

**Отчет о «Научно-исследовательской деятельности
аспиранта и подготовке к защите диссертации на
соискание ученой степени кандидата наук» за
четвертый семестр**

**«Исследование формирования структур
взаимодействующей скрытой массой»**

Аспирант	Калашников Д. С.
Научная специальность	1.3.15 Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий
Научный руководитель	Белоцкий К. М.
Должность, степень, звание	Профессор, д.ф.-м.н.

Дата защиты:

Результат защиты:

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Введение	4
2	Основные сведения	6
2.1	Самовзаимодействующая скрытая масса	6
2.2	Ограничения на параметры самовзаимодействующей скрытой массы	8
2.3	Рекомбинация скрытой массы в космологии	10
2.3.1	Рекомбинация в физике плазмы	11
2.3.2	Рекомбинация Крамерса	11
2.3.3	Трехчастичная рекомбинация	12
2.3.4	Классическая рекомбинация	12
3	Классическая радиационная рекомбинация	14
3.1	Вывод классической формулы дипольных потерь	14
3.2	Классический предел излучения	15
3.2.1	Границы применимости	16
3.3	Сравнение с полуклассическим подходом Крамерса	16
3.4	Роль классической рекомбинации в космологии	16
4	Трехчастичная рекомбинация	17
4.1	Вывод трехчастичной формулы в работе Питаевского	17
4.2	Расчет концентрации	19
4.3	Численное моделирование	21
4.4	Анализ результата	21

4.5	Область применимости трехчастичной рекомбинации . . .	24
5	Формирование структур из самовзаимодействующей тёмной материи	26
5.1	Постановка задачи и мотивация	26
5.2	Почему N-body неизбежно	27
5.2.1	Ограничения аналитических подходов	27
5.2.2	Требования к численному решению	27
5.3	Текущий статус проекта	27
5.3.1	Контейнеризация и воспроизводимость	27
5.4	План работы	28
5.4.1	Этап 1. Валидация SIDM-модуля	28
5.4.2	Этап 2. Тестовые запуски	28
5.4.3	Этап 3. Визуализация и метрики на тестовых данных	28
5.4.4	Этап 4. Модификация кода для учета самовзаимодействия частиц	30
5.4.5	Этап 5. Сопоставление с наблюдениями	30
	Список литературы	31

В данном отчете приведены цели и предварительный список задач. Также в работе приведена часть литературного обзора, посвященная процессу рекомбинации. На данный момент готовится к публикации работа о влиянии формулы трехчастичной рекомбинации на темп формирования связанных (незаряженных) частиц скрытой массы.

1 ВВЕДЕНИЕ

Целью исследования является изучение формирования структур из взаимодействующей скрытой массы. Составление морфологической карты

возможных структур при различных параметрах самовзаимодействия скрытой массы. Рассмотрение различных процессов в различных приближениях для сечения рекомбинации с целью исследования их влияния на динамику образования структур скрытой массы.

Задачи исследования:

- 1) Произвести литературный обзор по связанным с работой темам.
 - (а) Изучить работы, связанные с самовзаимодействующей скрытой массой в космологии
 - (б) Изучить работы по космологии, исследующие рекомбинацию частиц.
 - (в) Изучить работы по физике плазмы, связанные с рекомбинацией.
 - (г) Изучить работы, в которых производится вывод формулы сечения рекомбинации и получены ограничения на их применения.
 - (д) Изучить работы, связанные с формированием структур из обычной барионной материей, и работы, связанные с численными методами моделирования процессов формирования структур.
- 2) Исследовать различные методы описания процесса рекомбинации
 - (а) Исследовать применимость классической формулы для сечения рекомбинации.
 - (б) Исследовать применимости трехчастичного процесса в сечения рекомбинации.
 - (в) Оценить влияние неиспользованных ранее для космологических задач

формул для сечения рекомбинации на тестовой модели самовзаимодействующей скрытой массы.

