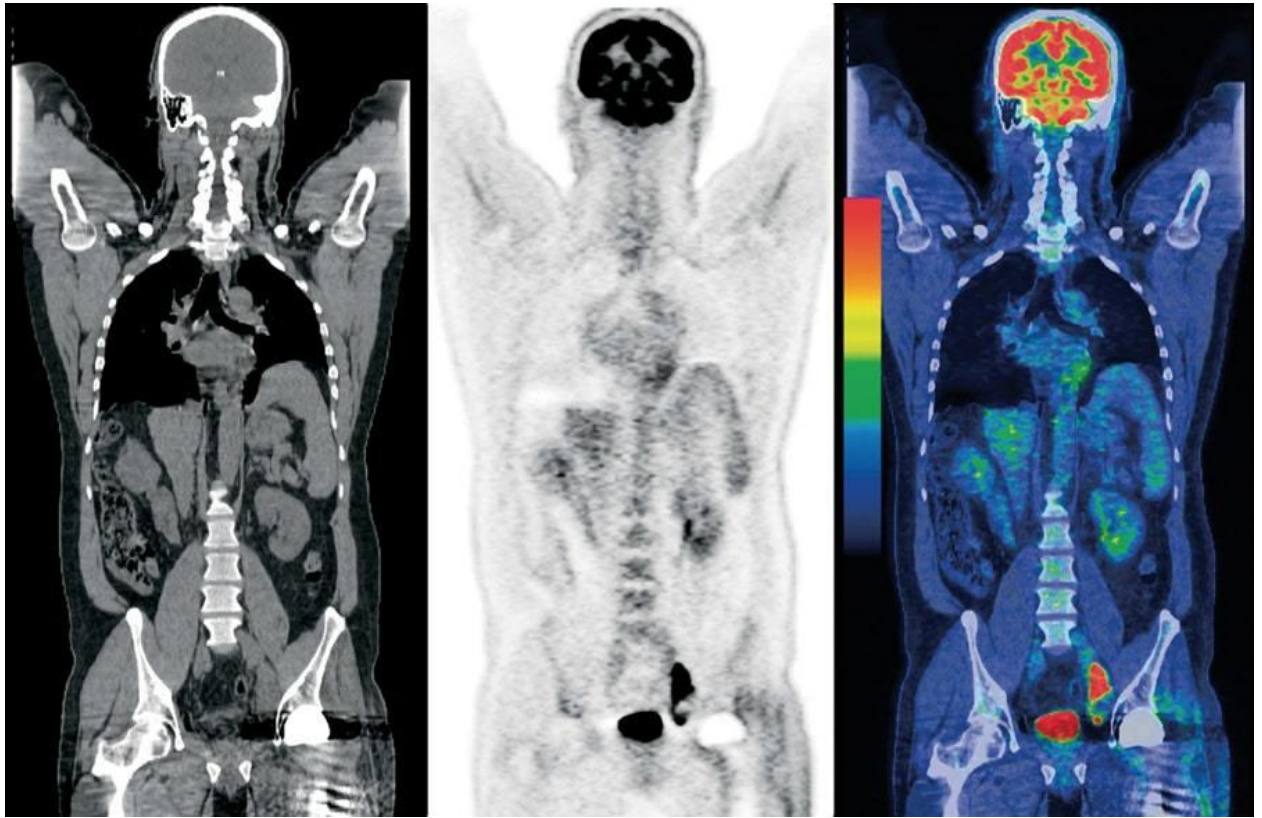


Рис. 6. 1) КТ в чистом виде. 2) ПЭТ в чистом виде. 3) Совмещение ПЭТ/КТ.[7]

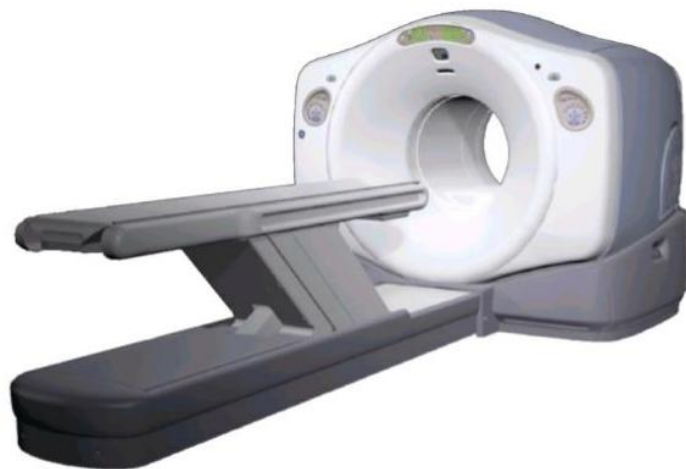


Рис. 7. Пример реального действующего ПЭТ/КТ.[8]

3. Экспериментальная установка

На рисунке 8 представлен снимок экспериментальной установки — макета миниатюрного ПЭТ-томографа, созданного для проведения исследований. Конструкция установки включает в себя следующие ключевые компоненты:

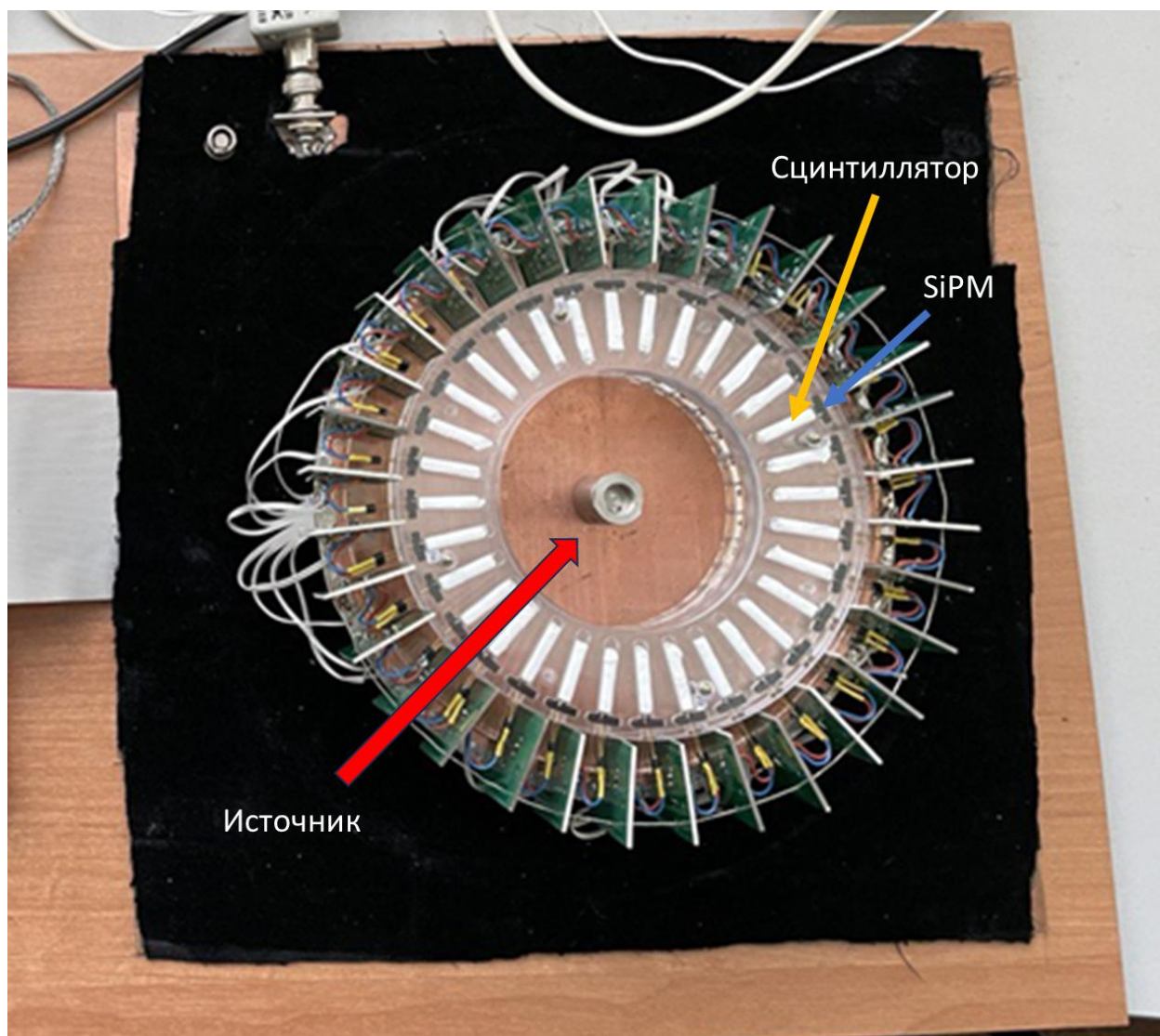


Рис. 8. Снимок экспериментальной установки.

Кольцевая система детектирования состоит из 32 независимых каналов, равномерно распределённых по окружности с угловым шагом 11.25° . Такая геометрия обеспечивает оптимальное покрытие зоны сканирования и позволяет регистрировать совпадения гамма-квантов с хорошей эффективностью.

В качестве фотодетекторов в системе использованы кремниевые фотоумножители (SiPM), которые были выбраны благодаря их компактным размерам, высокой чувствительности и устойчивости к магнитным полям. Размер одного детектора составляет 3×3 мм (рис. 9). Эти полупроводниковые детекторы демонстрируют отличные временные характеристики, что особенно важно для точного определения времени прихода гамма-квантов.

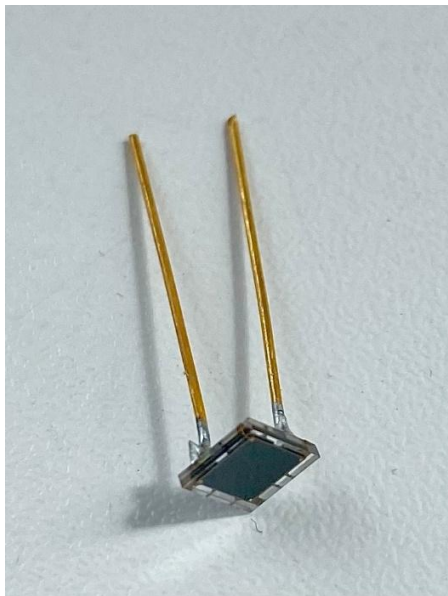


Рис. 9. Отдельно взятый детектор SiPM.

Сцинтилляционный материал представлен кристаллами GAGG ($\text{Gd}_3\text{Al}_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$), обладающими рядом преимуществ:

- высокой световыходом ($\sim 50,000$ фотонов/МэВ)
- отсутствием гигроскопичности
- умеренным временем сцинтилляции (~ 90 нс)
- хорошей энергетической разрешающей способностью

Такая комбинация детекторных элементов (GAGG+SiPM) обеспечивает высокую эффективность регистрации аннигиляционных гамма-квантов с энергией 511 кэВ, что является критически важным для работы ПЭТ-системы.

ГЛАВА 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

1. Общие шаги

Метод восстановления изображения посредством преобразования Радона является одним из самых точных, простых и широко-распространенных, особенно в области томографии.

Для изучения внутреннего строения объекта применяется метод радиационного просвечивания. Он очень схож с ПЭТ, вместо траектории просвечивания (системы источник-детектор) в уравнениях по восстановлению изображения используется линия отклика детекторов. При облучении тела в одном направлении формируется плоское (двумерное) теневое изображение, отражающее трехмерную структуру. Если изменить угол облучения, получается новый проекционный снимок, содержащий дополнительные данные о внутренней организации объекта. Последовательно выполняя просвечивание с разных ракурсов, исследователь получает серию изображений, каждое из которых вносит новую информацию.

При наличии достаточного количества таких проекций, полученных под различными углами, становится возможным реконструировать внутреннюю структуру исследуемого объекта с высокой точностью. В частности, восстанавливается функция распределения плотности поглощения излучения в объеме тела.

Основная цель томографии заключается в реконструкции трёхмерной функции распределения поглощения излучения $\mu(x, y, z)$ [9]. Однако данная задача является крайне сложной, поэтому в классическом подходе трёхмерный объект разделяют на совокупность тонких слоёв. В рамках каждого такого слоя плотность μ рассматривается как функция всего двух координат.

Для проведения измерений источник излучения и детекторы располагают таким образом, чтобы фиксировать данные исключительно от лучей, проходящих в плоскости исследуемого среза. Схематическое

изображение процесса сканирования отдельного слоя приведено на рис. 10.

Детекторная система фиксирует показания, на основе которых формируется функция R , зависящая от одной координаты s при постоянном угле сканирования φ . Следует отметить, что восстановление двумерной функции плотности $\mu(x, y)$ по единственной проекции $R_\varphi(s)$ принципиально неосуществимо. Для получения необходимого массива данных требуется проведение серии измерений при различных углах сканирования.

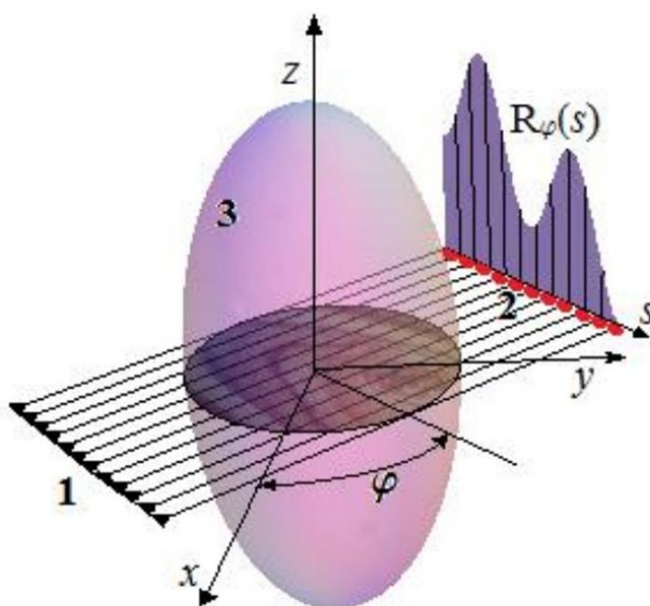


Рис. 10. Зондирование трехмерного объекта (1 – источники; 2 – детекторы; 3 – объект).[9]

Последовательное изменение ориентации системы «излучатель-детектор» позволяет получить набор проекционных данных $R(s, \varphi)$, где параметр φ соответствует углу положения измерительной системы. Этот комплекс данных создает основу для реконструкции двумерного распределения плотности $\mu(x, y)$. Визуальное представление процесса многоракурсного сканирования приведено на рис. 11.

После определения функции распределения плотности $\mu(x, y)$ для исследуемого слоя, измерительную систему (источник-детектор) перемещают вдоль продольной оси z для сканирования последующего слоя. Этот процесс

повторяется последовательно для каждого сечения объекта.

Трехмерная картина распределения плотности поглощения $\mu(x, y, z)$ формируется путем объединения набора двумерных функций $\mu_{z_i}(x, y)$, где индекс z_i соответствует координате сечения вдоль оси сканирования. Следует отметить, что основные технические сложности методики связаны именно с этапом реконструкции отдельных двумерных сечений $\mu_z(x, y)$.

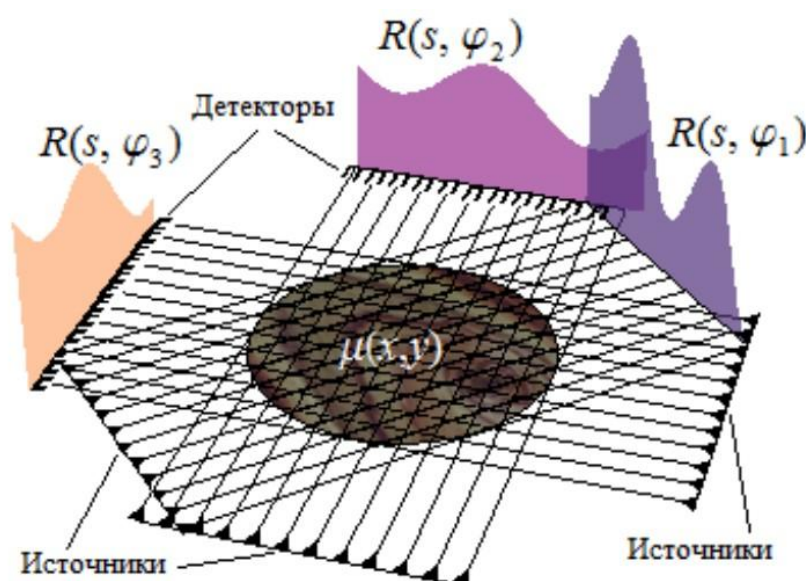


Рис. 11. Схема получения проекций $R(s, \varphi)$ одного слоя.[9]

Данный метод исследования основан на анализе проникающего излучения, взаимодействующего с веществом объекта. После прохождения через материал излучение регистрируется детекторами, что позволяет получить данные о внутренней структуре. При обработке этих данных используются два ключевых допущения: во-первых, траектории лучей считаются строго прямолинейными, без учета возможной рефракции; во-вторых, предполагается, что ослабление излучения подчиняется линейному закону поглощения излучения в веществе, что существенно упрощает математическую обработку результатов.

2. Преобразование Радона. Синограмма

2.1. Преобразование Радона

Преобразованием Радона (ПР) функции $f(x, y)$ называется интегральное преобразование, задаваемое следующим образом. Пусть $f(x, y)$ – функция двух действительных переменных, определенная на всей плоскости и убывающая на бесконечности с достаточной скоростью для обеспечения сходимости соответствующих несобственных интегралов. Тогда преобразование Радона этой функции представляет собой функцию $R(s, \varphi)$, определяемую как интеграл вдоль прямой линии:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (2)$$

Здесь:

- s – расстояние от начала координат до прямой интегрирования.
- φ – угол ориентации прямой интегрирования относительно оси ОХ.
- t – параметр, задающий положение точки на прямой интегрирования.

Данное преобразование математически описывает процесс получения проекционных данных при томографическом сканировании объекта, где $f(x, y)$ представляет собой распределение коэффициента ослабления излучения в исследуемом сечении.

Преобразование Радона $R(s, \varphi)$ имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Оно представляет собой интегрирование функции $f(x, y)$ вдоль семейства прямых L , обладающих следующими характеристиками:

1. Все прямые L ортогональны единичному вектору $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$.
2. Параметр s определяет расстояние от начала координат до прямой L .
3. Знак s указывает положение прямой относительно начала координат в направлении вектора $\vec{n}$.

Математически это соответствует вычислению линейного интеграла:

$$R(s, \varphi) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) dx dy \quad (3)$$

где δ – дельта-функция Дирака, выделяющая точки, лежащие на указанной прямой.

Графическая иллюстрация данного преобразования представлена на рис. 12, где:

- Вектор $\vec{n}$ задает нормальное направление к прямой интегрирования.
- Параметр φ определяет угол поворота системы координат.
- Величина s задает смещение прямой интегрирования относительно центра.

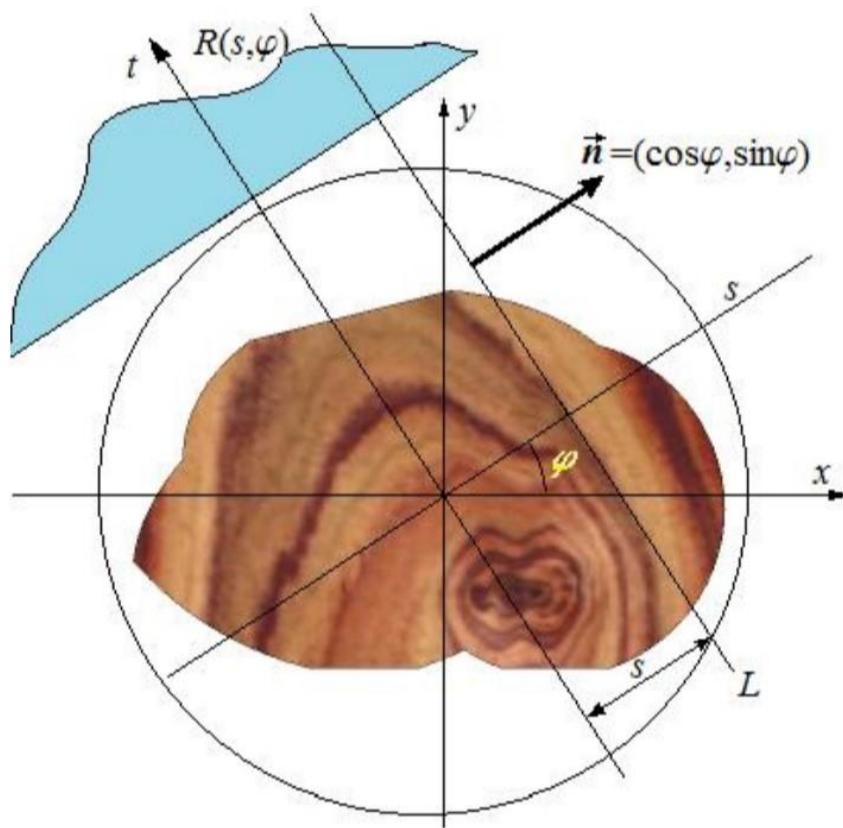


Рис. 12. К преобразованию Радона функции двух переменных.[9]

Такая интерпретация особенно важна в прикладных задачах компьютерной томографии, где:

- $f(x, y)$ описывает распределение плотности объекта
- Прямые L соответствуют траекториям рентгеновских лучей
- Значения $R(s, \varphi)$ представляют собой экспериментально измеренные проекционные данные

Преобразование Радона $R(s, \varphi)$ имеет важный физический смысл: для различных видов томографии. В терминах обработки изображений $R(s, \varphi)$ соответствует интегральной яркости объекта вдоль линии проекции, что отражает общую интенсивность излучения или света в заданном направлении. Математически это выражается как интегрирование $f(x, y)$ вдоль $L(s, \varphi)$, что позволяет перейти от локальных свойств объекта (плотность, яркость) к их интегральным характеристикам, измеряемым в проекционных экспериментах. Такая интерпретация лежит в основе томографических методов реконструкции, где по набору проекций $R(s, \varphi)$ восстанавливается исходное распределение $f(x, y)$.