- i. Определить параметры модели.
- ii. Провести численный расчет прорекомбинировавших частиц в данной модели.
- iii. Определить пределы применимости использованного нами подхода.

3) Исследовать возможности численного моделирования процессов формирования галактик в моделях с самовзаимодействующей тёмной материей

- (а) Развернуть N -body симуляции с использованием пакета GADGET-2 для моделирования гравитационного взаимодействия частиц.
- (б) Внедрить в симуляции составные компоненты: диск и гало, а также сформировать начальные условия для систем с двумя взаимодействующими галактиками.
- (в) Реализовать метод визуализации пространственного распределения плотности и скорости частиц, в том числе с применением пакета yt.
- (г) Построить профиль плотности $\rho(r)$ и профиль скорости $v(r)$ для отдельных компонент (диск, гало) и исследовать их поведение в разных временных срезах.
- (д) Сравнить динамику слияния и структурное развитие в моделях с и без дополнительного взаимодействия тёмной материи.
- (е) Определить характерные наблюдаемые признаки, обусловленные наличием самовзаимодействия тёмной материи, и способы их количественного анализа.

Актуальность исследования обусловлена интересом к моделям самовзаимодействующей скрытой массы в последние годы. Холодная невзаимодействующая скрытая масса имеет ряд расхождений с наблюдениями на масштабе отдельных галактик. Модели самовзаимодействующей скрытой массы решают эти проблемы, но сильно ограничены в использовании данными из наблюдений. Использование других формул для сечения рекомбинации может снизить ограничение на данные модели и позволит более точно описывать динамику образования структур в ранней Вселенной.

2 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 САМОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ СКРЫТАЯ МАССА

В современной стандартной космологической модели Λ CDM Вселенная заполнена барионной материей, темной энергией и холодной невзаимодействующей, несталкивающейся скрытой массой (CDM).

Выводы, получаемые с использованием CDM хорошо согласуются с наблюдениями: она предсказывает реликтовое излучение, объясняет крупномасштабную структуру Вселенной, предсказывает концентрации водорода и гелия во Вселенной. Но существует ряд расхождений между предсказаниями Λ CDM и наблюдениями. В данной работе мы сосредоточим внимание на двух из них, проявляющихся на масштабах отдельных галактик:

- 1) Различие в плотности темной материи в гало [1];

Плотность темной материи в центре галактик должна быть очень высокой, образуя так называемый "касп" (cusp). Однако наблюдения показывают, что плотность темной материи в ядрах галактик скорее имеет плоское или пологое распределение (core).

- 2) Различие в количестве карликовых галактик [2].

Моделирования, основанные на Стандартной космологической модели Λ CDM предсказывает намного большее количество карликовых галактик вокруг крупных галактик, чем наблюдается на практике.

Для объяснения причин расхождения рассматриваются различные расширения Λ CDM модели. Одним из возможным расширением [3] является добавление самовзаимодействующей скрытой массы (Self-Interacting Dark Matter, далее SIDM). Подобное усовершенствование холодной невзаимодействующей темной материи впервые было предложено в

работе [4]. Самовзаимодействие — дополнительное взаимодействие, которым обладают только частицы скрытой массы. Оно может быть введено разными способами: как упругое рассеяние, кулоновское отталкивание или притяжение, взаимодействие Юкавы и другими

Частицы CDM имеют слишком короткую длину свободного пробега в эпоху формирования галактик, и поэтому они образуют слишком плотные и слишком многочисленные структуры по сравнению с наблюдаемыми. Наличие самовзаимодействия приводит к обмену энергией и моментом между частицами скрытой массы, что позволяет компенсировать различие плотностного профиля гало, сделать внутреннюю часть гало более симметричной [5; 6].

SIDM также является одной из гипотез, решающих проблему дефицита карликовых галактик. Путем введения взаимодействия темной материи самой с собой, SIDM может изменить динамику эволюции карликовых галактик, делая их менее устойчивыми и более подверженными разрушению в процессе формирования галактик или взаимодействия с другими галактиками. Множество работ [7–9] показывают, что количество карликовых галактик в космологическом моделировании с SIDM моделях также согласуется с наблюдениями при определенных параметрах на взаимодействия и массы частиц.

На текущий момент происходит обработка и сбор данных поступающих от спутникового телескопа Джеймс Вебб (JWST). На ранних этапах развития Вселенной (при $z > 7$) наблюдаются существенные расхождения в количестве дисковых массивных галактик с предсказаниями Λ CDM модели [10]. За счет самовзаимодействия скрытой массы, такие галактики могут образовываться раньше, чем в предсказаниях Λ CDM. На данный момент активно ведется сбор и анализ данных, поступающих от космического телескопа Джеймса Уэбба (JWST). В ходе этого процесса исследователи обращают внимание на эпоху раннего развития Вселенной, когда красное смещение $z > 7$, и замечают значительные отклонения в количестве дисковых массивных галактик по сравнению с прогнозами модели Λ CDM [10]. Отклонения эти могут быть объяснены с помощью концепции самовзаимодействия темной материи SIDM. Интегрирование SIDM в модели галактического формирования позволяет объяснить появление массивных дисковых галактик на более ранних стадиях эволюции Вселенной, чем это предсказывает стандартная космологическая

модель. Согласно предложенной концепции, взаимодействие тёмной материи могло стимулировать формирование галактических структур ранней Вселенной.

При ограничении силы взаимодействия SIDM не оказывает существенного влияния на крупномасштабную структуру Вселенной, так как гравитационные эффекты по-прежнему являются доминирующими на больших расстояниях. Однако, даже при ослабленной силе взаимодействия, концепция SIDM может значительно улучшить наше понимание формирования галактических структур и решить некоторые из описанных ранее проблем.

2.2 ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ САМОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СКРЫТОЙ МАССЫ

Перед тем как обсудить ограничения параметров SIDM, рассмотрим основные характеристики этой модели:

- 1) Сечение взаимодействия частиц тёмной материи: это ключевой параметр, определяющий силу взаимодействия между частицами тёмной материи.
- 2) Масса частиц тёмной материи: масса играет существенную роль в динамике эволюции галактик и крупномасштабной структуры Вселенной в модели SIDM.

Для оценки и ограничения параметров модели SIDM проводятся различные эксперименты, которые можно классифицировать следующим образом:

а) Ускорительные эксперименты.

На крупнейшем ускорителе частиц Large Hadron Collider (LHC) в ЦЕРНе исследователи проводят серию экспериментов, направленных на поиск новых физических явлений, включая частицы тёмной материи. Один из подходов к поиску частиц SIDM на LHC заключается в изучении возможных процессов рассеяния или аннигиляции тёмной материи, которые могут происходить в детекторах ускорителя. Причем, такие процессы могут проявляться в виде характерных событий,

отличающихся от стандартных моделей физики элементарных частиц.

б) Наземные наблюдения.

Наземные эксперименты предоставляют ценные данные о галактических структурах и их динамике. Один из наиболее известных экспериментов - это DAMA (Dark Matter Experiment with Argon). В рамках DAMA проводится наблюдение за потоком тёмной материи, проходящим через Землю. Эксперимент использует ядерные детекторы, способные регистрировать взаимодействия тёмной материи с ядрами атомов, что позволяет определить характерные особенности спектра и временных зависимостей сигналов, ассоциируемых с частицами тёмной материи.

в) Карликовые галактики.