2.2. Синограмма

Томография представляет собой метод преобразования *синограммы* (входных данных) в *томограмму* (результатирующее изображение) [10]. Синограмма формируется из последовательности проекций объекта s , полученных при его вращении с постоянным угловым шагом φ в диапазоне от 0° до 180° . Каждая проекция $R(s, \varphi)$ — это одномерный массив, значения которого являются интегральными суммами исходного двумерного массива (объекта) вдоль заданного направления. Именно эти значения и получаются при выполнении преобразования Радона (рис. 13).

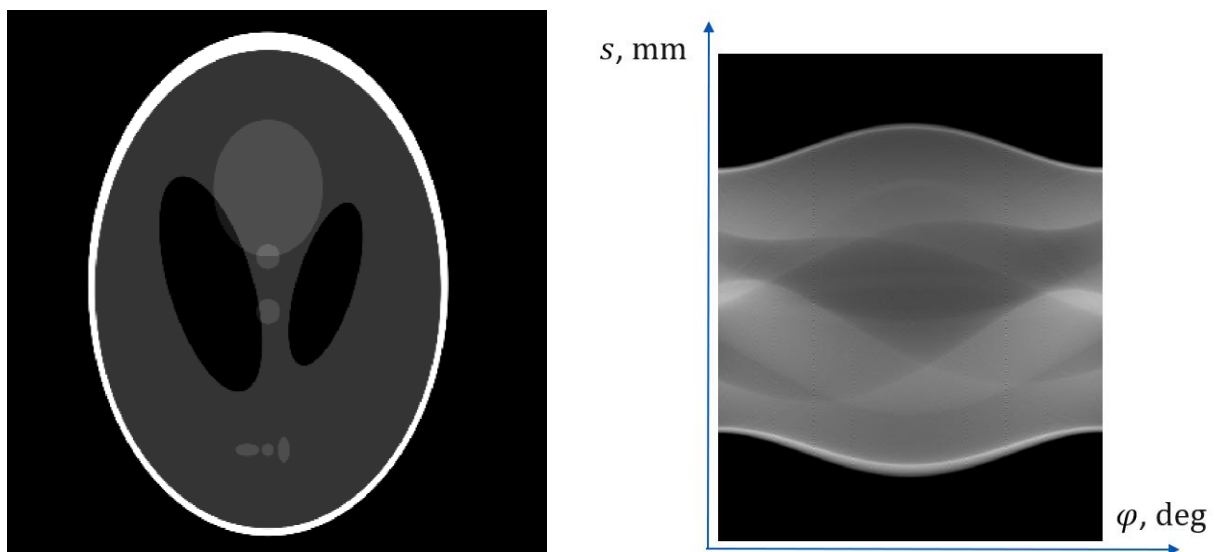


Рис. 13. Стандартный томографический фантом (слева) и его синограмма (справа).

Математически синограмма – это двумерный массив, где горизонтальная размерность соответствует разрешению исходного изображения (например, 512 точек для массива 512×512), а вертикальная – количеству угловых положений (при шаге 2° – 90 проекций, что даёт размер 512×90). Таким образом, томографическая реконструкция решает обратную задачу: по набору интегральных проекций (синограмме) восстанавливает исходное распределение (томограмму).

Рассмотрим на примерах, которые были выполнены с помощью функции `radon()` Matlab. На вход (исходное изображение, которое в дальнейшем необходимо восстановить) подавались фантомы простых изображений, чтобы более точно проследить, как происходит построение синограммы, в зависимости от формы объекта и его плотности.

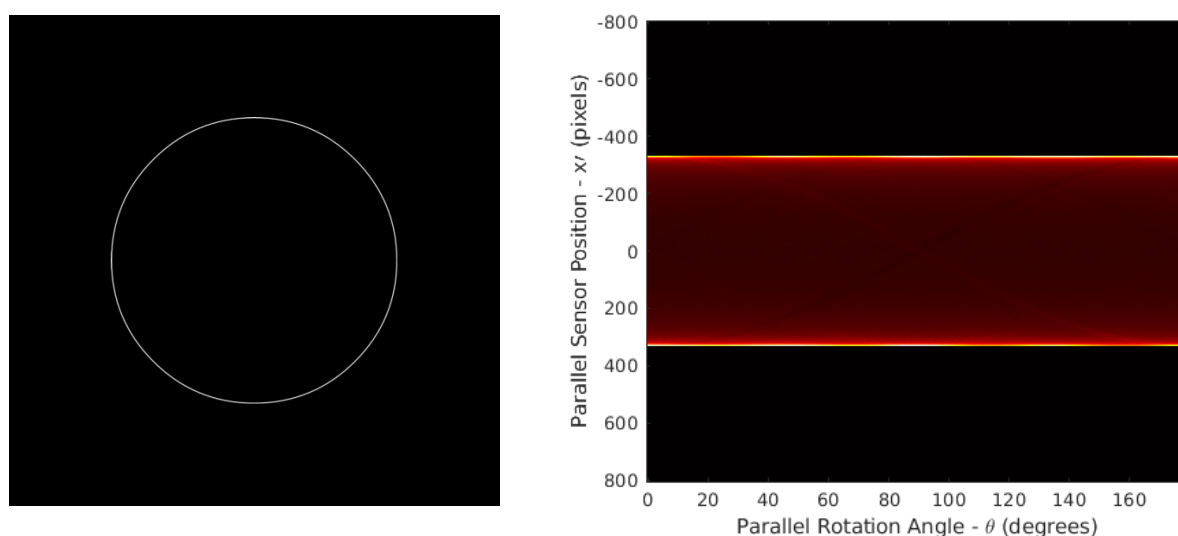


Рис. 14. Фантом пустой окружности (слева) и его синограмма (справа).

На рисунке 14 показан пустой круглый фантом – эта модель помогает наглядно увидеть, как формируется синограмма при отсутствии заполнения у источника излучения. Для лучшей видимости всех деталей синограмма отображена с использованием контрастной цветовой палитры "hot".

Синограмма имеет непрерывный вид, так как количество проекций было выбрано 180 («виртуальный проворот» производился через угол $\varphi = 1^\circ$). Две ярких линии обозначают границу окружности, тогда как внутренний темный

красный цвет показывает отсутствие изменение интенсивности, то есть пустоту внутри круга в данном случае.

Рассмотрим еще один пример, но уже с другим количеством проекций. На этот раз воспользуемся фантомом эллипса, находящимся не в центре картинки, а ближе к углу, чтобы более четко понимать распределение плотности, а также саму форму синограммы.

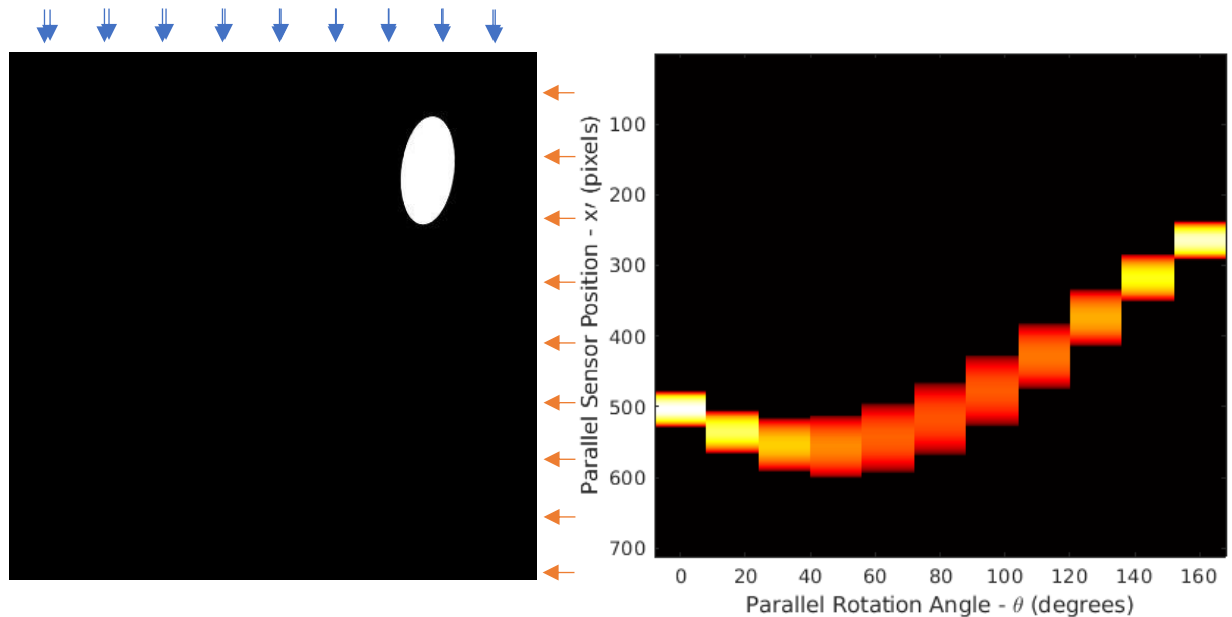


Рис. 15. Фантом эллипса (слева) и его синограмма (справа).

На рисунке 15 видно выраженные разрывы в синограмме. Это связано с малым количеством проекций – угол поворота φ составлял $11,25^\circ$. Такие пропуски данных неизбежно ухудшают качество реконструкции: как видно в следующем разделе, большее число проекций (в ПЭТ - детекторов) дает более четкую томограмму.

Яркость синограммы отражает плотность объекта вдоль линии "источник-детектор". Анализ показывает, что сканирование началось с верхнего положения (синие стрелки на рис. 15) – узкое яркое пятно в начале синограммы соответствует тонкому краю эллипса, где плотность пикселей максимальна.

Анализ синограммы под углом $\sim 90^\circ$ показывает характерные изменения: пятно становится шире, но его яркость снижается. Это прямо указывает, что в

данном положении детекторы находились сбоку от источника (см. оранжевые стрелки на рис. 15).

3. Обратное преобразование Радона. Томограмма

3.1. Обратное преобразование Радона. Метод Фурье синтеза.

Пусть $f(x)$ — функция вещественной переменной x . Её прямое преобразование Фурье (ПФ) определяется интегралом:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (4)$$

Обратное преобразование Фурье (ОПФ) позволяет восстановить исходную функцию:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (5)$$

Это означает, что любая "достаточно хорошая" функция может быть представлена как суперпозиция гармонических колебаний разных частот.

Для функции $f(x, y)$ двух переменных прямое преобразование Фурье задаётся двойным интегралом:

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dx dy \quad (6)$$

Оно получается последовательным применением одномерного ПФ по каждой переменной.

- Здесь w_1, w_2 — координаты в частотной области или координаты в фурье-пространстве, задающие направление и период гармонической составляющей.
- Обратное преобразование аналогично одномерному случаю:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2) e^{i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2 \quad (7)$$

Если в двумерном ПФ $e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dx dy$ (6) перейти к полярным координатам в частотной области:

$$w = (w_1, w_2) = \omega(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

то подынтегральное выражение $e^{-i(w_1x+w_2y)}$ можно записать как $e^{-i\omega s}$, где $s = x\cos\varphi + y\sin\varphi$ — координата вдоль направления φ .

Полный переход из координат (x, y) к (s, t) выглядит так:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\varphi - t\sin\varphi & s &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y &= s\sin\varphi + t\cos\varphi & \text{или} & \\ & & t &= y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{aligned}$$

Тогда двумерное ПФ преобразуется к виду:

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi) dt \quad (8)$$

Но внутренний интеграл — это в точности преобразование Радона $R[f](s, \varphi)$. Таким образом:

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi) e^{-i\omega s} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{R}(\omega, \varphi) \quad (9)$$

где $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi) e^{-i\omega s} ds$ — одномерное преобразование Фурье радоновского образа $R[f](s, \varphi)$ по переменной s .

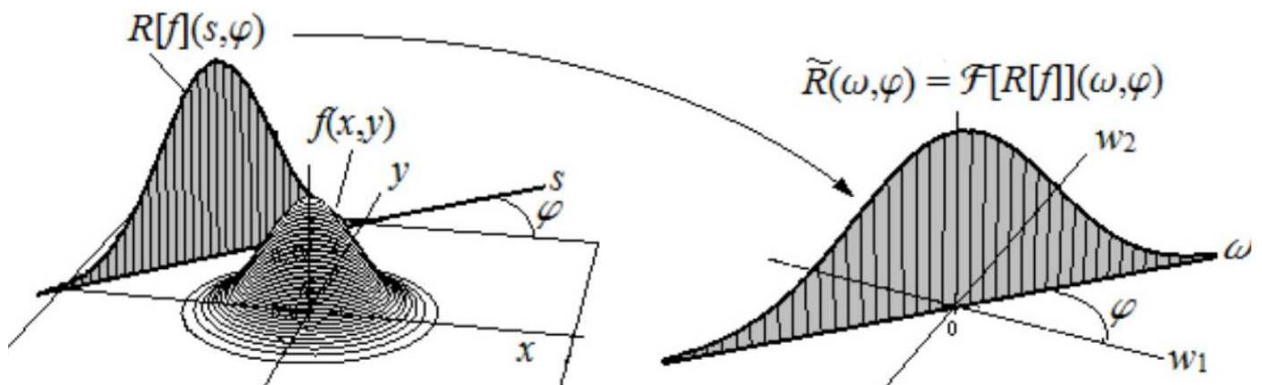


Рис. 16. Центральное сечение двумерно ПФ как одномерное ПФ радоновского образа.[9]

Физический смысл:

- Преобразование Фурье от проекции $R[f](s, \varphi)$ (т.е. вдоль одного направления φ) даёт сечение двумерного спектра $F(w_1, w_2)$ вдоль прямой, проходящей через начало координат под углом φ .
- Это основа алгоритмов томографической реконструкции: собирая проекции под разными углами, можно восстановить $F(w_1, w_2)$, а затем и саму функцию $f(x, y)$ через обратное ПФ (рис. 17).

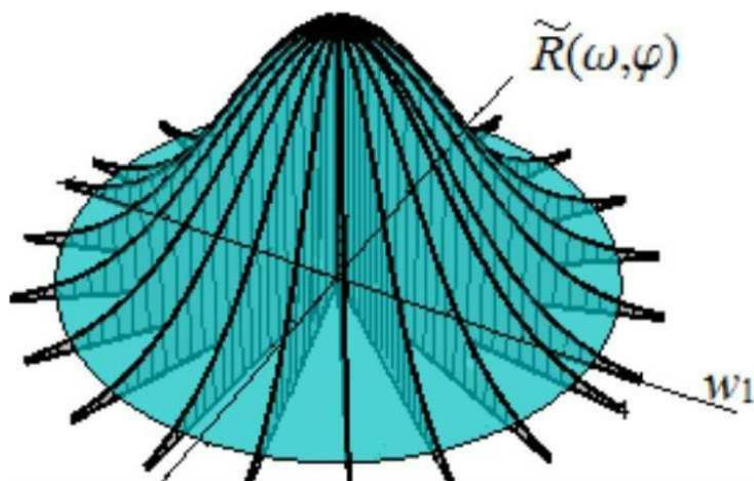


Рис. 17. Двумерное ПФ как множество одномерных ПФ радоновских образов.[9]

3.2. Томограмма

В данном разделе детально рассмотрим процесс построения томограммы на основе обратных проекций и обратного преобразования Радона. В качестве примера возьмем реальное изображение, представленное на рис. 13 (стр. 25). Можно увидеть, что объект имеет сложную неоднородную структуру как по распределению плотности, так и по геометрическим формам, что подчеркивает важность понимания принципов реконструкции.

На рисунке 18 представлены томограммы, полученные при разных параметрах сканирования:

- Угловой шаг 5° (36 проекций)
- Угловой шаг 2° (90 проекций)
- Угловой шаг 1° (180 проекций)

Результаты наглядно демонстрируют ключевую зависимость: уменьшение углового шага (и, соответственно, увеличение количества проекций) приводит к существенному улучшению качества реконструированного изображения.

В случае позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) зависимость качества изображения определяется не углом поворота системы, а количеством детекторов в кольце: чем больше детекторов в системе (и чем меньше угловое

расстояние между соседними детекторами), тем больше проекционных данных поступает на обработку и тем выше пространственное разрешение итоговой томограммы.

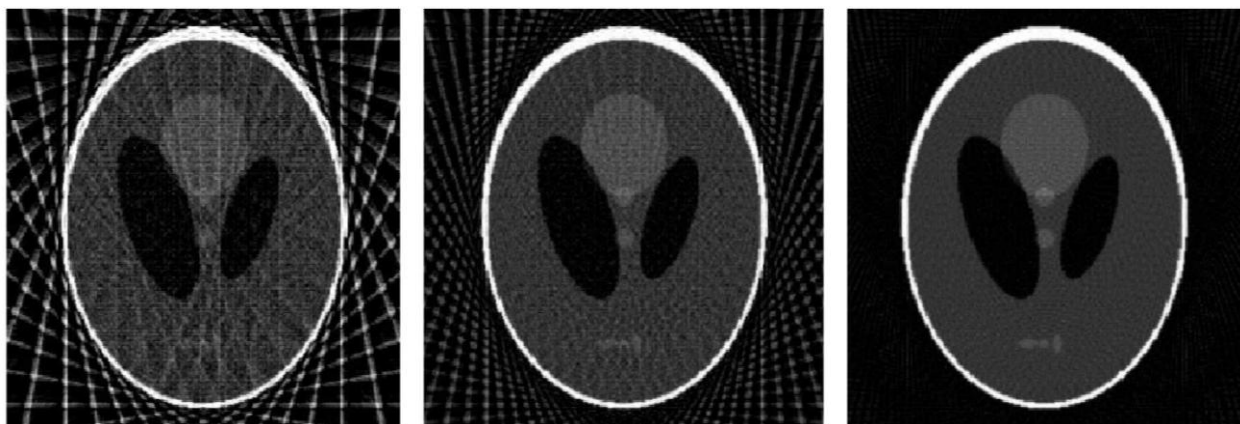


Рис. 18. Томограмма. 1) количество проекций = 36; 2) количество проекций = 90; 3) количество проекций = 180.

Фактически, в ПЭТ увеличение числа детекторов эквивалентно уменьшению углового шага в классической КТ, так как каждый детектор обеспечивает отдельную линию отклика (LOR). Поэтому современные ПЭТ-сканеры стремятся к максимально плотному расположению детекторных элементов.

Чтобы наглядно продемонстрировать, как количество проекций влияет на качество томографического изображения, обратимся к простому примеру с эллипсом, который был показан ранее на рисунке 15. Восстановление изображения было выполнено с помощью функции `iradon()` Matlab. Сравним результаты реконструкции этого объекта при использовании 16 проекций и при значительно большем их количестве - 180 проекциях (результаты представлены на рисунке 19).

При анализе полученных изображений сразу бросается в глаза существенная разница в качестве. Реконструкция по 16 проекциям дает достаточно шумное изображение с нечеткими, размытыми границами. Форма эллипса просматривается, но детализация оставляет желать лучшего. Совершенно иная картина наблюдается при использовании 180 проекций -

здесь можно наблюдать четкое, практически идеальное изображение эллипса с хорошо выраженными границами и полным отсутствием видимых шумов.

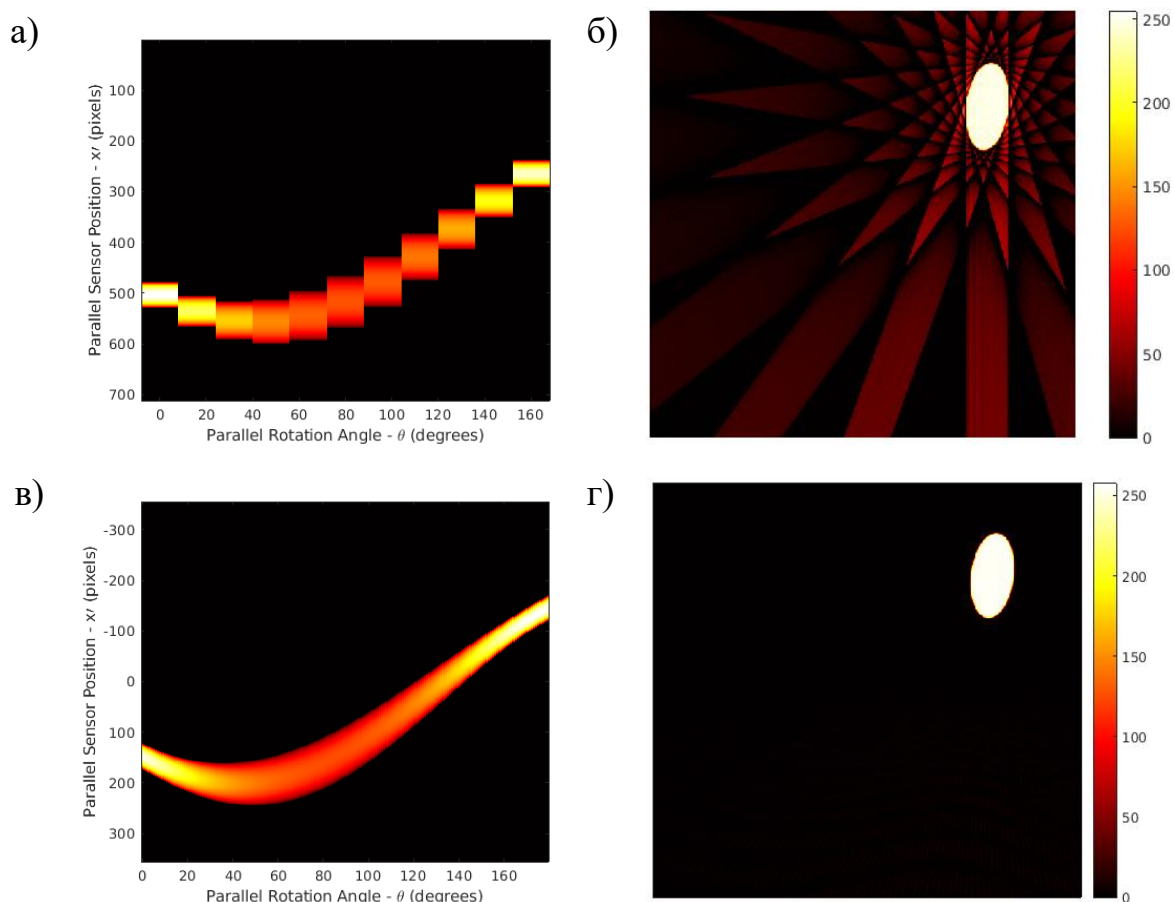


Рис. 19. 16 проекций: а) синограмма; б) томограмма
180 проекций: в) синограмма; г) томограмма

Такая разница объясняется фундаментальными принципами томографической реконструкции. Каждая дополнительная проекция предоставляет новую информацию о структуре объекта. Когда проекций мало (в нашем случае 16), алгоритм реконструкции вынужден интерполировать недостающие данные, что неизбежно приводит к появлению артефактов и снижению четкости. Напротив, при большом количестве равномерно распределенных проекций (180) система получает исчерпывающие данные об объекте со всех возможных ракурсов, что позволяет точно восстановить его форму и внутреннюю структуру.