Карликовые сфероидальные галактики (dSph) являются отличными тестовыми объектами для моделей самовзаимодействующей тёмной материи (SIDM), поскольку их динамика и структура почти полностью определяются тёмной материей при минимальном влиянии барионной компоненты. В моделях SIDM формирование ядерных профилей связано с самовзаимодействиями, перераспределяющими импульс в центральных областях и сглаживающими профиль плотности. Профили плотности восстанавливаются на основе дисперсии скоростей звёзд, что позволяет косвенно исследовать распределение тёмной материи. Сопоставление наблюдаемых профилей с предсказаниями SIDM позволяет наложить ограничения на удельное сечение взаимодействия: $0.1 \text{ см}^2/\text{г} < \sigma/m < 1 \text{ см}^2/\text{г}$. При слишком большом значении σ/m ядро становится чрезмерно большим и противоречит наблюдениям; при слишком малом сохраняется "острый" профиль плотности, что также не соответствует данным [3; 11].

г) Наблюдения столкновений скоплений (например, Bullet Cluster). При столкновении скоплений горячий газ тормозится ударным давлением, в то время как звёзды и тёмная материя проходят друг через друга почти без взаимодействия. Распределение тёмной материи восстанавливается с помощью гравитационного линзирования. При сильном самовзаимодействии тёмной материи её распределение отстает от распределения звёзд, создавая наблюдаемые смещения. Однако наблюдения Bullet Cluster показывают, что такие смещения минимальны, что позволяет установить ограничение $\sigma/m \lesssim$

$0.1 \text{ см}^2/\text{г}$ [12; 13].

д) **Слабое гравитационное линзирование.** Слабое гравитационное линзирование позволяет накладывать ограничения на свойства тёмной материи, включая наличие самовзаимодействий, за счёт изучения искажений изображения фоновых галактик при прохождении их света через гравитационный потенциал массивных структур. Модели SIDM предсказывают, что самовзаимодействия делают гало более сферическими по сравнению с триаксиальной формой в рамках моделей холодной тёмной материи (CDM). Это влияет на статистику ориентации и эллиптичности сигналов линзирования, особенно в скоплениях галактик. По результатам недавних работ, в частности [14], сравнение наблюдаемых распределений с численными симуляциями позволяет установить верхнюю границу: $\sigma/m < 0.1 \text{ см}^2/\text{г}$ для скоплений галактик.

2.3 РЕКОМБИНАЦИЯ СКРЫТОЙ МАССЫ В КОСМОЛОГИИ

Рекомбинация — процесс перехода свободного иона в связанное состояние в поле другого иона.

В моделях самовзаимодействующей скрытой массы процесс рекомбинации играет определяющую роль в динамических свойствах скрытой массы и ее термодинамической эволюции [15–18]. Частицы обладающие темным зарядом теряют энергию и момент на столкновения друг с другом — диссипируют, тем самым образуют темный диск. Незаряженные частицы скрытой массы проходят друг относительно друга почти без столкновений и взаимодействуют друг с другом исключительно гравитационно — образуют гало. Таким образом, количество частиц SIDM, образовавших и не образовавших связанное состояние, определяет динамику образования структур на малых масштабах.

В текущей задаче, мы рассматриваем модель SIDM, в которое есть кулоновское темное взаимодействие и два сорта частиц: а — темный электрон, b — темный протон, заряженные темным зарядом (далее у-заряд, у-взаимодействие, у-протон, у-электрон).

2.3.1 РЕКОМБИНАЦИЯ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

В физике плазмы существуют различные способы рекомбинации частиц [19]:

- 1) радиационная рекомбинация $b^+ + a \rightarrow b' + h\nu$;
- 2) диэлектронная рекомбинация $b^+ + a \rightarrow b'' \rightarrow b' + h\nu$ или $\rightarrow b^+ + a$;
- 3) трехчастичная рекомбинация $b^+ + a + X \rightarrow b + X$.

В физике плазмы трехчастичные процессы начинают доминировать над остальными при высокой плотности плазмы.

2.3.2 РЕКОМБИНАЦИЯ КРАМЕРСА

В большей части работ, связанных с рекомбинацией в космологии [17; 18] используют только радиационную рекомбинацию Крамерса.