Этот пример демонстрирует, почему в практической томографии так

важно использовать достаточное количество проекций. Разница между 16 и 180 проекциями настолько существенна, что становится заметна даже без специального оборудования или программного анализа – достаточно просто взглянуть на полученные изображения.

4. Код для восстановления изображения.

Первоначально разработка велась исключительно на платформе MATLAB, однако впоследствии проект был мигрирован на язык Python. Этот переход был обусловлен рядом стратегических соображений

1. *Кроссплатформенная совместимость.* Python, в отличие от MATLAB, является открытым языком программирования с полной кроссплатформенной поддержкой, что существенно упрощает развертывание системы на различных вычислительных платформах.
2. *Расширяемость функционала.* Благодаря богатой экосистеме научных библиотек (NumPy, SciPy, Matplotlib и других), Python обеспечил полное покрытие всего математического аппарата, ранее реализованного в MATLAB, включая:
 - Анализ и обработку сигналов
 - Численное моделирование
 - Визуализацию данных
3. *Поддержка и развитие.* Активное сообщество разработчиков и постоянное обновление Python-библиотек создают устойчивую основу для долгосрочного развития проекта.

Миграция проводилась с сохранением полной функциональной эквивалентности, при этом были достигнуты дополнительные преимущества в виде улучшенной масштабируемости и снижения эксплуатационных затрат.

Также код предполагает различные виды входных данных. На вход может подаваться как обычное изображение для прохождения полного цикла восстановления (изображение – синограмма – томограмма), так и просто

синограмма, которая была сформирована при помощи моделированных данных или данных с эксперимента.

Сначала происходит загрузка и обработка изображения для дальнейших операций (таблица 2).

Таблица 2. Загрузка изображения

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from skimage import io, color
from skimage.transform import radon, iradon
from sklearn.cluster import DBSCAN

image_path = "путь до необходимой картинки"
I = io.imread(image_path)

if I.shape[2] == 4: # Если изображение имеет 4 канала (RGBA)
    I = I[:, :, :3] # Удаляем альфа-канал

P = color.rgb2gray(I) # Преобразование в градации серого

plt.imshow(P) # показ изображения, что даем на вход нужную
картинку
```

Перед началом реконструкции необходимо определить основные параметры обработки данных. Размер выходного изображения задается величиной `output_size`, а угол поворота `theta3` определяет угловой шаг между проекциями детекторов.

При работе с фантомными изображениями вместо готовых синограмм требуется предварительное преобразование данных. Для этого используется функция `radon()`, выполняющая стандартное преобразование Радона. В частности, в приведенном примере кода (таблица 3) применяется угловой шаг 11.25° , что при полном сканировании на 180° дает 16 проекций. Этот же подход использовался ранее при генерации синограмм для фантомных изображений, начиная со страницы 25.

Таблица 3. Входные параметры

```
theta3 = np.arange(0, 180, 11.25)
output_size = max(P.shape)

# Создание синограммы
#R3 = radon(P, theta=theta3)
```

Финальный этап обработки данных представляет собой восстановление изображения с помощью функции `iradon()`. Для работы этой функции необходимо задать два основных параметра: саму синограмму (полученную непосредственно из измерений или сгенерированную из фантомного изображения) и угол поворота `theta3`, определяющий расположение детекторов при сканировании.

Функция `iradon()` реализует классический алгоритм обратного проецирования, преобразующий данные проекций в двумерное изображение. Помимо обязательных параметров, можно при необходимости настроить дополнительные опции, влияющие на качество и детализацию реконструированного изображения.

Таблица 4. Восстановление изображения

```
dtheta3 = theta3[1] - theta3[0]
I1 = iradon(P, theta=theta3, output_size=output_size)
```

На заключительном этапе программы выполняется визуализация восстановленного изображения с последующим сохранением в файловых форматах, удобных для дальнейшего анализа. Функция отображения томограммы позволяет наглядно оценить качество реконструкции, демонстрируя пространственное распределение интенсивностей в исследуемом сечении.

Таблица 5. Отображение и сохранение томограммы

```
vmin = 0
vmax = np.max(I1)

# Отображение восстановленного изображения
```

```
plt.figure()
plt.imshow(I1, cmap='hot', aspect='auto', vmin=vmin, vmax=vmax)
plt.colorbar()
plt.title('Reconstruction from Parallel Beam Projection')
plt.axis('off')
plt.show()

# Путь для сохранения массива данных
data_file_path = 'томограмма_в_текстовом_формате.txt'

np.savetxt(data_file_path, I1, fmt='%.3f') # Форматирование до
3 знаков после запятой

# Путь для сохранения итогового изображения
file_path_to_save_image = 'путь_до_томограммы.png'

plt.imsave(file_path_to_save_image, I1, cmap='hot', vmin=vmin,
vmax=vmax)
```

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. Моделирование установки с точечным источником

В рамках работы была выполнена параметризация и моделирование макета ПЭТ-сканера с использованием платформы GEANT4. Основной целью исследования стала верификация характеристик детектирующей системы при регистрации аннигиляционного излучения.

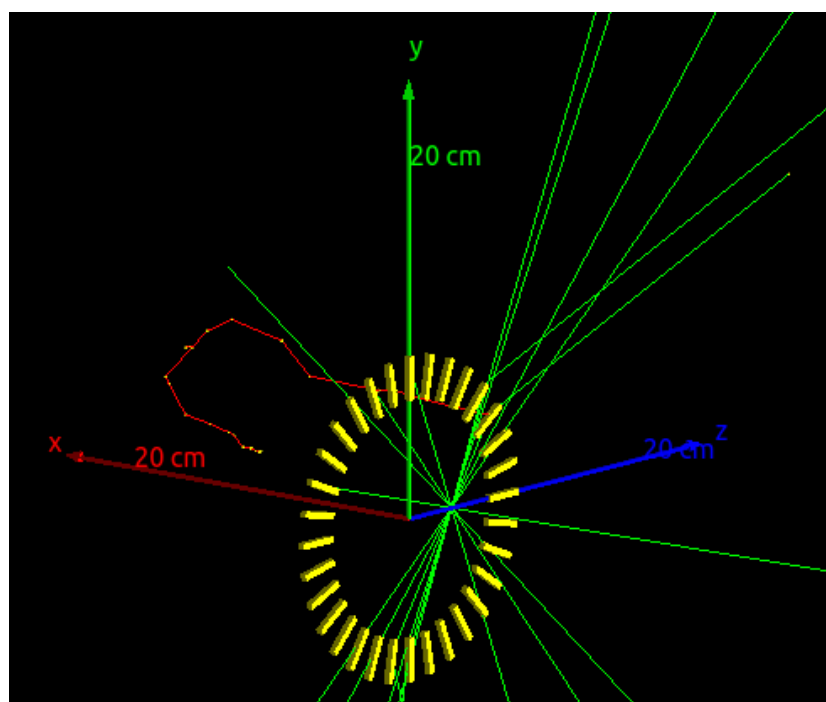


Рис. 20. Моделированная установка с точечным источником.

Моделирование учитывало ключевые особенности экспериментальной установки, включая кольцевую геометрию детектора с 32 модулями и их физические параметры. Точечный источник гамма-квантов с энергией 511 кэВ генерировал пары частиц, распространяющихся в противоположных направлениях, что соответствует реальному процессу аннигиляции позитронов.

В ходе моделирования особое внимание уделялось реалистичному описанию процессов взаимодействия излучения с детекторными элементами. Были учтены свойства сцинтилляционных кристаллов GAGG и характеристики кремниевых фотоумножителей, определяющие

эффективность регистрации и временное разрешение системы.

Полученные данные о пространственно-временном распределении зарегистрированных событий позволяют оценить рабочие параметры установки, включая эффективность детектирования и точность определения координат. Результаты моделирования были использованы для оптимизации конструкции прототипа и разработки алгоритмов обработки данных, что будет описано ниже.

Такое численное моделирование представляет собой важный этап проектирования ПЭТ-системы, позволяющий сократить количество дорогостоящих натурных экспериментов.

2. Моделирование установки с источником круглой формы

Для приближения модели к реальным условиям работы ПЭТ-сканера был выполнен следующий этап моделирования, включающий исследование распределённых источников излучения. В отличие от первоначального точечного источника, в новых расчётах рассматривались источники конечных размеров с круговой геометрией.

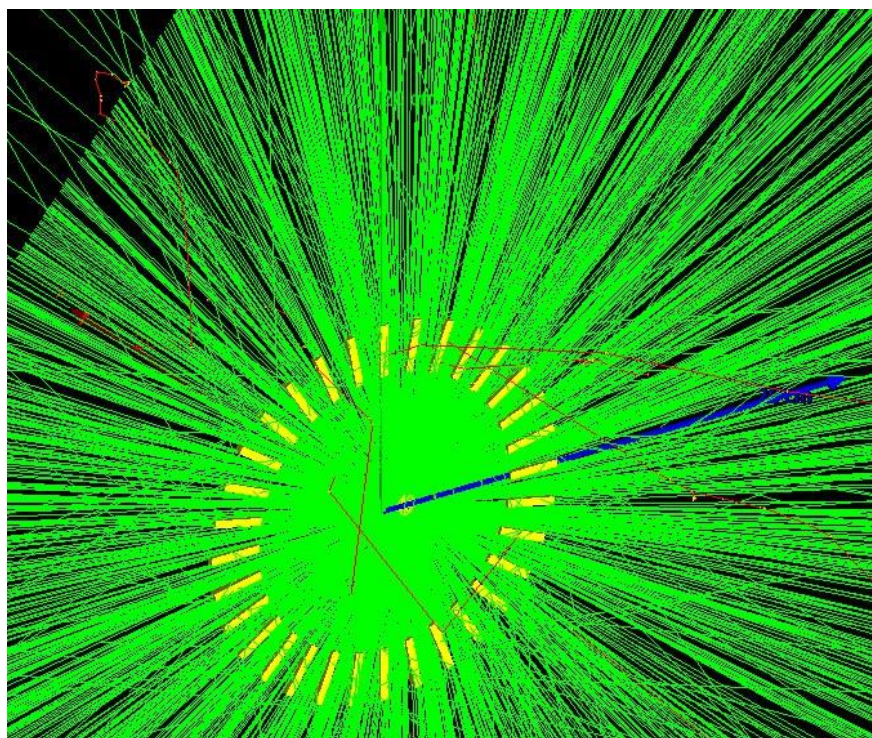


Рис. 21. Моделированная установка с источником круглой формы.

Особое внимание уделялось анализу зависимости характеристик детектирования от размеров источника. Были смоделированы:

- Отдельные круглые источники различного диаметра.
- Комбинации нескольких источников разного размера (см. прилож. 2).

Такое моделирование позволяет оценить:

1. Влияние размеров источника на пространственное разрешение системы
2. Способность установки различать близко расположенные источники
3. Особенности наложения сигналов от различных источников

Результаты этого этапа моделирования представлены в следующих разделах, где подробно анализируются полученные значения для дальнейшей обработки результатов с реальной ПЭТ-системы.

Проведённые моделирования существенно дополняют первоначальную модель и позволяют более точно прогнозировать рабочие характеристики разрабатываемой ПЭТ-системы в условиях, максимально приближенных к реальным условиям эксплуатации.

ГЛАВА 4. ФИЛЬТРАЦИЯ

1. Фильтрация синограммы

Процесс фильтрации синограмм осуществляется в частотной области с использованием стандартных фильтров, встроенных в функцию `iradon()`. Результаты применения этих фильтров и их влияние на качество реконструкции детально обсуждаются в шестой главе работы. В данном разделе будут подробно рассматриваться принципы работы и особенности каждого из доступных фильтров.

1.1. Ram-Lak

Фильтр Рам-Лака (названный в честь исследователей Ramachandran и Lakshminarayanan) является базовым частотным фильтром в алгоритме FBP (Filtered Back Projection). Его необходимость возникает из-за математических особенностей преобразования Радона:

- В частотной области проекционные данные неравномерно заполняют пространство (избыток низких частот)
- Фильтр компенсирует это через умножение на частотную характеристику вида $|\omega|$, то есть выделяет высокочастотные компоненты.

Частотная характеристика фильтра [11]:

$$H(\omega) = |\omega| \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\max}}\right), \quad (10)$$

где:

- ω – частота
- $\omega_{\max}$ – частота Найквиста (максимальная частота в дискретной системе)
- $\text{rect}()$ – прямоугольная функция (обрезка за пределами $\pm \omega_{\max}$)

В пространственной области соответствует:

$$h(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi r/T)}{(\pi r/T)} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(\pi r/2T)}{(\pi r/2T)} \right)^2$$

Данный фильтр обеспечивает сохранение резкости изображения за счет того, что не подавляет высокие частоты, а усиливает их. Это позволяет достичь максимального теоретического разрешения при реконструкции, что особенно важно при анализе мелких структур.

Однако такая особенность имеет и обратную сторону — фильтр значительно усиливает высокочастотный шум, присутствующий в данных. Это может приводить к появлению характерных артефактов в виде лучевых искажений, известных как "звёздность" (streaking artifacts) [12].

Наибольшая эффективность фильтра проявляется при работе с идеальными данными, не содержащими шумов. Он особенно хорошо подходит для фантомных исследований и тех случаев, когда критически важно сохранить высокое пространственное разрешение, например, при анализе мелких структур или тонких деталей изображения.

1.2. Shepp-Logan

Фильтр Shepp-Logan представляет собой модифицированную версию фильтра Ram-Lak, где введена дополнительная частотная аподизация для более мягкой обработки высокочастотных компонент [13].

Основное отличие от классического фильтра Ram-Lak заключается в плавном подавлении высоких частот через умножение частотной характеристики на функцию $\text{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_{max}}\right)$. Такая модификация приводит к заметному уменьшению шумовых артефактов при небольшом снижении резкости реконструированного изображения.

Математически частотная характеристика выражается как:

$$H(\omega) = |\omega| \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_{max}}\right) \quad (11)$$

Особенно хорошо этот фильтр зарекомендовал себя при исследовании объектов со средним уровнем контраста и умеренным отношением сигнал-шум. По сравнению с фильтром Ram-Lak, он демонстрирует [14]:

1. Уменьшение "звездных" артефактов на 30-40%.
2. Снижение уровня шума в 1.5-2 раза.
3. Незначительное (10-15%) ухудшение разрешения.

В практической реализации фильтр Shepp-Logan часто служит компромиссным вариантом между "агрессивным" фильтром Ram-Lak и "мягкими" фильтрами типа Hamming (рассмотрен ниже), что делает его одним из наиболее популярных выборов для клинических исследований.

1.3. Cosine

Фильтр Cosine представляет собой другой компромиссный вариант между сохранением деталей и эффективным подавлением шумов. В отличие от фильтра Shepp-Logan, где используется sinc-аподизация¹, здесь применяется косинусная функция, обеспечивающая более плавное затухание высоких частот.

Частотная характеристика фильтра [16]:

$$H(\omega) = |\omega| \cdot \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_{max}}\right) \quad (12)$$

Такая форма обеспечивает мягкое подавление высокочастотных шумов, сохранение основных диагностически значимых деталей и меньшую склонность к артефактам по сравнению с Ram-Lak.

Фильтр демонстрирует наилучшие результаты при обработке данных со средним уровнем шума. В клинической практике он особенно полезен для исследований с ограниченной статистикой отсчетов, случаев, когда фильтр Shepp-Logan дает избыточную "зернистость", реконструкции изображений с плавными перепадами плотности.

¹ Аподизация – это процесс изменения интенсивности света в дифракционном изображении точечного источника света. Она используется для улучшения качества изображения или для достижения определенных эффектов. Когда свет проходит через узкую щель или отверстие, он начинает распространяться волнами, которые взаимодействуют друг с другом и создают дифракционную картину [15].

1.4. Hamming

Фильтр Hamming представляет собой модификацию окна Hann (см. ниже), разработанную для более гибкого управления соотношением между подавлением шумов и сохранением разрешения. Его ключевая особенность — возможность настройки параметра α , что делает его универсальным инструментом для различных клинических задач [17].

Частотная характеристика [18]:

$$H(\omega) = |\omega| \cdot \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\omega}{\omega_{max}}\right) \right] \quad (13)$$

где:

- Стандартное значение $\alpha = 0.54$ (оптимально для большинства ПЭТ/КТ исследований).
- Диапазон регулировки: $\alpha \in [0.5, 0.6]$.

Фильтр Hamming, благодаря своей адаптивной природе, предлагает сбалансированный подход для клинических исследований. Использование регулируемого параметра α позволяет достичь значительного снижения уровня шумов – до 8% от общего уровня сигнала. Как подчеркивается в рекомендациях AARM (2021), такая характеристика ценна при работе с низкодозовыми протоколами сканирования, где проблема шумов выходит на первый план.

Клинические наблюдения показывают, что фильтр Hamming эффективно подавляет лучевые искажения, но при этом может создавать ложные контуры вокруг высококонтрастных объектов, особенно при значениях α превышающих 0.56 [19].

Также, фильтр Hamming демонстрирует хорошую устойчивость при работе с ограниченным числом проекций (менее 30), что может быть критично в определенных случаях. Современные клинические рекомендации склоняются к использованию данного фильтра при исследованиях паренхиматозных органов – печени, почек, головного мозга [20].

1.5. Hann

Фильтр Hann относится к классу оконных фильтров с гладким частотным откликом. Его основная характеристика — сильное подавление высокочастотных шумов за счет применения косинусоидальной аподизации к стандартной ramp -функции $|\omega|$ [21].

Частотная характеристика:

$$H(\omega) = |\omega| \cdot \left[0.5 + 0.5 \cos \left(\frac{\pi \omega}{\omega_{max}} \right) \right] \quad (14)$$

где второе слагаемое представляет собой классическое окно Ханна.

К ключевым особенностям можно отнести шумоподавление. Фильтр Hann уменьшает высокочастотный шум в 3-4 раза по сравнению с фильтром Ram-Lak, благодаря чему практически устраняется эффект «звездочки» [14]. Но из-за фильтрации высокочастотных компонент, в пользу низкочастотных, снижается полезное разрешение, примерно на 25% относительно фильтра Shepp-Logan.

В медицине рекомендован для исследований с низкой дозой облучения. Оптимален для мягких тканей, таких как молочная железа, легкие, также используется в педиатрической визуализации [19].

1.6. Сравнение фильтров

После разбора всех встроенных фильтров, можно провести их небольшое сравнение. На рисунке 22 изображено сравнение по количеству шумов и увеличению резкости, стрелка показывает от меньшего значения к большему (например, Ram-Lak соответствует максимальному количеству шумов, но и максимальной резкости).

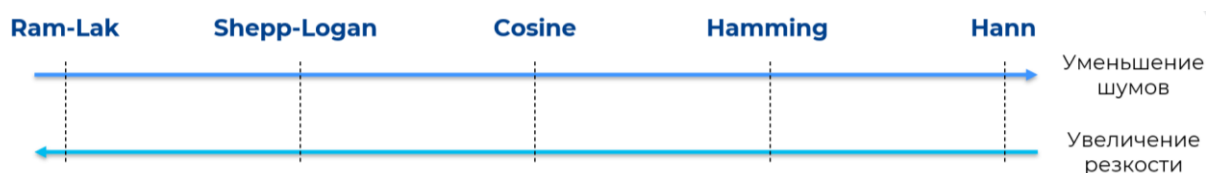


Рис. 22. Сравнение встроенных фильтров.

Также можно произвести сравнение фильтров в частотной области (рис. 23).

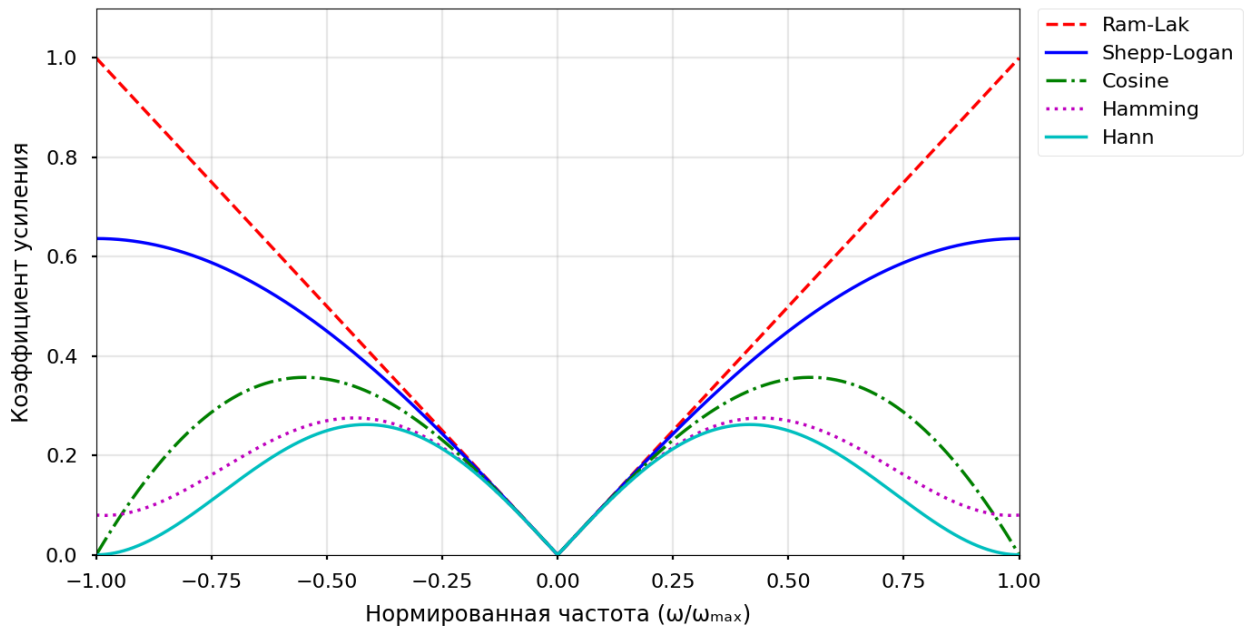


Рис. 23. Сравнение частотных характеристик фильтров реконструкции.

2. Фильтрация изображения. DBSCAN

В предыдущем разделе были рассмотрены методы фильтрации именно синограммы. В этом же разделе будет предложен один из методов фильтрации итогового изображения для получения большей резкости и ясности в расположении источника.

2.1. Общие принципы

DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) представляет собой алгоритм кластеризации, основанный на анализе плотности распределения данных в пространстве. В отличие от, например, метода k-means, он не требует предварительного задания количества кластеров что является одной из причин выбора данного алгоритма.

DBSCAN работает непосредственно с матрицей попарных расстояний между объектами. Он использует два основных параметра настройки:

- ε (eps) — радиус окрестности для анализа плотности.
- min_samples — минимальное количество соседей в ε -окрестности для

определения "ядерных" точек.

Алгоритм автоматически выделяет три типа точек:

- Ядерные (core points) — имеют достаточное количество соседей в заданной окрестности.
- Граничные (border points) — попадают в окрестность ядерных, но сами не образуют плотной области.
- Шумовые (noise points) — не принадлежат ни одному кластеру.

Такой подход обеспечивает устойчивость к выбросам и способность находить кластеры произвольной формы.

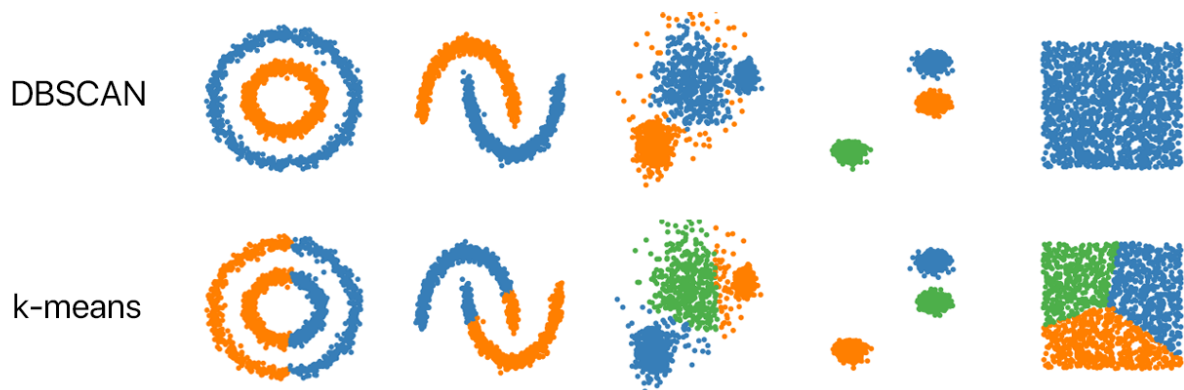


Рис. 24. Наглядное сравнение работы алгоритмов DBSCAN и k-means [23].

Математическое определение и формирование алгоритма [24]. Пусть задана некоторая симметричная функция расстояния $\rho(x, y)$ и константы ϵ и m . Тогда

1. Назовём область $E(x)$, для которой $\forall y: \rho(x, y) \leq \epsilon$, ϵ -окрестностью объекта x .
2. Корневым объектом или ядерным объектом степени m называется объект, ϵ -окрестность которого содержит не менее m объектов:
 $|E(x)| \geq m$.
3. Объект p непосредственно плотно-достижим из объекта q , если $p \in$

$E(q)$ и q — корневой объект.

4. Объект p плотно-достижим из объекта q , если $\exists p_1, p_2, \dots p_n, p_1 = q, p_n = p$, такие что $\forall i \in 1 \dots n - 1: p_{i+1}$ непосредственно плотно-достижим из p_i .

Алгоритм DBSCAN начинает работу с выбора произвольного корневого объекта p из датасета, который помечается как посещённый, после чего все его непосредственно плотно-достижимые соседи добавляются в список обхода. Для каждой точки q из этого списка выполняется пометка, и, если q также оказывается корневой точкой, все её соседи аналогично добавляются в список обхода. Математически можно показать, что формируемые таким образом кластеры обладают свойствами максимальности — их невозможно расширить дополнительными точками без нарушения условий плотности, и связности в смысле плотно-достижимости. Важное следствие этого подхода заключается в том, что, если после завершения обхода остались непосещённые точки, процесс можно перезапустить из нового корневого объекта, при этом гарантируется, что вновь образованный кластер не будет пересекаться с уже существующими.

Такой подход обеспечивает три ключевых свойства: во-первых, все точки данных будут корректно классифицированы как принадлежащие кластерам или как шумовые; во-вторых, результат не зависит от порядка обработки точек; в-третьих, сохраняются топологические характеристики исходного распределения данных. При этом под корневой точкой понимается объект, имеющий не менее `min_samples` соседей в заданной ϵ -окрестности, что является фундаментальным параметром алгоритма.

2.2. Применение в фильтрации изображений и томографии

В данном разделе рассматривается применение алгоритма DBSCAN для фильтрации и кластеризации изображений на основе методики, описанной в источнике [25]. Согласно этому исследованию, обработка изображений

выполнялась в два этапа: сначала применялся алгоритм k-Means для цветовой кластеризации изображения, после чего результаты этой кластеризации использовались как входные данные для алгоритма DBSCAN. Такой последовательный подход позволяет сначала сократить цветное пространство изображения с помощью k-Means, а затем выделить значимые кластеры пикселей с учетом их пространственного распределения с помощью DBSCAN.

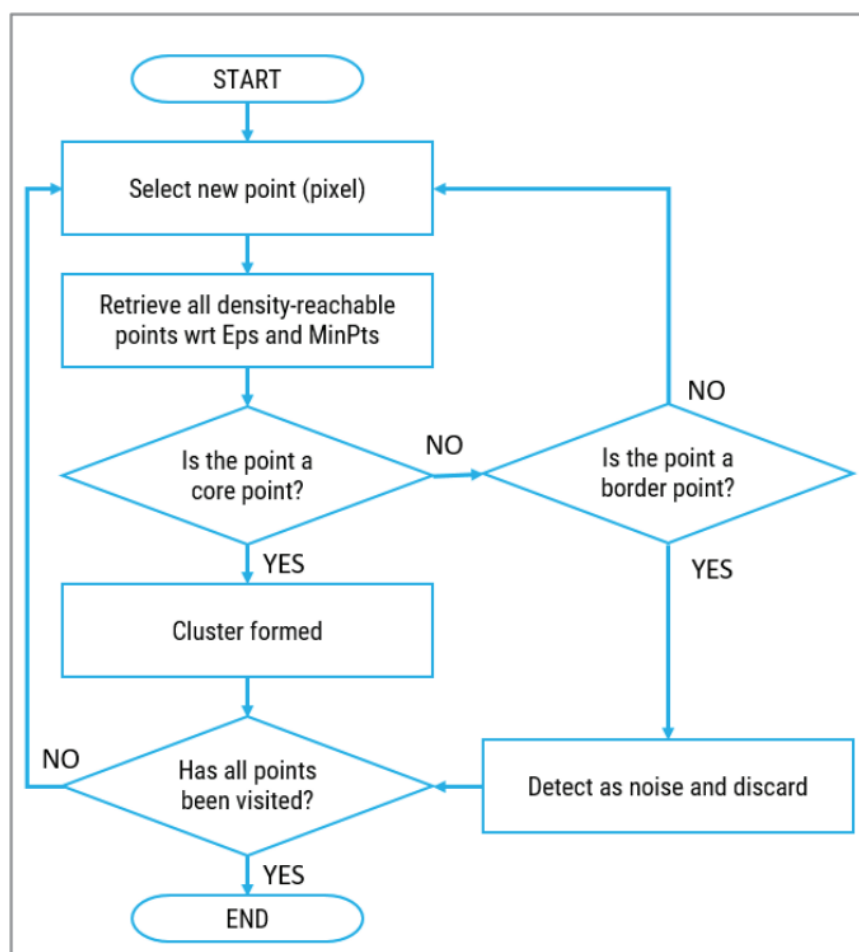


Рис. 25. Блок-схема алгоритма DBSCAN. [25]

В этом алгоритме точка, представленная пикселем, выбирается произвольно (рис. 25). Все плотностно-достижимые точки относительно ϵ (eps) – расстояния между точками друг от друга, и минимального количества точек, необходимых для формирования кластера (MinPts), извлекаются. После этого проверяется, является ли данная точка ядерной. Если да, формируется кластер. Если данная точка является граничной, то плотностно-достижимых точек не существует, и алгоритм переходит к другим точкам изображения.

Процесс продолжается до тех пор, пока все пиксели не будут обработаны.

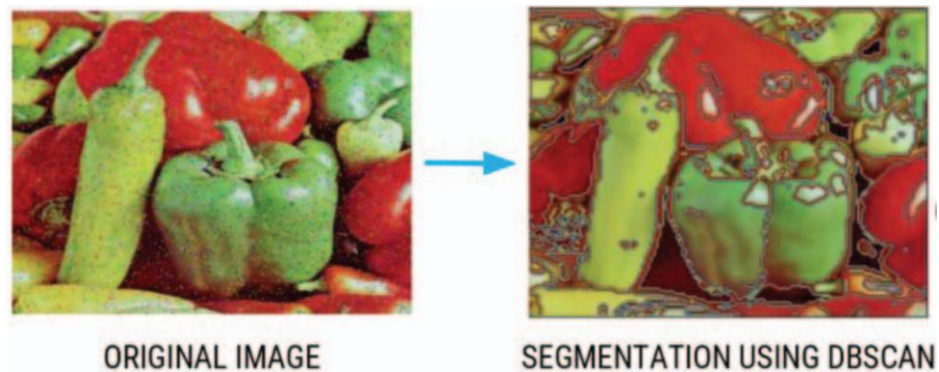


Рис. 26. Пример кластеризации изображения с помощью DBSCAN. [25]

На рисунке 26 представлен пример изображения, сегментированного с помощью DBSCAN. На рисунке видно, что отдельные кластеры группируются вместе, формируя изображение, близкое к оригиналу. Можно наблюдать, что пиксели схожего цвета кластеризуются вместе.

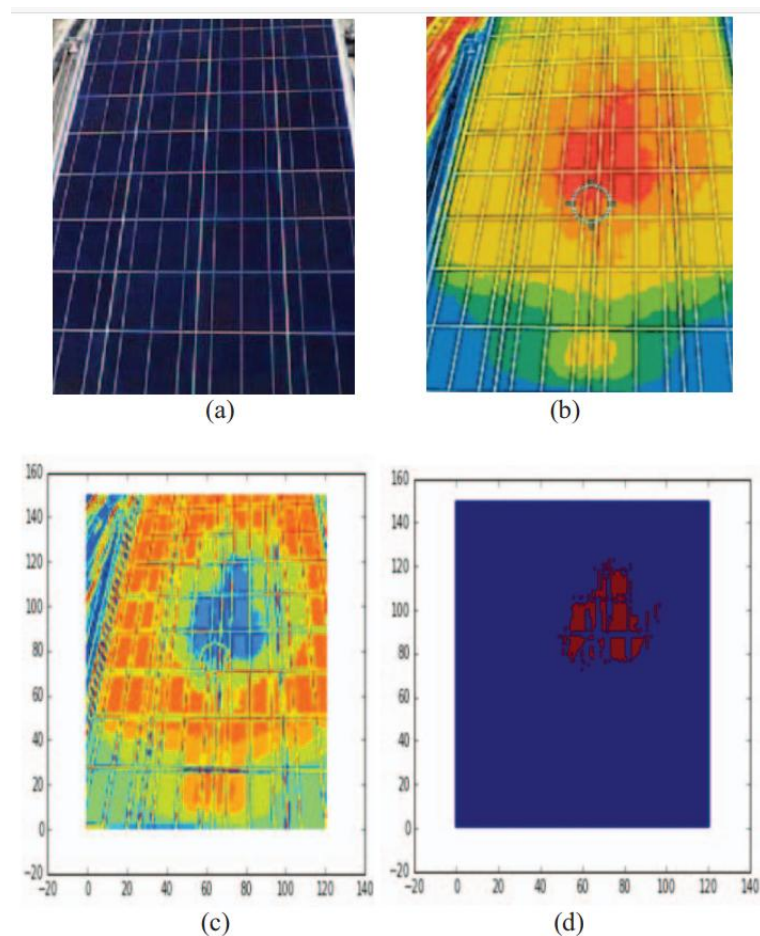


Рис. 27. Пошаговый результат обработки изображения. [25Ы]

а) исходное изображение; б) применение k-means;
с) кластеризация DBSCAN; д) выявление нагрета.

Также, в рассматриваемой работе особое внимание уделяется анализу тепловых изображений фотогальванических модулей, где комбинация k-Means и DBSCAN показала свою эффективность для выявления областей перегрева (рис. 27). Метод k-Means используется для предварительного упрощения изображения путем сокращения количества цветов, что облегчает последующую обработку. Затем алгоритм DBSCAN анализирует пространственное распределение этих квантованных цветов, выделяя компактные скопления пикселей, которые могут соответствовать потенциальным дефектам.

Применение в томографии основано на тех же самых принципах и алгоритмах, описанных выше. Реальный пример выделения опухоли в мозге представлен на рис. 28.

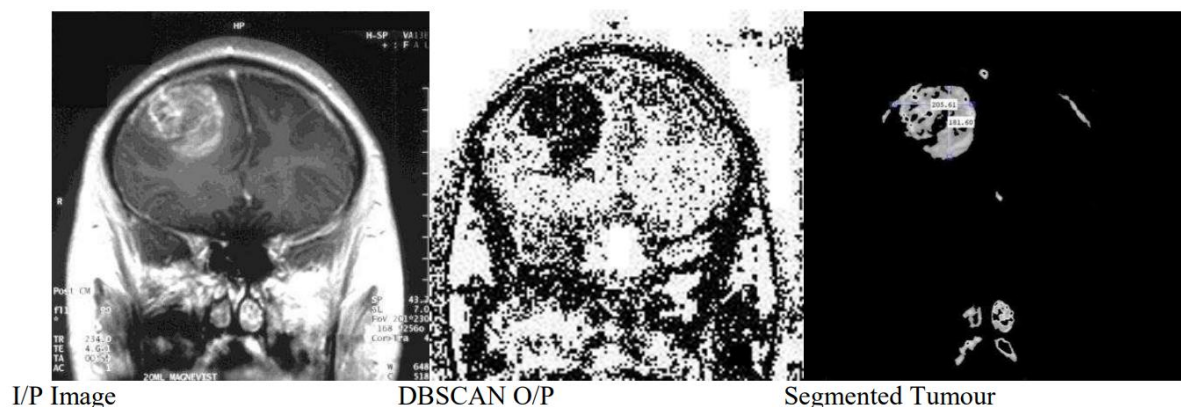


Рис. 28. Сегментация опухоли мозга с помощью DBSCAN [26].

2.3. Разработанный на основе исследований код

В ходе изучения применения метода кластеризации DBSCAN для фильтрации шумов в изображении, был разработан собственный код на языке Python, который так же фильтрует итоговое изображение, полученное после выполнения функции `iradon()`. Стоит отметить, что этот код является обособленным и, при необходимости, может использоваться для любого изображения, не только для томограмм.

Код состоит из нескольких частей:

1. Основной алгоритм (функция `apply_dbscan()`) выполняет загрузку, обработку и сохранение результата.

Таблица 6. Псевдокод функции `apply_dbscan()`

```
ПРОЦЕДУРА apply_dbscan(image_path, output_path):
    // Загрузка и подготовка данных
    image = загрузить_изображение_в_оттенках_серого(image_path)
    pixels = найти_координаты_пикселей_с_intensity_больше_0(image)
    intensities = получить_интенсивности_пикселей(image, pixels)
    X = объединить_координаты_и_интенсивности(pixels, intensities)

    // Автоподбор параметров
    min_samples = найти_оптимальное_min_samples(X)
    eps = найти_оптимальное_eps(X, min_samples)

    // Кластеризация
    labels = выполнить_DBSCAN(X, eps, min_samples)

    // Постобработка
    filtered_image = создать_фильтрованное_изображение(image.shape, X,
    labels)

    // Визуализация и сохранение
    показать_результаты(image, filtered_image, eps, min_samples)
    сохранить_изображение(filtered_image, output_path)