Почти сто лет назад Крамерс [20] впервые получил приближенное выражение для сечения радиационного захвата свободных электронов в связанное состояние. С некоторыми корректировками префактора формулы в данной работе, результат сходится с точным квантовомеханическим расчетом [21].

Сечение рекомбинации Крамерса задается формулой (2.1):

$$\sigma_k = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3 \ln(v^{-1})}{\mu^2 v^2}, \quad (2.1)$$

где α — постоянная тонкой структуры, μ — приведенная масса системы, v — начальная относительная скорость.

Вывод

данной формулы был неоднократно повторен в литературе [22; 23]. Приведем в качестве примера основные тезисы вывода данной формулы из оригинальной статьи Крамерса [20]. Получение формулы основано на спектральном разложении радиационных потерь энергии электрона. В квазиклассическом приближении, формула для вычисления сечения рекомбинации Крамерса может быть задана следующим образом: $\sigma = 2\pi \int P(\rho) \rho d\rho$, где $P(\rho, \omega)$ — вероятность процесса с определенным прицельным параметром ρ . Переход электрона в связанное состояние в выводе формулы осуществляется за счет испускания фотона с энергией

$\hbar\omega = mv^2/2 + E_n$. Вероятность такого процесса определяется плоским дифференциальным спектром излучения. После подстановки $P(\rho)$ и взятия интеграла, получается формула (2.1).

2.3.3 ТРЕХЧАСТИЧНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

Трехчастичная

рекомбинация — это процесс, при котором вблизи положительного иона происходит столкновение (взаимодействие) электрона с третьей частицей (в нашем случае нейтрального атома), после которого электрон теряет часть энергии и образует связанное состояние с ионом.

Не существует общей теории расчета скорости трехчастичных процессов. Расчет производится в некоторых приближениях. Вывод формул для трехчастичной рекомбинации был получен Питаевским в работе [24]. В данной работе производится расчёт коэффициента электрон-ионной рекомбинации β , на основе теории диффузии:

$$\beta = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \frac{m_a^{1/2} e^6 \sigma}{T^{5/2} m_b} n, \quad (2.2)$$

где m_a, m_b — массы соответствующих частиц, e заряд, T — температура плазмы, σ — полное сечение рассеяния электрона, n — концентрация атомов. Данный коэффициент показывает скорость протекания реакции.

В данной работе было получено следующее ограничение на пределы применимости формулы:

$$T \ll e^2 n \sigma \sqrt{\frac{m_a}{m_b}}. \quad (2.3)$$

2.3.4 КЛАССИЧЕСКАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

В данной работе также рассматривался классический подход к расчету сечения рекомбинации. В данном подходе мы можем рассчитать сечение процесса через прицельный параметр налетающего электрона. Электрон ускоряется, двигаясь в поле заряженного ядра, а значит начинает терять свою энергию. Если электрон потеряет всю свою начальную энергию при таком движении, то мы можем считать, что он перешел в связанное

состояние — произошла рекомбинация.

Используя такой подход, мы можем получить классическую формулу сечения рекомбинации:

$$\sigma_{c1} = (4\pi)^{2/5} \pi \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{1}{v^{14/5}}, \quad (2.4)$$

где α — постоянная тонкой структуры, μ — приведенная масса системы, v — начальная относительная скорость.

3 КЛАССИЧЕСКАЯ РАДИАЦИОННАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

3.1 ВЫВОД КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДИПОЛЬНЫХ ПОТЕРЬ

Классическую формулу (2.4) также можно получить исходя из рассуждений, представленных в [23]. Для проверки представленных выше выкладок, необходимо провести оценку условий применимости этих рассуждений.