    ВЕРНУТЬ filtered_image, eps, min_samples
КОНЕЦ ПРОЦЕДУРЫ
```

2. Автоподбор параметров `eps`, `min_samples`.

Принципиальная блок-схема работы функций `find_optimal_eps()` и `find_optimal_min_samples()` представлены на рис. 29. Стоит также отметить, что работа этих функций предусматривает ручную корректировку параметров, если пользователя не удовлетворяет полученный один из параметров. Также, меняя эти параметры вручную, можно проследить, как меняется изображение и сделать определенные выводы о методе кластеризации DBSCAN и его применении к изображениям.

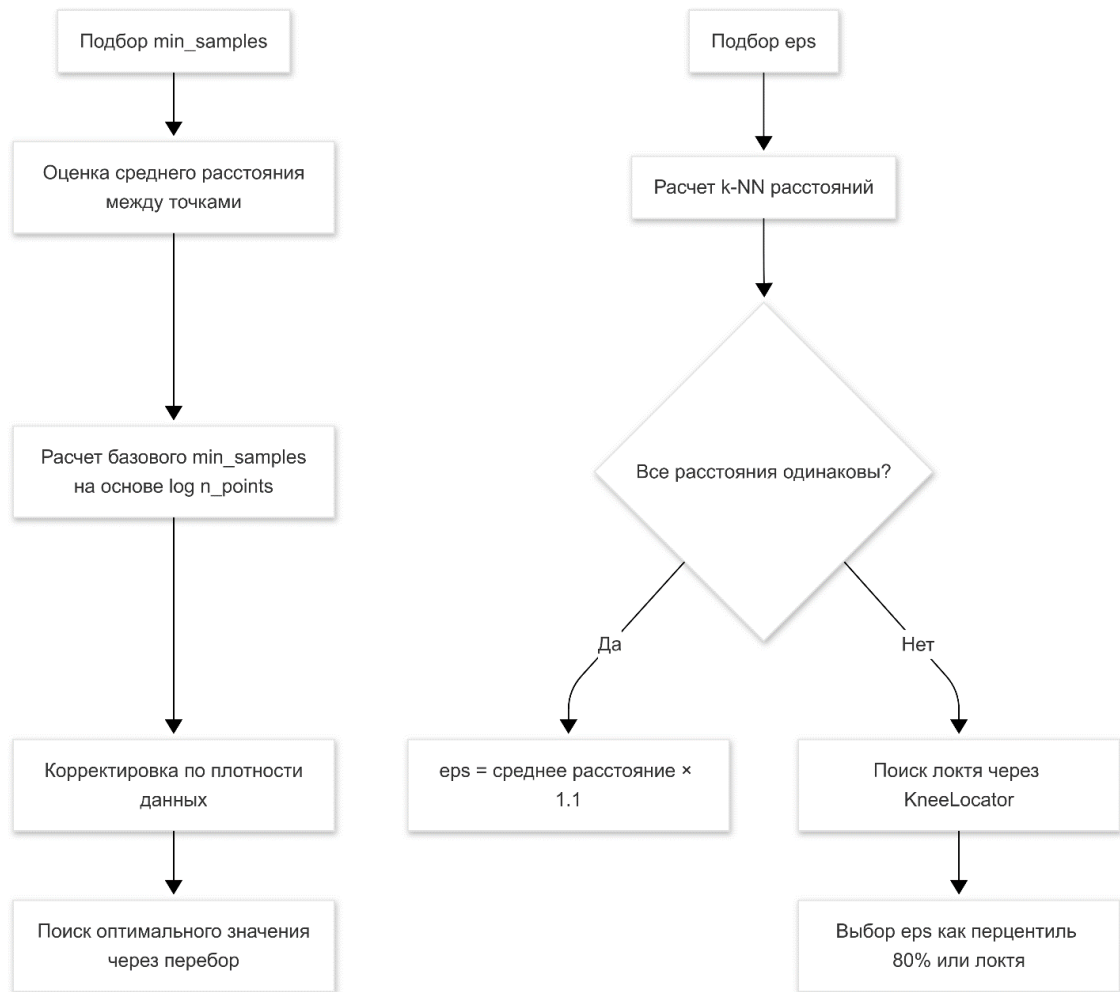


Рис. 29. Принципиальная блок-схема работы функций по автоматическому подбору параметров для кластеризации.

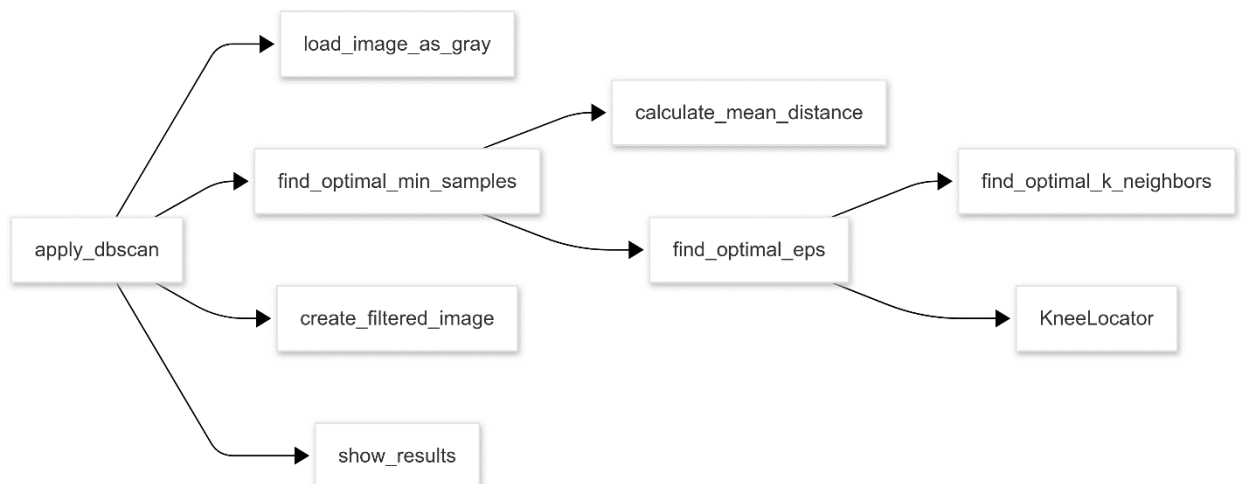


Рис. 30. Порядок вызова функций при выполнении DBSCAN фильтра.

На рис. 30 изображено графическое представление вызовов функций, где также можно увидеть вспомогательные функции, которые позволяют

реализовать полную автономность кода, если это необходимо.

С полным кодом фильтра изображений с помощью метода кластеризации DBSCAN можно ознакомиться в приложении 3.

ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗУЧЕННОГО. РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Моделированные данные. Точечный источник

Синограмма

В качестве первого этапа разработки кода по восстановлению изображения с макета ПЭТ было проведено моделирование точечного источника (см. стр. 37) и получена его синограмма с помощью программного пакета ROOT CERN. В качестве построения была использована встроенная функция заполнения двумерной гистограммы `TH2D()` и палитра оттенков `COLZ`.

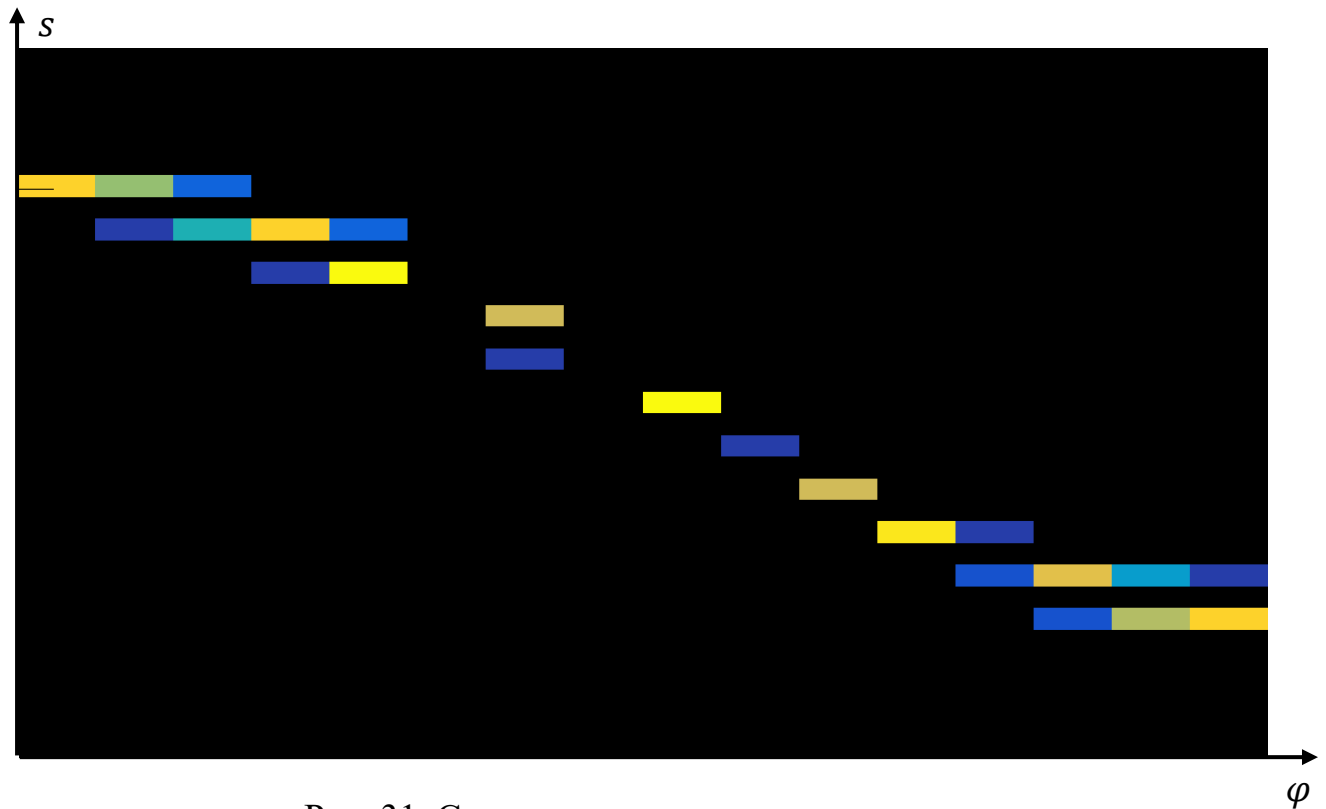


Рис. 31. Синограмма точечного источника.

Исходя из параметров установки (см. стр. 18), была выбрана следующая биновка для построения всех синограмм:

- Для оси $\varphi \in [0; 180]$ – 16 бинов, что соответствует углу между детекторами. Тогда на один бин будет приходиться 11.25° .
- Для оси $s \in [-50; 50]$ – 33 бина, что означает 1 бин = 3 мм. Этот размер был взят исходя из размеров детекторов.

Восстановленное изображение

При анализе восстановленного изображения на рис. 32, полученного с помощью программы (см. стр. 33), наблюдается четко выраженный пик интенсивности в позиции с координатами (7; 17) пикселей. Учитывая масштабную зависимость (1 пиксель соответствует 3 мм), определенные координаты источника совпадают с заданными при моделировании параметрами с точностью до 3 мм. Успешное восстановление положения точечного источника с такой точностью послужило основанием для перехода к моделированию данных с характеристиками, более соответствующими параметрам реальной экспериментальной установки.

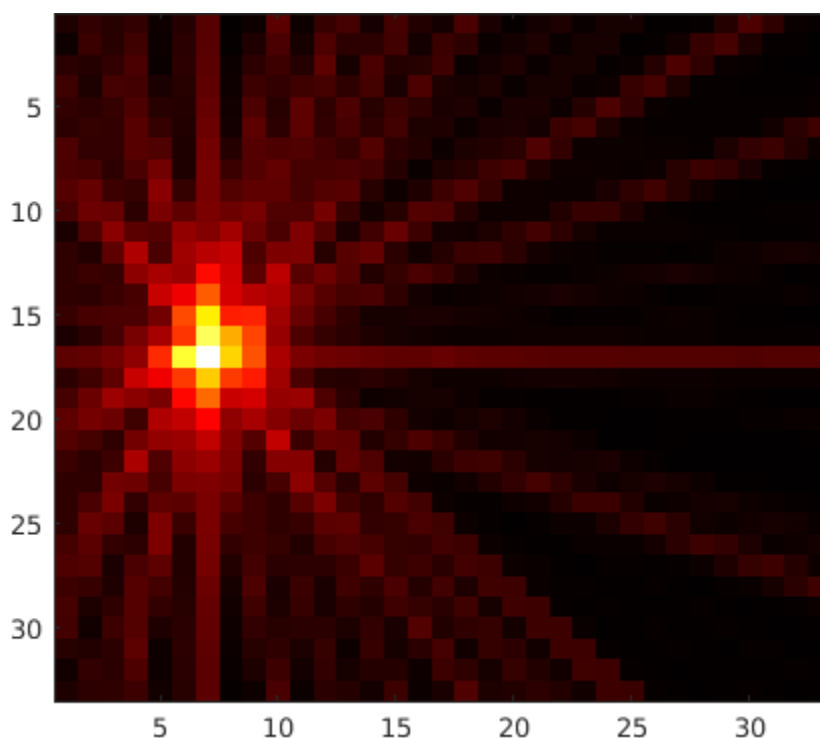


Рис. 32. Восстановленное изображение точечного источника.

Однако, результаты восстановления изображения высокую зашумленность, что потребовало применения методов фильтрации. Для минимизации шумов и точной локализации источника излучения были последовательно опробованы различные алгоритмы фильтрации, описанные выше, результаты которых представлены ниже.

Применение фильтров синограммы

Так как восстановленное изображение можно представить в трехмерном виде (рис. 33), то можно оценить такие параметры, как:

- Отношение сигнал/шум.
- Полуширина на полувысоте по оси X (далее – ПШПВ_x).
- Полуширина на полувысоте по оси Y (далее – ПШПВ_y).

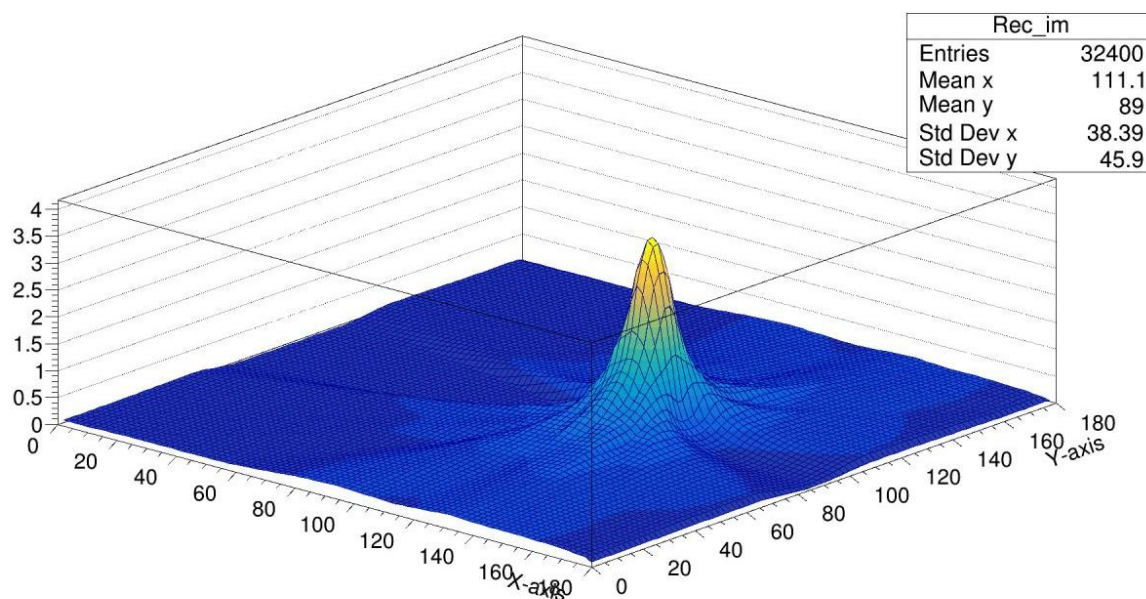


Рис. 33. Пример восстановленного изображения в трехмерном виде

Эти параметры необходимо оценить для дополнительного понимания, какой результат нам дает тот или иной способ фильтрации. На рис. 34 представлено полученное сравнение как в виде изображений, так и в виде математической оценки точности восстановления.

Исходя из математических результатов, для моделированного точечного источника наилучшим образом подходит способ фильтрации Hann, так как у него самое большое отношение сигнал/шум.

С точки же зрения локализации источника выигрывает фильтр Ram-Lak, так как дает наибольшую резкость (что и было описано ранее). Исходя из полученных на данном этапе результатов, дальнейшая обработка изображений будет производиться для 3х типов: без фильтра, с фильтрами Ram-Lak, Hann.

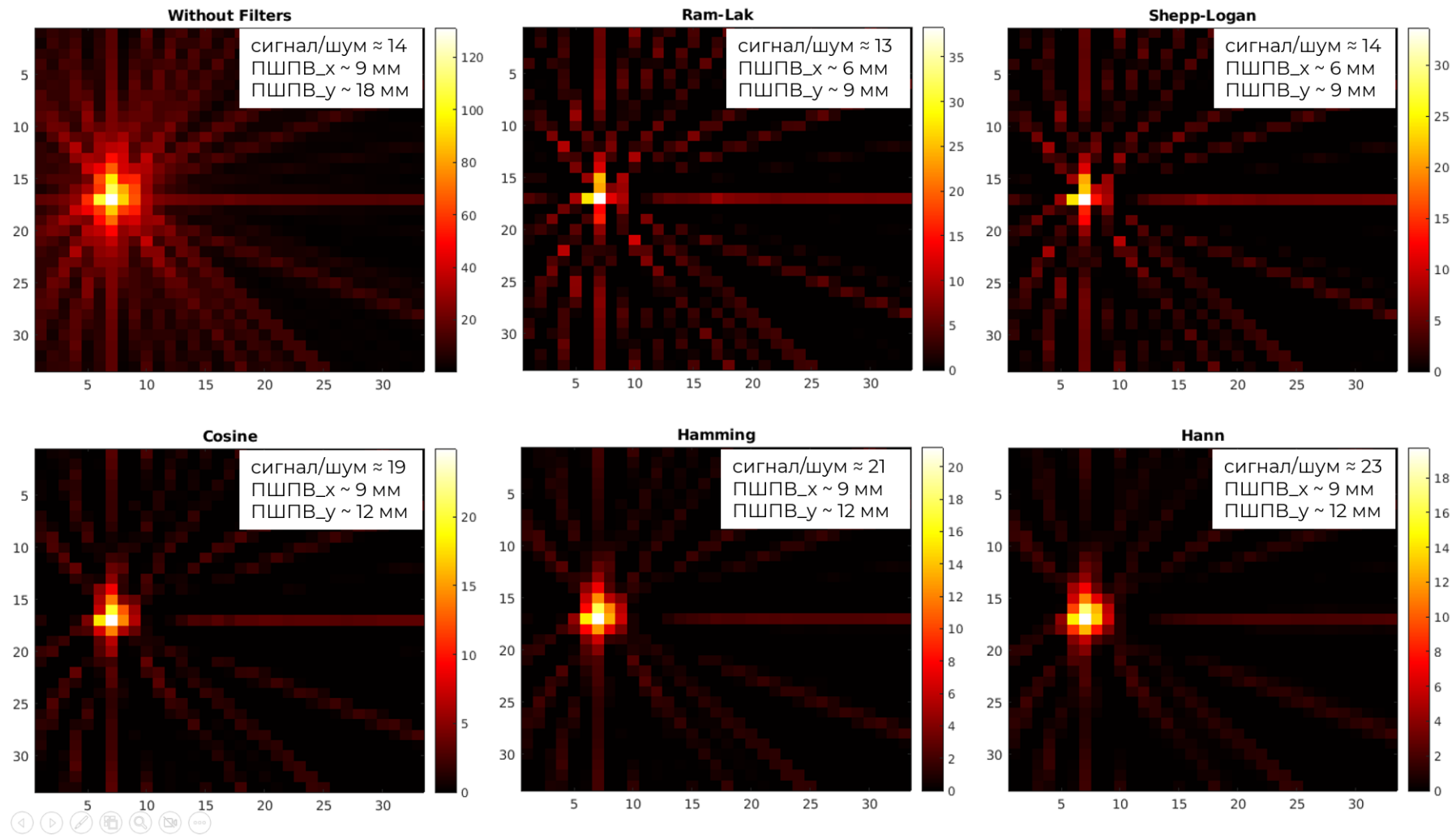


Рис. 34. Сравнение различных фильтров синограммы для моделированного точечного источника.

Применение DBSCAN

После применения алгоритма DBSCAN для восстановленного изображения без применения фильтров над синограммой явно улучшилась локализация и уменьшилось практически до нуля количество шумов (рис. 35).

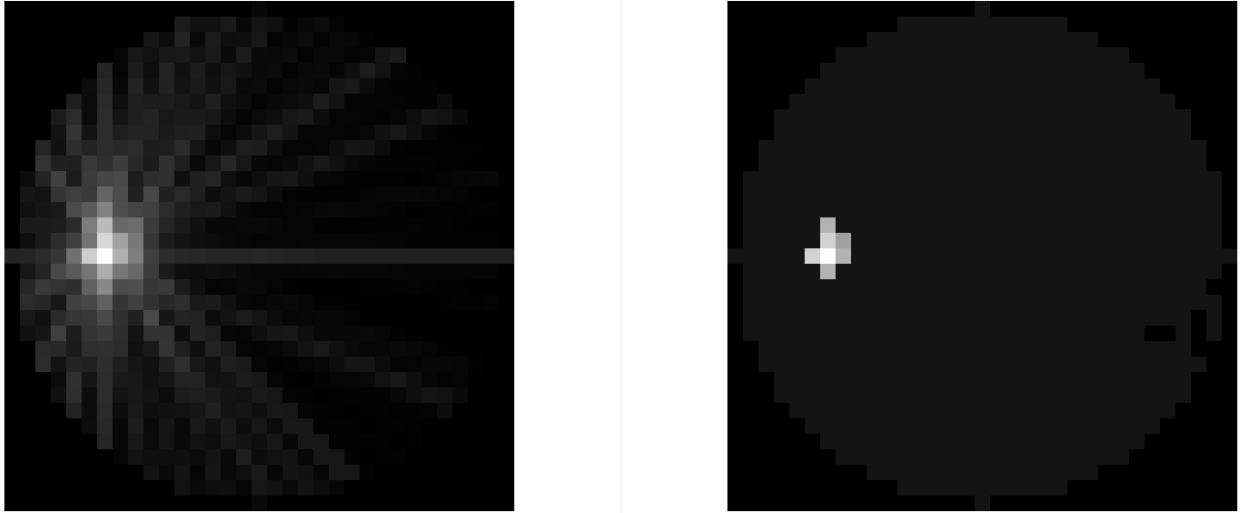


Рис. 35. Восстановленное изображение без фильтров синограммы (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

Однако для восстановленного изображения с применением фильтра Ram-Lak все не так очевидно (рис. 36). Локализация источника определенно улучшилась, но из-за количества шумов на входной картинке, в итоговом изображении можно так же наблюдать определенную зернистость.

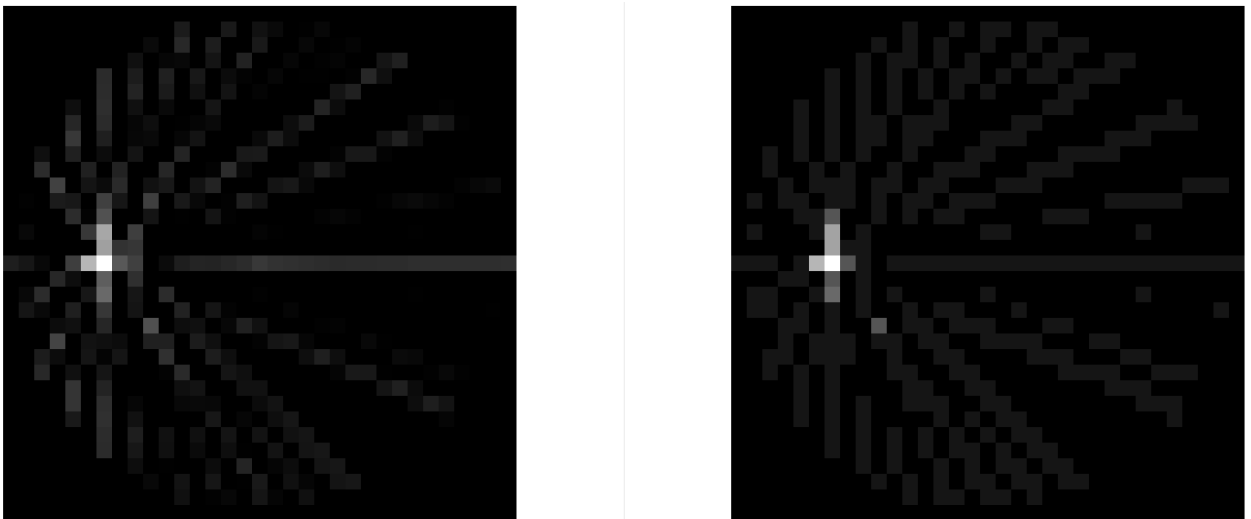


Рис. 36. Восстановленное изображение, фильтр Ram-Lak (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

В результатах применения фильтра DBSCAN для восстановленного

изображения с фильтром Нанн, представленных на рис. 37, наблюдаются и улучшение локализации, и уменьшение шумов, при этом не появилась дополнительная зернистость.

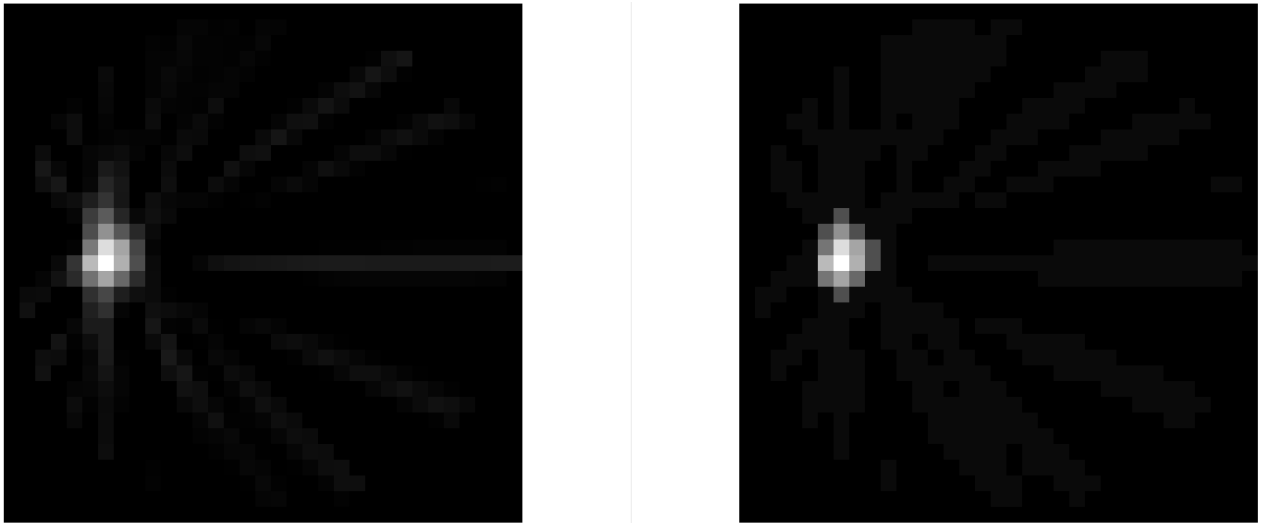


Рис. 37. Восстановленное изображение, фильтр Нанн (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

2. Моделированные данные. Множество круговых источников различного диаметра.

Изначальное схематичное положение источников

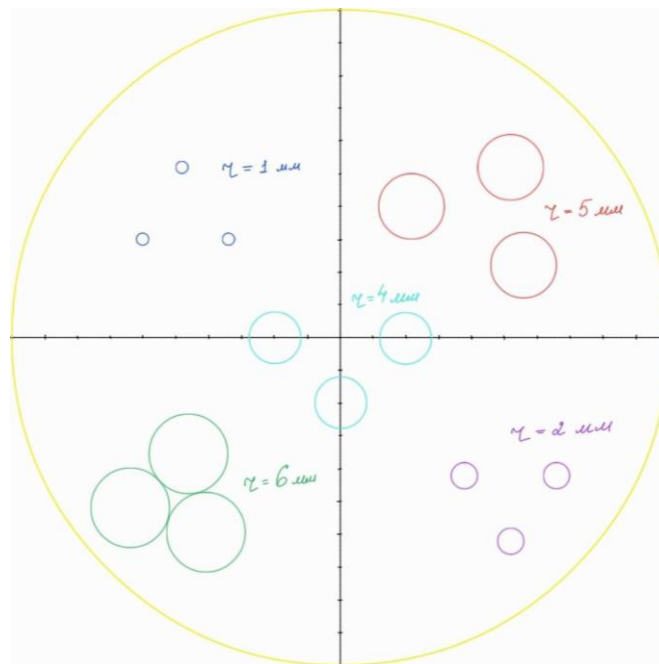


Рис. 38. Схематичное расположение множества круговых источников.

Для своеобразной калибровки алгоритма по восстановлению и

фильтрации изображения, было проведено моделирование нескольких круглых источников с радиусами: 1, 2, 4, 5, 6 мм (рис. 38).

Синограмма

Полученная синограмма (рис. 39) не дает пока что четкого представления о восстановленном изображении, но по ней можно проследить, как плотность различных кругов накладывается друг на друга.

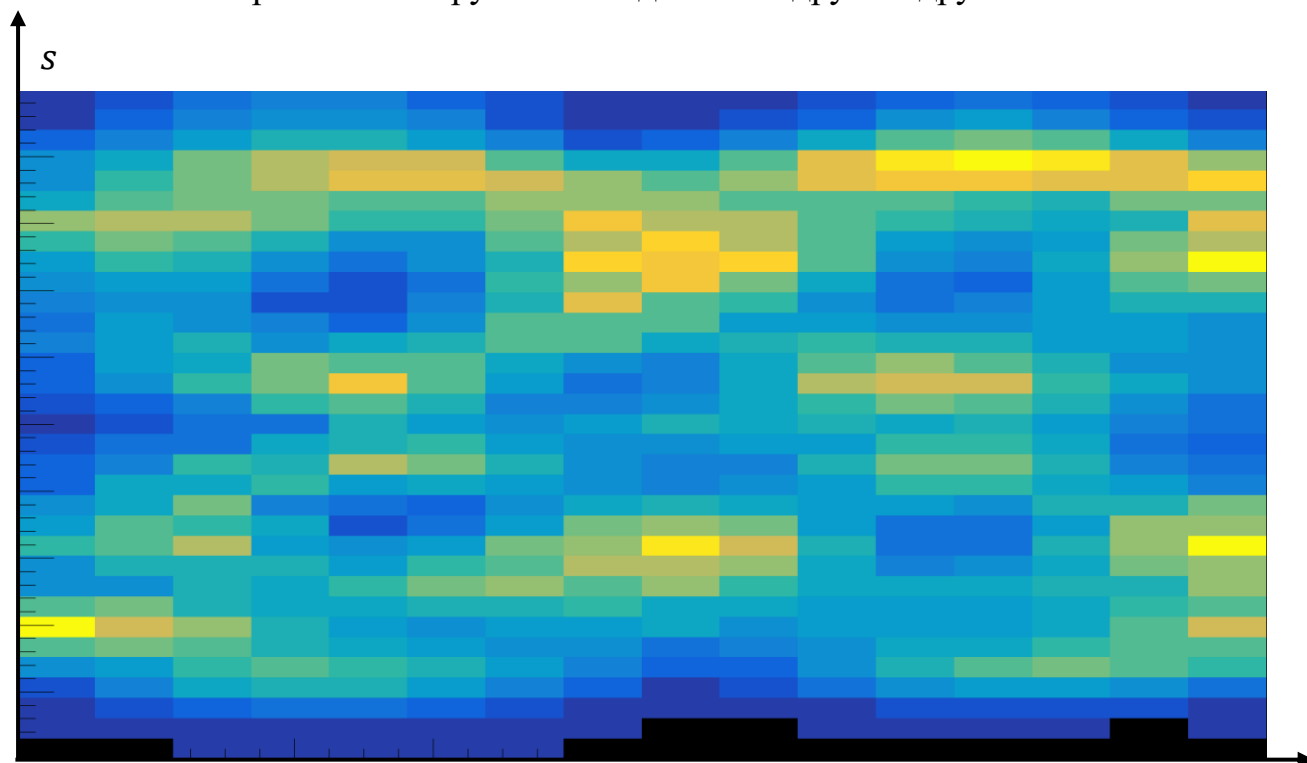


Рис. 39. Синограмма множественных круговых источников различного диаметра. φ

Восстановленное изображение

Изображение, полученное без применения фильтров, имеет очень низкую резкость (рис. 40). Отдельные источники разрешаются лишь в центральной области поля зрения.

Из-за достаточно сложной формы итогового изображения очень сложно в дальнейшем оценивать работу фильтров, как это было сделано выше. На данном этапе работы оценка качества фильтров и в принципе восстановления изображения проводилась «на глаз»: сколько самостоятельно получилось насчитать источников, столько записываем, потом сравниваем, где число получилось наиболее близкое к истине.

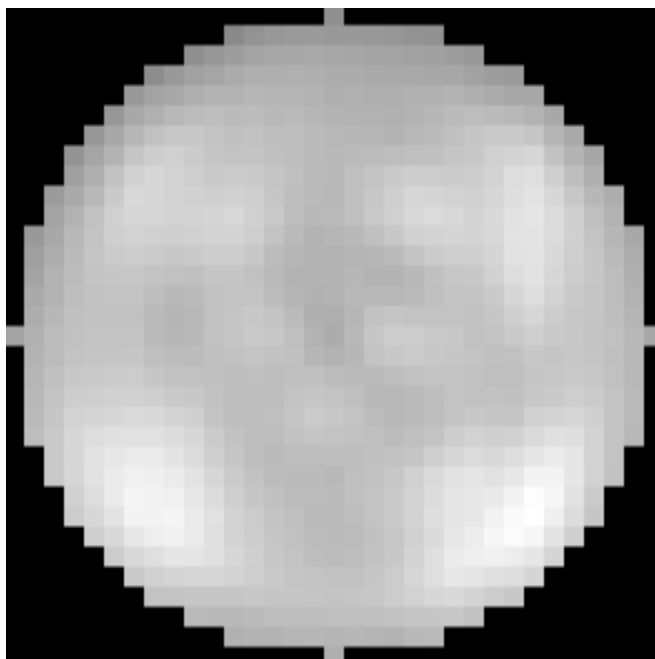


Рис. 40. Восстановленное изображение множественных круглых источников.

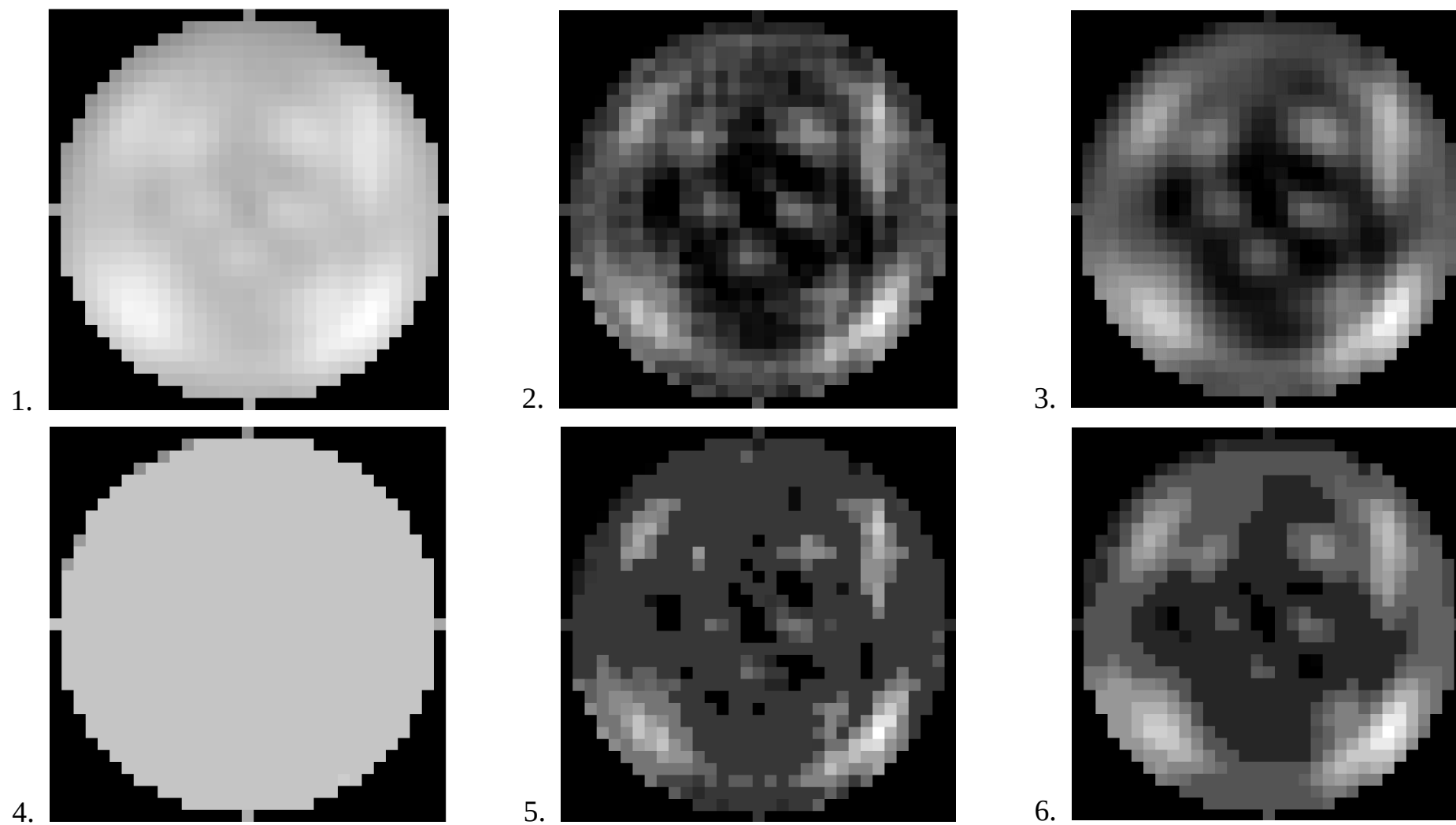
Применение фильтров синограммы. Применение DBSCAN

Таблица 7 демонстрирует восстановленные изображения с применением различных способов фильтрации. В первой колонке находятся изображения без применения фильтров к синограмме, во второй применен фильтр Ram-Lak, в третьей – фильтр Hann. Вторая строка таблицы содержит изображения после прохождения через алгоритм DBSCAN.

Как можно наблюдать, да такого набора данных DBSCAN оказался бесполезен для случая без фильтров (№4). Из-за большого количества шумов и слабого различия между сигналами, он просто не смог отфильтровать изображение и все пиксели объединил в один кластер.

Но при применении к остальным изображениям DBSCAN показал улучшенную локализацию источников, как для фильтра Ram-Lak (№5), так и для Hann (№6).

Таблица 7. Сравнение восстановления изображения с фильтрами и последующее применение DBSCAN



3. Реальные данные с установки

Синограмма

Синограмма на реальных данных дает большое количество шумов (темно-синие пятна), что было вполне ожидаемо с учетом расчета доли позитронов, вылетающих из оболочки источника (см. стр. 10). Такое количество шумов может быть также вызвано формой и расположением детекторов, координатным и временным разрешением детектора при регистрировании. Дополнительно можно отметить, что энергетическое разрешение детектора не нулевое, а значит часть событий составляют Комптон-эффект. Также, у титана-44 есть высокоэнергичная линия, а значит пик 511 кэВ в любом случае включает комптоновские события, что тоже дает дополнительные шумы.

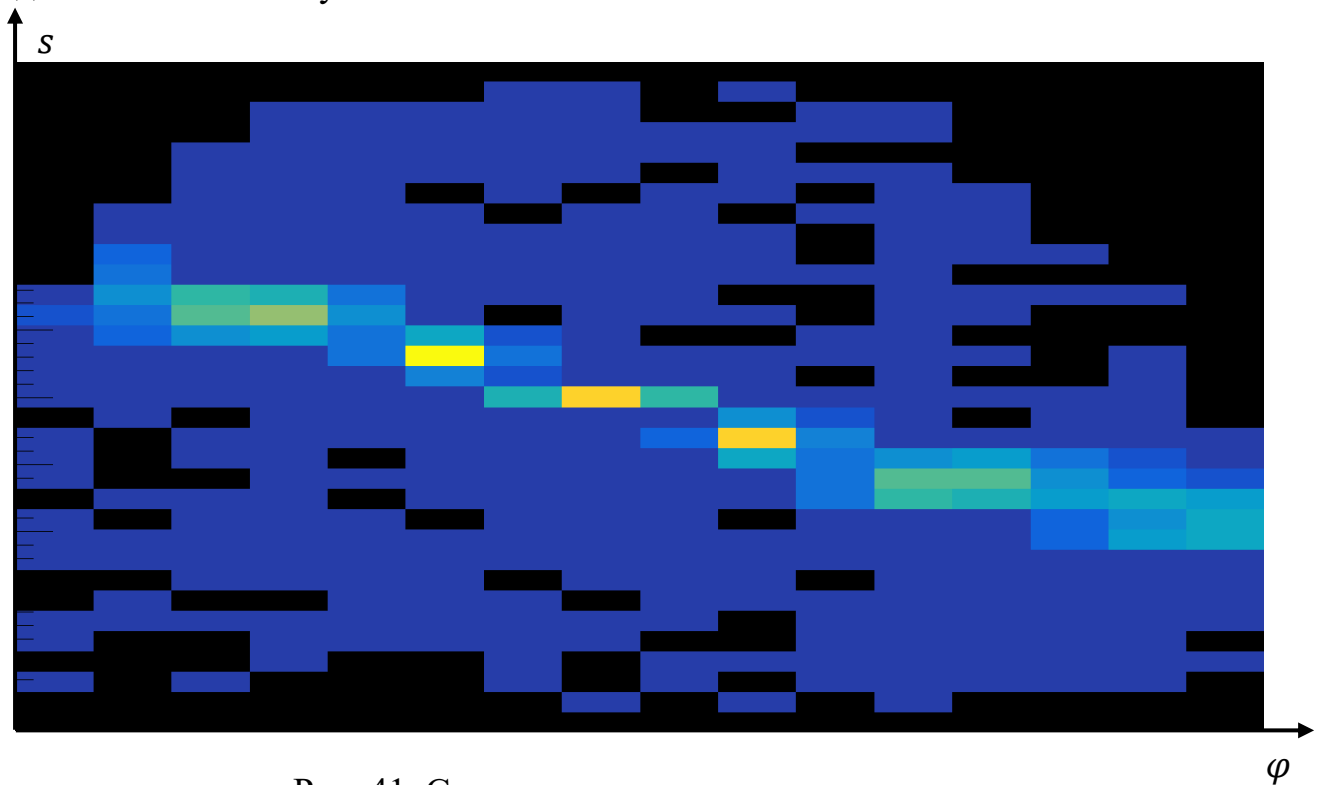


Рис. 41. Синограмма для реальных данных.

Но несмотря на достаточное количество шумов, достаточно легко прослеживается как форма, так и локализация источника, что можно увидеть уже дальше на восстановленном изображении.

Восстановленное изображение

Как говорилось ранее, итоговое изображение получилось сильно зашумленным, но при этом можно определить достаточно четко «вершину», своеобразный центр, источника, с точностью до пикселя (то есть, в 3 мм) (рис. 42). Координаты в пикселях получаются: (12; 14).

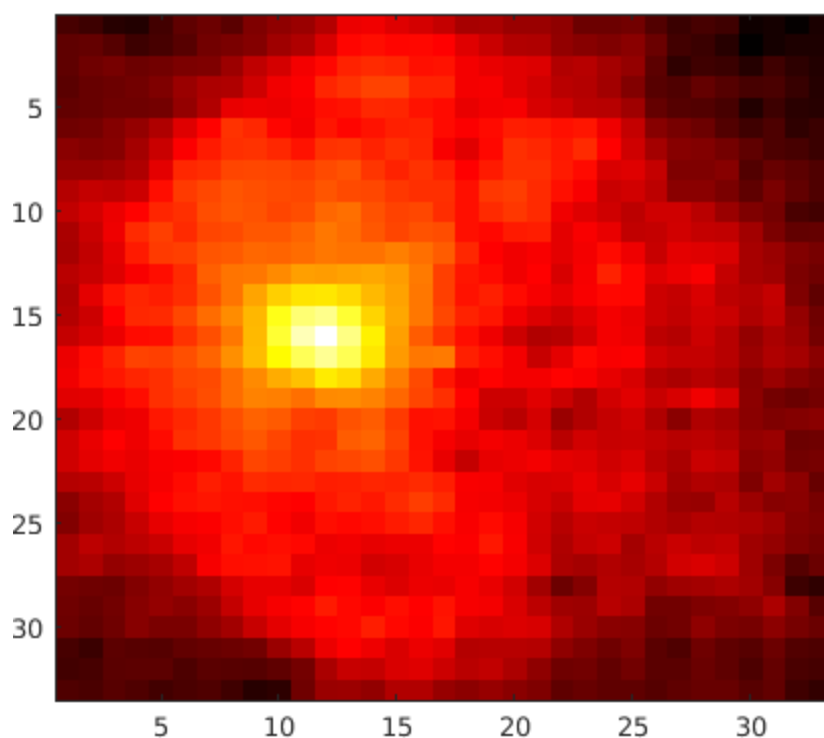


Рис. 42. Восстановленное изображение, реальные данные.

Применение фильтров синограммы

Как и в случае с моделированным точечным источником, на реальных данных можно произвести математические расчеты отношений сигнал/шум, ПШПВ_x, ПШПВ_y (см. стр. 54).

На этот раз выделяются фильтры Shepp-Logan и Hann (рис. 43). Из-за сильной зашумленности, все же сложно проводить такие оценки, но при прочих равных, эти фильтры показывают себя наилучшим образом.

Применение DBSCAN

Результаты применения фильтра представлены на рисунках 44 – 46. На реальных данных алгоритм фильтрации изображения с помощью DBSCAN показал себя наилучшим образом.

Помимо улучшенной локализации источника во всех 3х случаях, улучшена и скорректирована форма, которая с хорошей точностью приближается к истинному значению. Радиус на полученных изображениях равен $\sim 4,5$ мм (оценка по максимально ярким пикселям), радиус источника ^{44}Ti – 2.6 мм.