Рассматривается поле системы зарядов на расстояниях, далеких от самой системы. $R \approx R_0 - nr$. Для этого необходимо выполнение двух условий: $a_0 \ll r$, $\lambda \ll r$. Поле, создаваемое движущимися зарядами, может быть описано с помощью формул для запаздывающих потенциалов:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c} dV\end{aligned}$$

Также пренебрежем временем $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ в подынтегральном выражении. Это можно сделать, если характерные размеры системы будут меньше длины излучаемого света или иначе: $v \ll c$, что и называют дипольным приближением.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 R_0} \frac{d}{dt} \int \rho_{t-R_0/c} \mathbf{v} dV = \frac{1}{c^2 R_0} \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{v} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$$

Интенсивность излучения dI на элемент телесного угла $d\Omega$ определяется как:

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega.$$

Далее в полученную формулу подставляем поле и векторный

потенциал (3.1) нашей системы зарядов, интегрируем по телесному углу:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (3.1)$$

При столкновении двух заряженных частиц дипольные потери энергии могут быть записаны как:

$$\Delta E = \frac{\mu v_0^5}{3c^3 Z e^2} t g^3 \frac{\chi}{2} G(\chi) \left(\frac{e}{m} - \frac{Ze}{m_a} \right)^2 \quad (3.2)$$

$$G(\chi) = (\pi + \chi) \left(1 + 3 t g^2 \frac{\chi}{2} \right) + 6 t g \frac{\chi}{2}$$

Где

под χ понимается положительный угол, определяемый из соотношения $\text{ctg } \frac{\chi}{2} = \mu v_0^2 \rho / Z e^2$, m_a — масса ядра (Кулоновского центра), $\mu = \frac{m \cdot m_a}{m + m_a}$ — приведённая масса, ρ — прицельный параметр налетающего электрона, v_0 — скорость в системе центра масс. В пределе малой массы электрона получаем $G(\chi) \approx 6 \pi t g^5 \frac{\chi}{2}$.

3.2 КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ИЗЛУЧЕНИЯ

Классическая трактовка рассматривает излучение непрерывно: частица с начальной скоростью v и импульсным параметром ρ движется по гиперболе, теряет энергию $|\Delta E|$ и угловой момент $|\Delta L|$ через дипольное излучение (3.2). Условие $|\Delta E| > E = m v^2 / 2$ приводит к захвату в эллиптическую орбиту. Итоговое сечение [25] принимает вид

$$\sigma_{\text{Cl}}(v) = \pi \left[(4\pi)^{2/5} (Z^2)^{4/5} r_0^2 \right] \left(\frac{c}{v} \right)^{14/5}, \quad (3.3)$$

где $r_0 = e^2 / m c^2$ — классический радиус электрона. Ключевая особенность — отсутствие $\hbar$ и α в коэффициенте: сечение растёт значительно быстрее квантового аналога при $v \rightarrow 0$.

3.2.1 ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

Как показано в работах [15; 25] область применения классической формулы будет задаваться неравенством:

$$Z^4 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \gg \alpha^{-5}. \quad (3.4)$$

С учётом (3.4) классическое описание становится релевантным для «тяжёлых» зарядов или эффективной константы взаимодействия $\alpha \gg 1$, которая может быть реализована для тёмной материи.

3.3 СРАВНЕНИЕ С ПОЛУКЛАССИЧЕСКИМ ПОДХОДОМ КРАМЕРСА

- В полуклассическом методе угловой момент квантуется до расчёта спектра: вероятность $P(\rho)$ испускания целого числа фотонов $q(\rho, \omega)$ определяется через классический спектр $I(\rho, \omega)$.
- Предложенная в [22] альтернатива учитывает квантуемость уже излучённого ΔL : для $\Delta L \sim \hbar$ воспроизводится формула Крамерса, а при $|\Delta L| \gg \hbar$ — выводится классическое сечение σ_{Cl} .