Обработка и восстановление изображения показали, что фильтр, созданный на основе алгоритма DBSCAN, демонстрирует достаточно высокую эффективность.

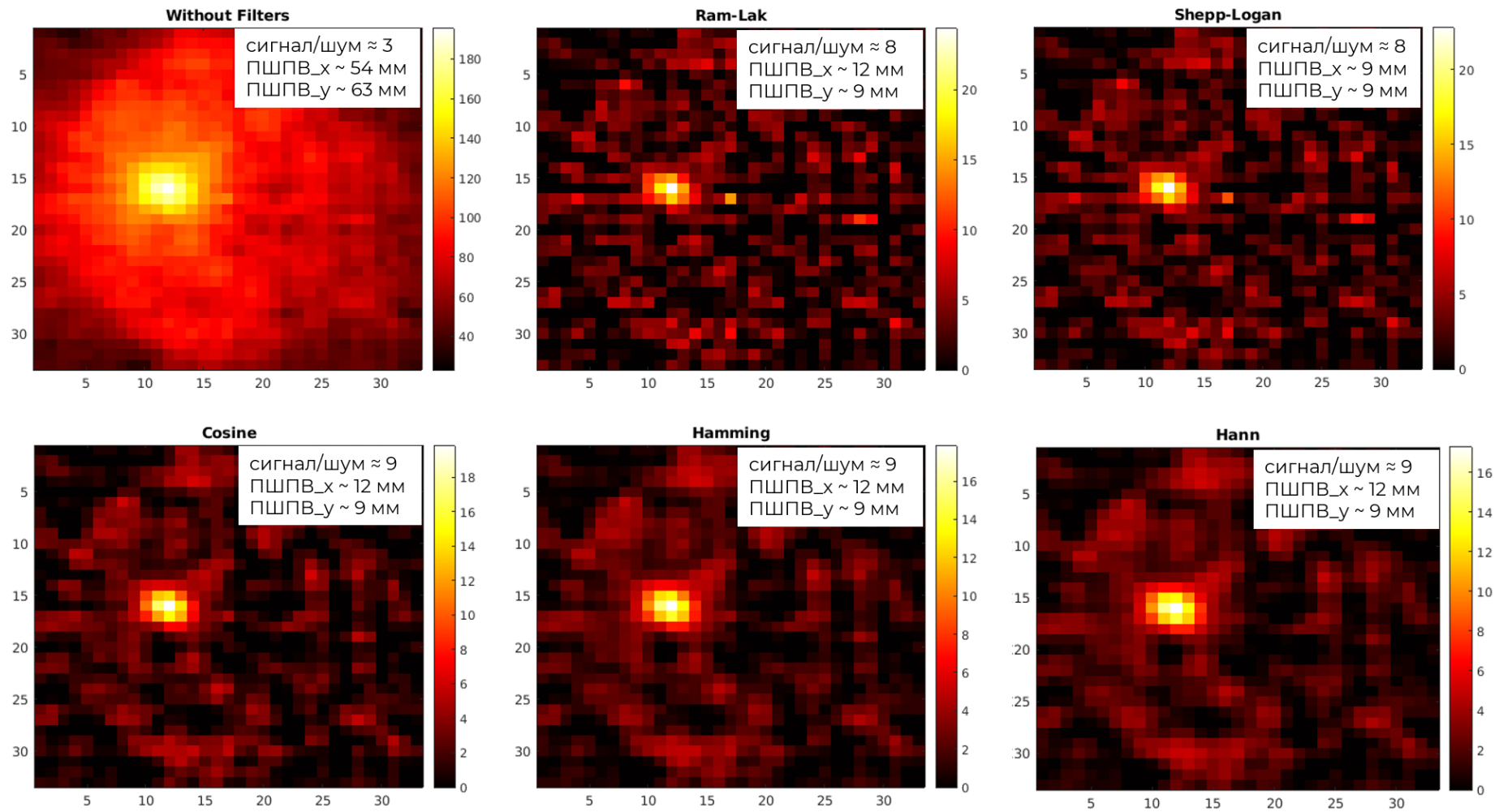


Рис. 43. Сравнение фильтров синограммы для реальных данных.

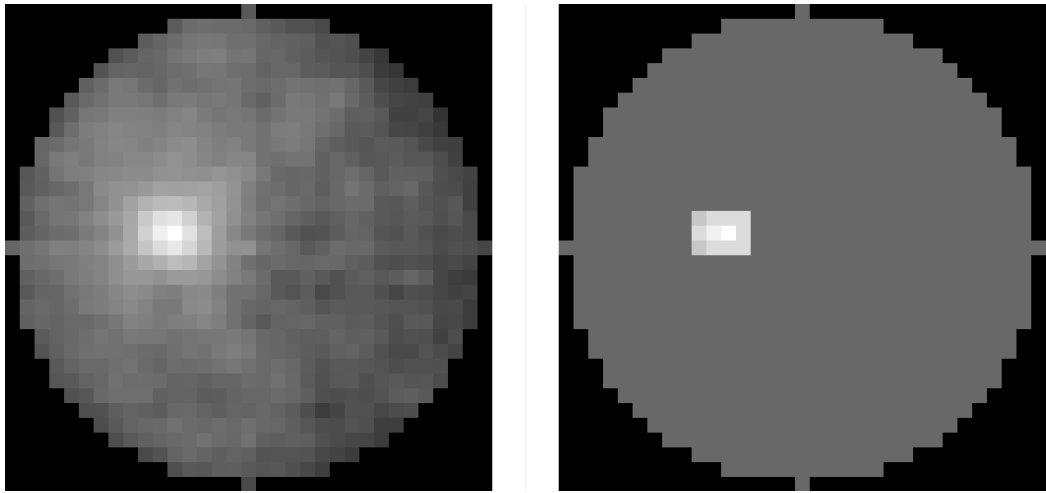


Рис. 44. Реальные данные. Восстановленное изображение без фильтров синограммы (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

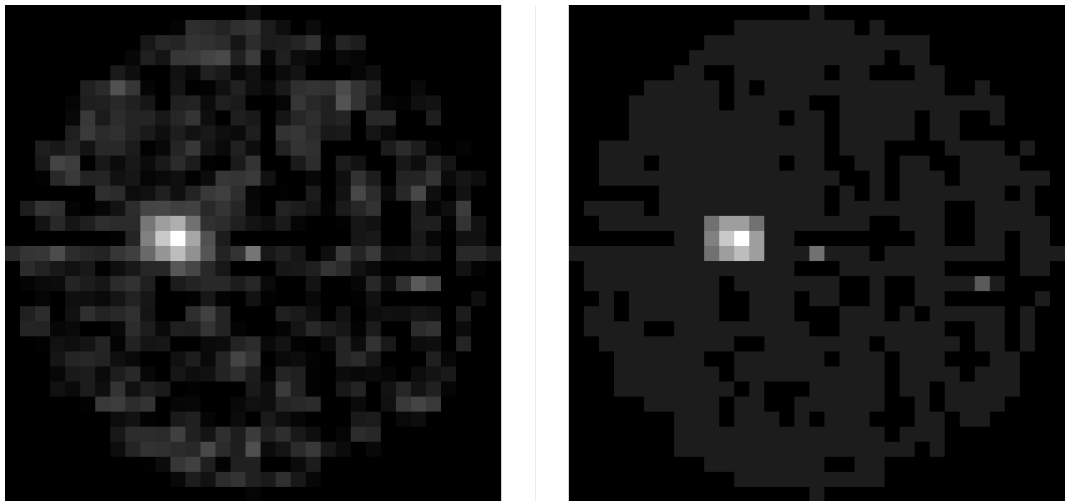


Рис. 45. Реальные данные. Восстановленное изображение, фильтр Shepp-Logan (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

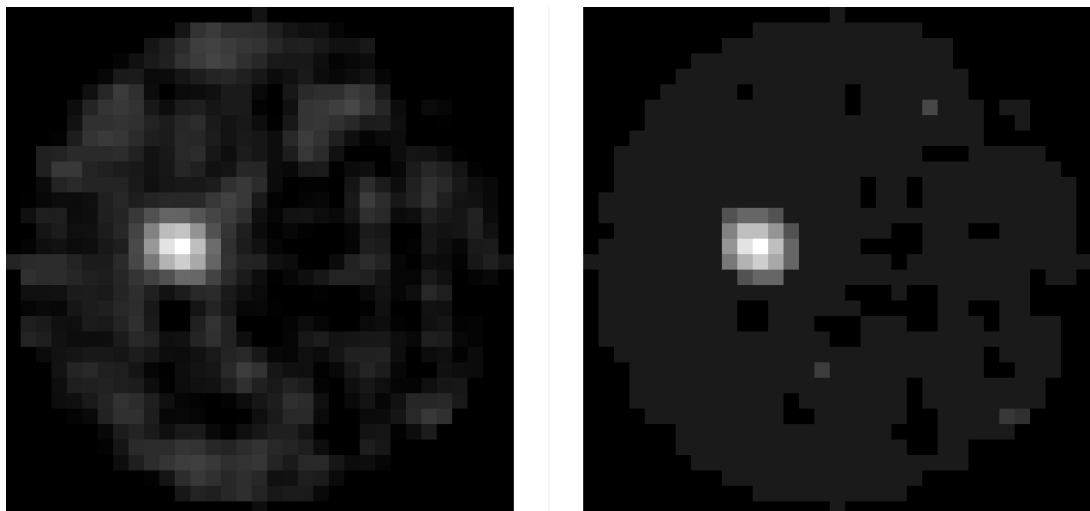


Рис. 46. Реальные данные. Восстановленное изображение, фильтр Hann (слева) и оно же после применения DBSCAN (справа).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были достигнуты следующие результаты:

1. Разработан алгоритм реконструкции изображений на основе преобразования Радона, адаптированный для 32-канального мини-ПЭТ. Алгоритм успешно протестирован на модельных данных, включая точечные и распределённые источники.
2. Проведено сравнение различных фильтров синограммы (Ram-Lak, Shepp-Logan, Hann и др.). Наилучшие результаты для модельных данных показал фильтр Hann, обеспечивающий баланс между подавлением шумов и сохранением деталей изображения. Полученные значения для сравнения:

Для моделированного точечного источника:

- Без фильтрации: сигнал/шум ≈ 14 , ПШПВ_x ~ 9 мм, ПШПВ_y ~ 18 мм
- Фильтр Hann: сигнал/шум ≈ 23 , ПШПВ_x ~ 9 мм, ПШПВ_y ~ 12 мм

Для реальных данных:

- Без фильтрации: сигнал/шум ≈ 3 , ПШПВ_x ~ 54 мм, ПШПВ_y ~ 63 мм
- Фильтр Hann: сигнал/шум ≈ 9 , ПШПВ_x ~ 12 мм, ПШПВ_y ~ 9 мм
- Фильтр Shepp-Logan: сигнал/шум ≈ 8 , ПШПВ_x ~ 9 мм, ПШПВ_y ~ 9 мм

3. Реализован алгоритм кластеризации DBSCAN для фильтрации шумов на восстановленных изображениях. Показано, что DBSCAN эффективно улучшает локализацию источников и снижает уровень шумов, особенно при использовании совместно с фильтрами синограммы (см. Глава 5).
4. Применение разработанных методов к реальным данным подтвердило их эффективность. Удалось достичь точности локализации источника в пределах 3 мм, что соответствует разрешающей способности детектора. Радиус источника на полученных изображениях равен $\sim 4,5 \pm 3$ мм, радиус источника ^{44}Ti – 2.6 мм.

Основные выводы:

- Количество проекций (детекторов) существенно влияет на качество реконструкции. Увеличение числа проекций улучшает чёткость

изображения.

- Фильтрация синограммы и итогового изображения позволяет значительно снизить уровень шумов и улучшить визуализацию источников.
- Алгоритм DBSCAN демонстрирует высокую эффективность для постобработки томографических изображений, особенно в условиях сильной зашумлённости.

Проведённая работа вносит вклад в развитие методов обработки данных для малодетекторных ПЭТ-систем и может быть полезна для дальнейших исследований в области медицинской и научной визуализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Схематичное изображение аннигиляции e^-e^+ -пары с примером локализации в теле внутри ПЭТ.
URL:: https://www.frontiersin.org/files/Articles/57309/fonc-03-00208-HTML/image_m/fonc-03-00208-g001.jpg.
2. L. Katz, A. S. Penfold. Range-Energy Relations for Electrons and the Determination of Beta-Ray End-Point Energies by Absorption. Rev. Mod. Phys. 24, 28 – Publ. 1 Jan., 1952
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.24.28>
3. NIST ESTAR
URL:: <https://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>
4. Под ред. Д. Арсвольда, М. Верника. Эмиссионная томография: основы ПЭТ и ОФЭКТ: Москва: Техносфера, 2009. – 600с., 12с. цв. вклейки.
ISBN 978-5-94836-226-7
5. Принципиальная схема работы ПЭТ.
URL:: https://static.tildacdn.com/tild6630-3033-4439-b535-386363626538/__.jpeg.
6. Снимок мозга, пораженного депрессией.
URL:: <https://sun1-94.userapi.com/s/v1/ig2/>.
7. Изображение. Совмещение ПЭТ/КТ
URL:: <https://nrcerm.ru/files/ядерный/b3wcdm0l.jpg>.
8. Пример реального ПЭТ/КТ
URL:: <https://image1.slideserve.com/1649702/pet-ct-system-l.jpg>.
9. П. Г. Доля. Введение в математические методы компьютерной томографии.
URL:: http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20150715155132_e76e359e30e3b.pdf.
10. В. Г. Кон. О томографии для студентов.
URL:: <https://kohnvict.narod.ru/pdf/1/26-l7c-tomography.pdf>.
11. Ramachandran, G. N., Lakshminarayanan, A. V. (1971). Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of convolutions instead of Fourier transforms. PNAS, 68(9), 2236-2240.
DOI: 10.1073/pnas.68.9.2236.
12. Kak, Slaney (2001). Principles of Computerized Tomographic Imaging.
ISBN 0-87942-198-3

13. Shepp, L. A., Logan, B. F. (1974). The Fourier reconstruction of a head section. IEEE Transactions on Nuclear Science, 21(3), 21-43.
DOI: 10.1109/TNS.1974.6499235
14. Zeng, G. L. (2021). Medical Image Reconstruction.
15. Словарь терминов
URL:: <https://arbitraf.ru/slovar/fizika/apodizatsiya-kratko-i-prosto-s-primerami/#:~:text=Аподизация>.
16. Jain, A. K. (1989). Fundamentals of Digital Image Processing. Prentice-Hall.
17. Hamming, R. W. (1998). Digital Filters. Dover Publications.
18. Harris, F. J. (1978). On the use of windows... Proc. IEEE, 66(1), 51-83.
DOI: 10.1109/PROC.1978.10837
19. Hsieh (2015). Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts. SPIE Press.
20. EANM Physics Committee (2020). *"Guidelines for PET/CT imaging, Part 1: Image reconstruction"*.
URL:: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00259-020-04771-5>.
21. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. (1999). Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall.
22. G. C. Ngo, E. Q. B. Macabebe, "Image Segmentation Using K-Means Color Quantization and Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN) for Hotspot Detection in Photovoltaic Modules," in *2016 IEEE Region 10 Conference (TENCON)*, 2016, pp. 1614-1618.
DOI: 10.1109/TENCON.2016.7848344.
23. Изображение. Сравнение DBSCAN и k-means
URL:: <https://repository-images.githubusercontent.com/238933176/c309cd00-4e49-11ea-95ae-ef7bff37de51>
24. Хабр, «Интересные алгоритмы кластеризации, часть вторая: DBSCAN»
URL:: <https://habr.com/ru/articles/322034/>.
25. Genevieve C. Ngo, Erees Queen B. Macabebe. (2016). Image Segmentation Using K-Means Color Quantization and Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN) for Hotspot Detection in Photovoltaic Modules.
26. Prof. Samir Kumar Bandyopadhyay, Tuhin Utsab Paul. Segmentation of Brain Tumour from MRI image – Analysis of Kmeans and DBSCAN Clustering. IJRES. 2013. PP.48-57

27. Беляев В.Н., Климанов В.А. ФИЗИКА ЯДЕРНОЙ МЕДИЦИНЫ. Часть 2. Позитронно-эмиссионные сканеры, реконструкция изображений в позитронно-эмиссионной томографии, комбинированные системы ПЭТ/КТ и ОФЭКТ/ПЭТ, кинетика радиофармпрепаратов, радионуклидная терапия, внутренняя дозиметрия, радиационная безопасность. Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. 248 с.
28. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 488 с., ил.
29. Elissa L. Kramer Jane P. Ko Fabio Ponzo Karen Mourtzikos. Positron emission tomography-computed tomography : a disease-oriented approach. 2008 by Informa Healthcare USA, Inc.
30. Г.Г. Шимчук, С.Г. Кутузов, А.Ю. Сычев, М.Ш. Тилипман, П.А. Полозов, Г.А. Авалишвили, И.А. Полонский-Буслаев, Гр.Г. Шимчук. Тенденции развития детекторных систем и моделей ПЭТ-сканеров. 2021 №2, жур. «Медицинская физика».
31. П. А. М. Дирак, Релятивистское волновое уравнение электрона, УФН, 1979, том 128, номер 4, 681–691
32. А.В. Петрякова, Л.А. Чипига, А.А. Иванова, М.С. Тлостанова, А.А. Станжевский, Г.М. Митусова. Сравнение методов оценки качества ПЭТ-изображений. 2020 №4, жур. «Медицинская физика».

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Распределение Ферми-Коши для β^+ -распада ^{44}Ti .

Это теоретическая модель, описывающая спектр энергий β -частиц при β -распаде. Формула учитывает:

- Кинематику слабого взаимодействия,
- Кулоновское взаимодействие между вылетающей частицей и ядром,
- Фазовый объём доступных состояний.

Формула распределения для позитронов:

$$N(E) = C \cdot p^2(E + m_e c^2)(E_0 - E)^2 \cdot F(Z, E)$$

где:

- E — кинетическая энергия позитрона,
- E_0 — максимальная энергия спектра,
- p — импульс позитрона,
- $F(Z, E)$ — функция Ферми (поправка на кулоновское взаимодействие),
- C — нормировочная константа.

Преобразование Кюри нужно, чтобы линейно отобразить спектр:

$$K(E) = \sqrt{\frac{N(E)}{p^2(E + m_e c^2)F(Z, E)}} \propto (E_0 - E)$$

где $K(E)$ — преобразованный спектр (должен быть прямой линией для разрешенных переходов). Отклонения от линейности указывают на запрещенные переходы.

Таблица 8. Код для построения графиков на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры для  $^{44}\text{Ti}$ 
E0 = 1.47 # Максимальная энергия (МэВ)
m_e = 0.511 # Масса электрона/позитрона (МэВ/с2)

# Функция Ферми (упрощённая кулоновская поправка для Z=22)
def fermi_correction(E):
    Z = 22 # Атомный номер Ti
```

```

eta = Z * (1 + E/m_e) / np.sqrt(E**2 + 2*E*m_e)
return 2*np.pi*eta / (1 - np.exp(-2*np.pi*eta))

# Спектр позитронов (распределение Ферми)
def beta_spectrum(E):
    p = np.sqrt(E**2 + 2*E*m_e) # Импульс
    return p**2 * (E + m_e) * (E0 - E)**2 * fermi_correction(E)

# Диапазон энергий
E = np.linspace(0.01, E0-0.01, 200)
N = beta_spectrum(E)

# Нормировка
N /= np.max(N)

# Построение графика
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(E, N, 'r-', linewidth=2)
plt.xlabel('Энергия позитрона (МэВ)', fontsize=12)
plt.ylabel('Относительная интенсивность', fontsize=12)
plt.title('Спектр позитронов при  $\beta^+$ -распаде  $^{44}\text{Ti}$ ', fontsize=14)
plt.grid(True)
plt.show()

# Преобразование Кюри
K = np.sqrt(N / ( (E**2 + 2*E*m_e) * (E + m_e) *
fermi_correction(E)))

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(E, K, 'b-', linewidth=2)
plt.xlabel('Энергия позитрона (МэВ)', fontsize=12)
plt.ylabel('K(E)', fontsize=12)
#plt.title('Преобразование Ферми-Кюри для  $^{44}\text{Ti}$ ', fontsize=14)
plt.grid(True)
plt.show()

```

На рисунках Рис. 47 и Рис. 48 изображены графики для ^{44}Ti , получившиеся в результате работы этого кода.

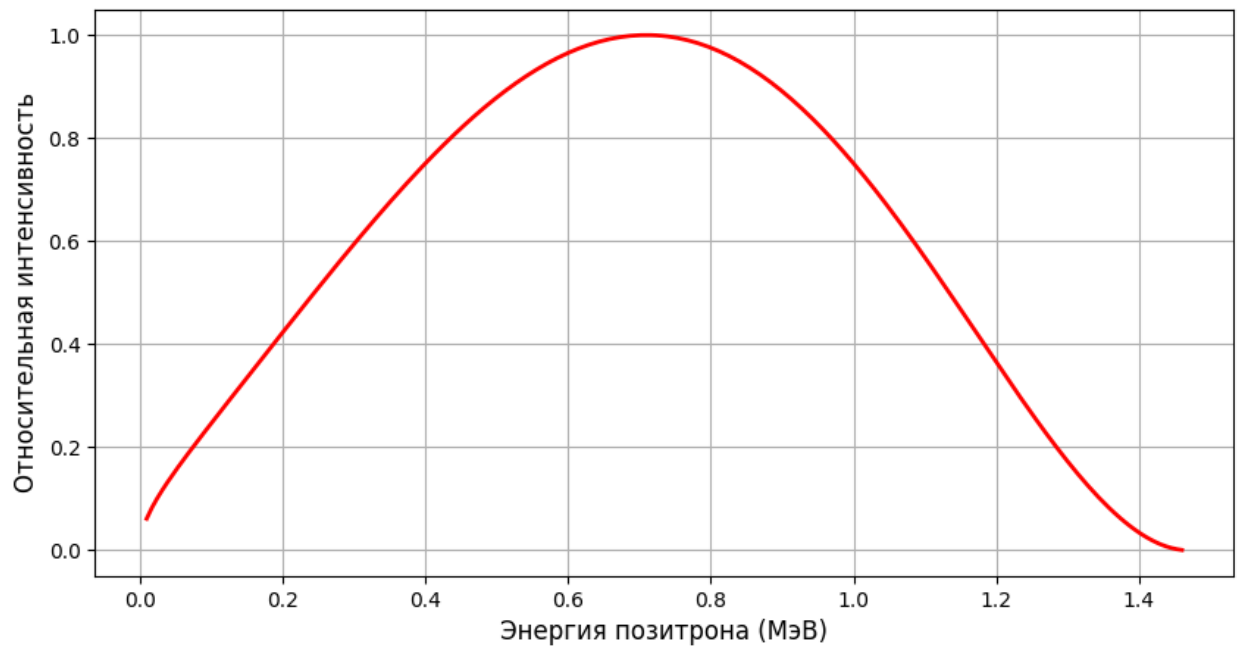


Рис. 47. Спектр позитронов при β^+ -распаде ^{44}Ti .

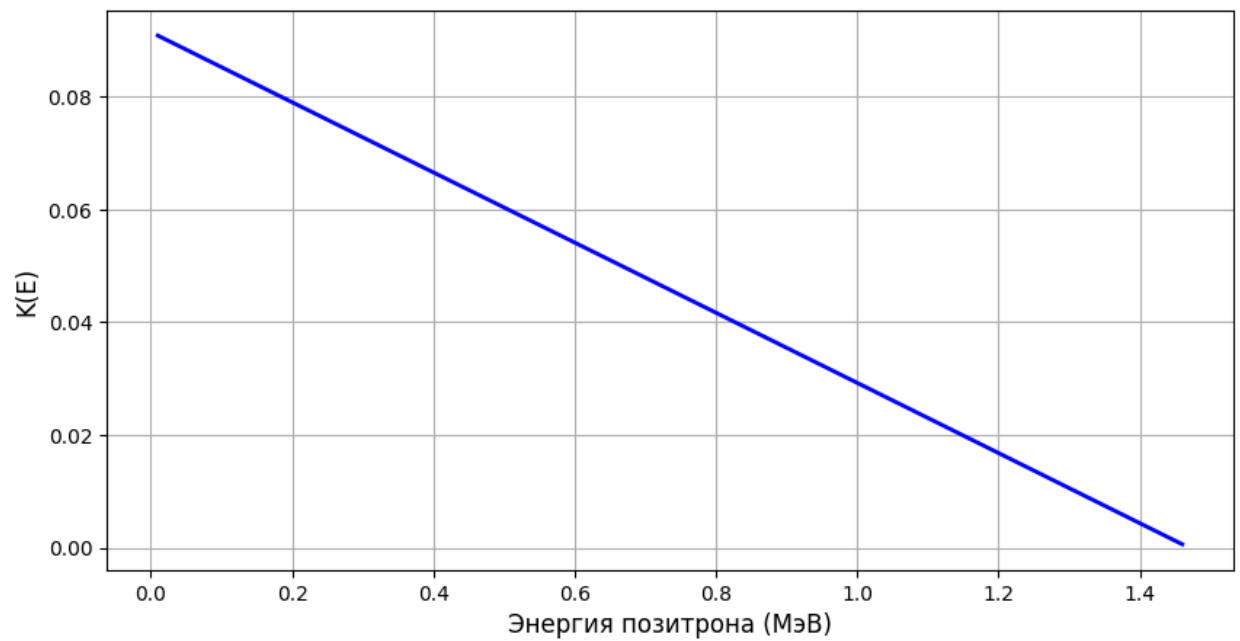
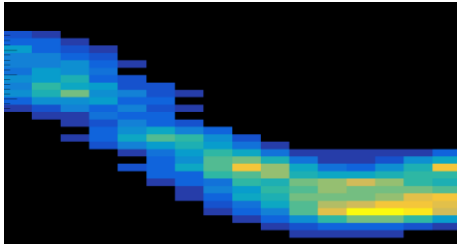


Рис. 48. Преобразование Ферми-Кюри для ^{44}Ti .

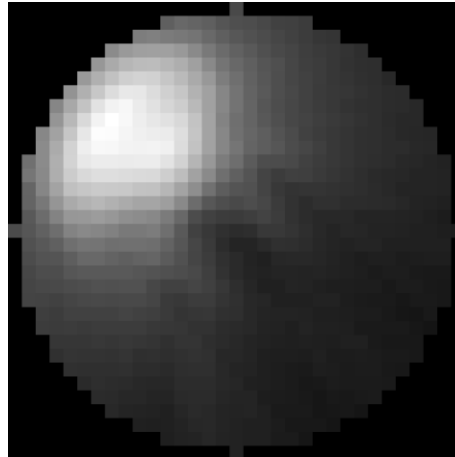
2. Восстановленные изображения отдельно взятых групп круговых источников.

Для трех источников $r=1\text{мм}$

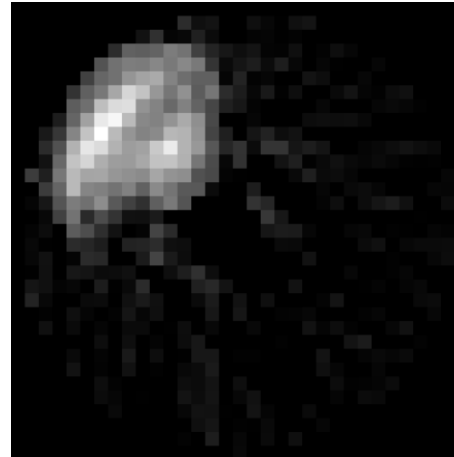
Синограмма



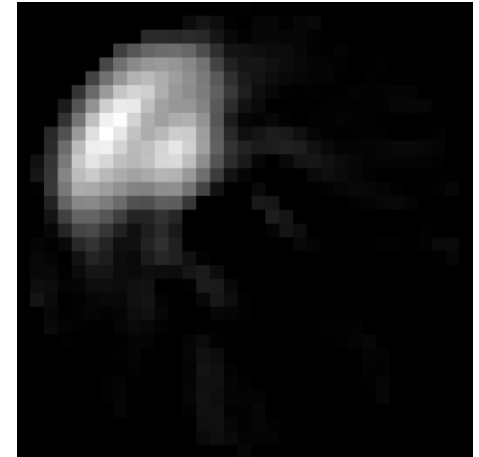
Восстан. изобр без фильтров



Восстан. изобр. Ram-Lak

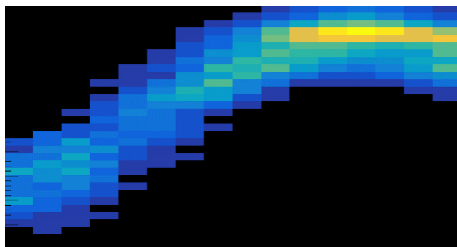


Восстан. изобр. Hann

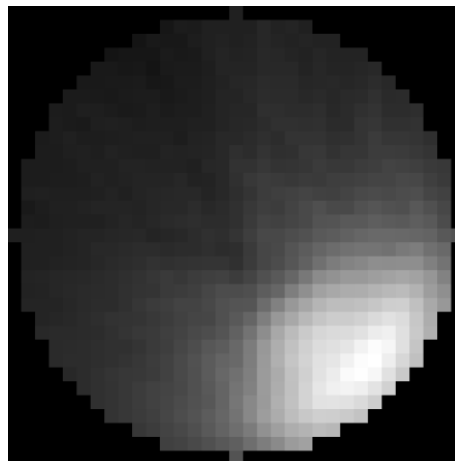


Для трех источников $r=2\text{мм}$

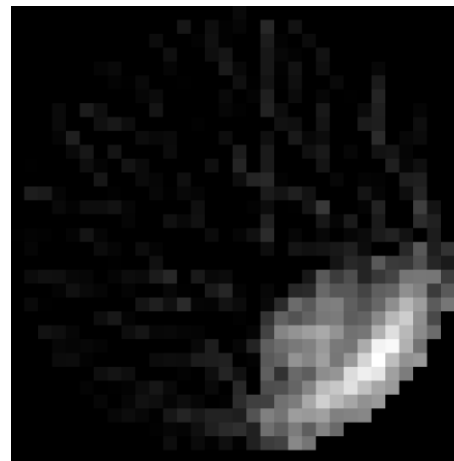
Синограмма



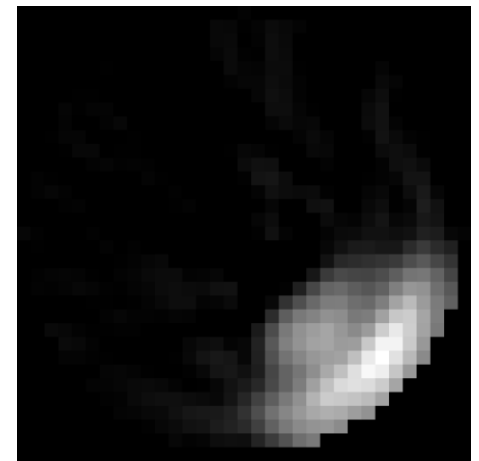
Восстан. изобр без фильтров



Восстан. изобр. Ram-Lak

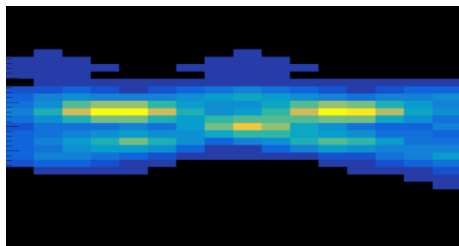


Восстан. изобр. Hann

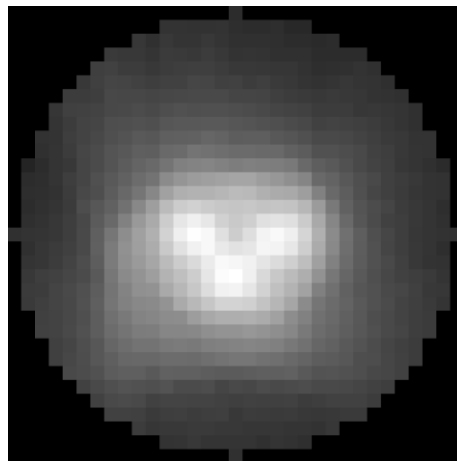


Для трех источников $r=4\text{мм}$

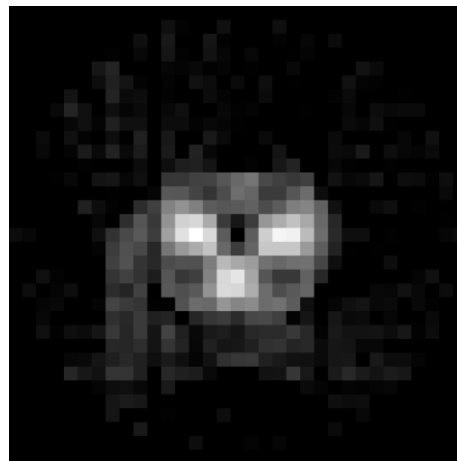
Синограмма



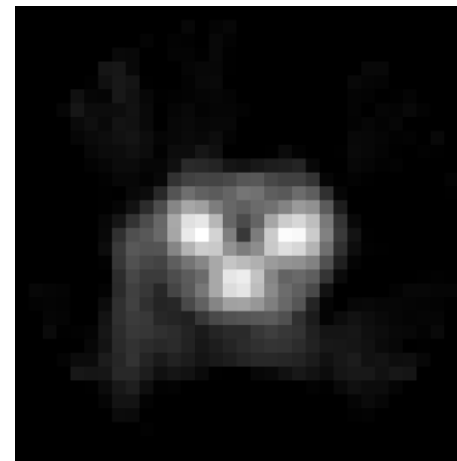
Восстан. изобр без фильтров



Восстан. изобр. Ram-Lak

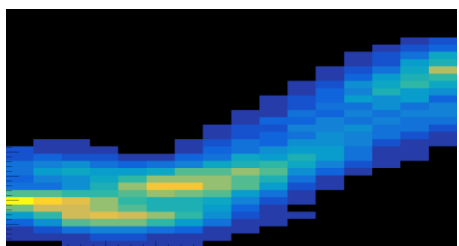


Восстан. изобр. Hann

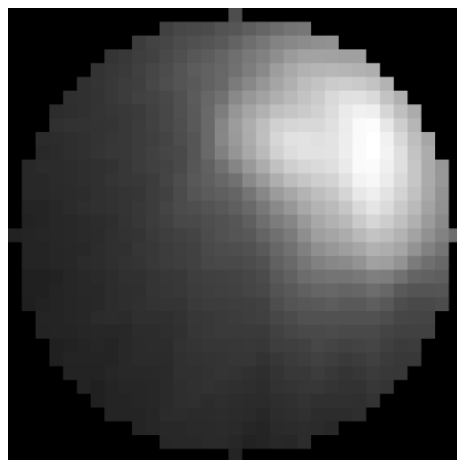


Для трех источников $r=5\text{мм}$

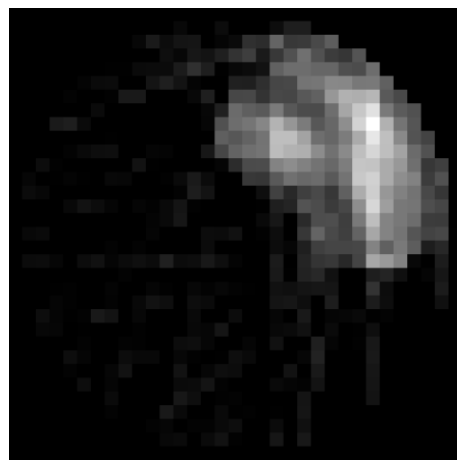
Синограмма



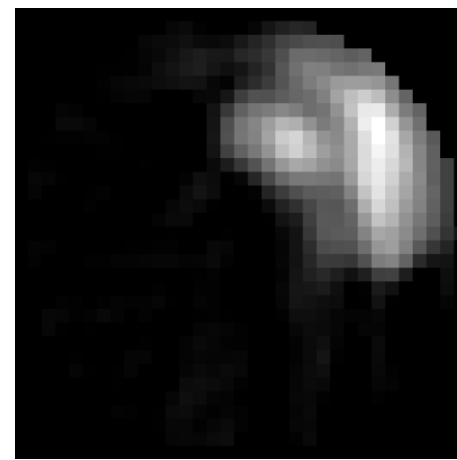
Восстан. изобр без фильтров



Восстан. изобр. Ram-Lak



Восстан. изобр. Hann



3. Код для фильтра DBSCAN.

```
import cv2
import numpy as np
from sklearn.cluster import DBSCAN
from sklearn.neighbors import NearestNeighbors
from kneed import KneeLocator
from scipy.spatial.distance import pdist
import matplotlib.pyplot as plt

# Загружает изображение в градациях серого
def load_image_as_gray(image_path):
    image = cv2.imread(image_path)
    if image is None:
        raise ValueError("Не удалось загрузить изображение")
    return cv2.cvtColor(image, cv2.COLOR_BGR2GRAY) if len(image.shape)
== 3 else image

# Автоматически определяет размер выборки для оценки плотности
def estimate_sample_size(X):
    n_points = len(X)
    return min(1000, max(300, int(5 * np.log(n_points)**2)))

# Вычисляет среднее расстояние между точками с обработкой особых
случаев
def calculate_mean_distance(X):
    sample_size = estimate_sample_size(X)
    sample = X[np.random.choice(len(X), min(sample_size, len(X)),
replace=False)]
    distances = pdist(sample, 'euclidean')

    if len(distances) == 0 or np.allclose(distances, 0):
        return 0.0 # Все точки совпадают

    return np.mean(distances)

# Глобальная переменная для отслеживания вызовов
eps_plot_counter = 0

# Автоматически определяет оптимальное количество соседей
def find_optimal_k_neighbors(X):
    n_points = len(X)
    mean_dist = calculate_mean_distance(X)

    # Базовое значение на основе логарифма от количества точек
    k_neighbors = max(5, min(int(2 * np.log2(n_points)), 50))

    # Корректировка на основе плотности данных
    if mean_dist > 15: # Для разреженных данных
```

```

        k_neighbors = max(k_neighbors // 2, 5)
    elif mean_dist < 5: # Для плотных данных
        k_neighbors = min(k_neighbors * 2, 50)

    return k_neighbors

# Находит оптимальное значение eps с обработкой особых случаев
def find_optimal_eps(X, min_samples=None, plot_all=False):
    global eps_plot_counter

    # k_neighbors = min_samples if min_samples is not None else 1
    k_neighbors = find_optimal_k_neighbors(X)
    neigh = NearestNeighbors(n_neighbors=k_neighbors)
    distances = np.sort(neigh.fit(X).kneighbors(X)[0][:, -1])

    # Обработка случая, когда все расстояния одинаковые
    if np.allclose(distances, distances[0]):
        optimal_eps = distances[0] * 1.1 # Добавляем 10% к базовому
расстоянию
        print(f"Все расстояния одинаковые, используем eps =
{optimal_eps:.2f}")
    else:
        try:
            kneedle = KneeLocator(range(len(distances)), distances,
                                S=1.0, curve='convex',
direction='increasing')
            optimal_eps = distances[kneedle.elbow] if kneedle.elbow
else np.percentile(distances, 80)
        except ValueError:
            optimal_eps = np.percentile(distances, 80)

    # Показываем график только для первого вызова или при явном
указании
    if plot_all or eps_plot_counter == 0:
        plt.figure(figsize=(10, 5))
        plt.plot(distances, label=f'{k_neighbors}-NN distance')
        plt.axhline(y=optimal_eps, color='r', linestyle='--',
label=f'Selected eps: {optimal_eps:.2f}')
        if 'kneedle' in locals() and kneedle.elbow:
            plt.axvline(x=kneedle.elbow, color='g', linestyle=':',
label='Elbow point')
        plt.legend()
        plt.title(f'Automatic eps selection (step
{eps_plot_counter})')
        plt.show()

    eps_plot_counter += 1
    return optimal_eps # При неудовлетворительном автоматическом
подборе параметров, можно прописать свое значение

```

```

# Улучшенная метрика качества с учетом маленьких кластеров
def clustering_quality_score(labels):
    unique_labels = set(labels)
    n_clusters = len(unique_labels) - (1 if -1 in labels else 0)
    noise_ratio = np.sum(labels == -1) / len(labels)

    if n_clusters == 0:
        return -np.inf

    # Средний размер кластера (без учета шума)
    cluster_sizes = [np.sum(labels == label) for label in
unique_labels if label != -1]
    size_balance = np.mean(cluster_sizes) / max(cluster_sizes)

    return (n_clusters * size_balance) / (1 + noise_ratio)**2

# Автоматически подбирает оптимальное min_samples
def find_optimal_min_samples(X):
    n_points, n_features = X.shape
    mean_dist = calculate_mean_distance(X)

    # Автоматическое определение диапазона
    min_min = max(1, int(0.5 * n_features + np.log(n_points)))
    max_min = min(100, int(2 * n_features + np.sqrt(n_points)))

    # Корректировка диапазона на основе плотности
    if mean_dist > 15:
        min_min, max_min = max(min_min//2, 3), max_min//2
    elif mean_dist < 5:
        min_min, max_min = min_min*2, min(max_min*2, 150)

    # Поиск лучшего значения
    best_score, best_min = -1, min_min
    step = max(1, (max_min - min_min) // 10)

    for min_samples in range(min_min, max_min + 1, step):
        eps = find_optimal_eps(X, min_samples)
        labels = DBSCAN(eps=eps,
min_samples=min_samples).fit_predict(X)
        score = clustering_quality_score(labels)

        if score > best_score:
            best_score, best_min = score, min_samples

    # Точная настройка
    refine_range = range(max(min_min, best_min-step), min(max_min,
best_min+step)+1)
    for min_samples in refine_range:

```



```

        eps = find_optimal_eps(X, min_samples)
        labels = DBSCAN(eps=eps,
min_samples=min_samples).fit_predict(X)
        score = clustering_quality_score(labels)

        if score > best_score:
            best_score, best_min = score, min_samples

    return best_min # При неудовлетворительном автоматическом подборе
параметров, можно прописать свое значение

# Создаёт отфильтрованное изображение по меткам кластеров
def create_filtered_image(shape, X, labels):
    filtered = np.zeros(shape)
    for label in np.unique(labels):
        if label != -1:
            cluster_mask = (labels == label)
            coords = X[cluster_mask, :2].astype(int)
            filtered[coords[:, 0], coords[:, 1]] =
np.mean(X[cluster_mask, 2])
    return filtered

# Визуализирует исходное и обработанное изображения
def show_results(original, filtered, eps, min_samples):
    plt.figure(figsize=(15, 7))

    plt.subplot(1, 2, 1)
    plt.imshow(original, cmap='gray')
    plt.title('Исходное изображение')

    plt.subplot(1, 2, 2)
    plt.imshow(filtered, cmap='gray')
    plt.title(f'DBSCAN фильтрация\neps={eps:.2f},
min_samples={min_samples}')

    plt.tight_layout()
    plt.show()

# ОСНОВНАЯ ФУНКЦИЯ: загрузка, обработка и сохранение результата
def apply_dbscan(image_path, output_path=None):
    # Загрузка и подготовка данных
    image = load_image_as_gray(image_path)
    pixels = np.column_stack(np.where(image > 0))
    intensities = image[image > 0]
    X = np.column_stack((pixels, intensities))

    # Автоматический подбор параметров
    print("Подбор оптимальных параметров DBSCAN...")
    min_samples = find_optimal_min_samples(X)

```

```

eps = round(find_optimal_eps(X, min_samples))
print(f"Найдены параметры: eps={eps}, min_samples={min_samples}")

# Кластеризация и создание изображения
labels = DBSCAN(eps=eps, min_samples=min_samples).fit_predict(X)
filtered_image = create_filtered_image(image.shape, X, labels)

output_path = f'{min_samples}_{eps} output_path.png'

# Сохранение и визуализация
if output_path:
    cv2.imwrite(output_path, filtered_image)

show_results(image, filtered_image, eps, min_samples)
return filtered_image, eps, min_samples

# Исполняемая строка
if __name__ == "__main__":
    input_path = '/ input_path '
    output_path = 'output_path'

    filtered_img, eps, min_samples = apply_dbscan(input_path,
output_path)

```