3.4 РОЛЬ КЛАССИЧЕСКОЙ РЕКОМБИНАЦИИ В КОСМОЛОГИИ

В специфических сценариях, где DM несёт «тёмный заряд» с $\alpha_d \gtrsim 1$ и возможны $Z \gg 1$ (например, магнитные монополи или сильное темное взаимодействие), классическая рекомбинация может приводить к быстрой потере заряда и формированию нейтральных связей задолго до рекомбинации барионов. Это может существенно менять начальные условия формирования структур.

4 ТРЕХЧАСТИЧНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

4.1 ВЫВОД ТРЕХЧАСТИЧНОЙ ФОРМУЛЫ В РАБОТЕ ПИТАЕВСКОГО

В рамках данной дипломной работы особый интерес представляет ограничения на применимость формулы для сечения трехчастичной рекомбинации. В связи с этим была изучена оригинальная работа Питаевского [24], в которой был получен вывод данной формулы. Целью работы является расчет коэффициента электрон-ионной рекомбинации в слабоионизированном газе при высоких давлениях и высоких температурах.

Процесс рекомбинации в данной работе рассматривается, как процесс диффузии энергии электрона в энергетическом пространстве в направлении отрицательных энергий. Тогда функция распределения электронов в фазовом пространстве $f(E)$, является уравнением диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A(E) \frac{\partial}{\partial E} j(E), \quad (4.1)$$

где $j(E)$ — поток частиц.

Поток для распределения Больцмана может быть записан, как:

$$j(E) = -B(E)(\partial f / \partial E + f / kT), \quad (4.2)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура газа. Коэффициенты $A(E)$, $B(E)$ — нормировочные коэффициенты распределений.

Коэффициент $A(E)$ определяется в работе из условия нормировки распределения энергии электронов на

дельта-функцию соответствующей классической энергии:

$$A(E) = \sqrt{2}(-E)^{5/2}2\pi^3 e^6 m^{3/2}, \quad (4.3)$$

где m , e — масса и заряд электрона.

Нахождение коэффициент $B(E)$ сводится к нахождению среднего квадрата изменения энергии частицы за единицу времени $\overline{(\partial \Delta E)^2 / \partial t}$:

$$B = \frac{1}{2A} \frac{\overline{\partial(\Delta E)^2}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Чтобы вычислить $\overline{\partial(\Delta E)^2 / \partial t}$ автор предполагает, что газ одноатомный и что столкновения между электроном и атомом происходят достаточно быстро, что можно предположить, что электрон во время столкновения с атомами остается свободен. Это необходимо для вычисления средней потерянной энергии. Данное предположение накладывает ограничение на применимость данной формулы:

$$kT \ll \sqrt{m/M} e^2 / a. \quad (4.5)$$

Данное ограничение говорит о том, что ионы и нейтральные атомы двигаются медленно по сравнению с электроном, поэтому их распределение в плазме можно считать практически однородным. Поэтому столкновениями типа ион-атом можно пренебречь.

Второе условие применимости данной формулы исходит из того, что в выводе формулы используется диффузия в энергетическом пространстве электрона, но существует также и распределение в координатном пространстве электрона. Для применимости данных формул необходимо, чтобы равновесие в координатном пространстве электрона достигалось быстрее, чем в пространстве энергетическом. Данное требование выражается автором в формуле:

$$kT \gg e^2 n \sigma \sqrt{m/M}, \quad (4.6)$$

где σ — сечение упругого рассеяния электрона.

В качестве финального результата получается коэффициент трехчастичной рекомбинации — коэффициент определяющий скорость

процесса:

$$\beta = \frac{32\sqrt{2\pi} m^{1/2} e^6 \sigma}{3 T^{5/2} M} n, \quad (4.7)$$

В нашей работе мы не ставим целью привести полный вывод формулы, а лишь привести основную идею работы и границы применимости формулы.

4.2 РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ

В ранней Вселенной при температурах выше чем m_a процесс ионизации и рекомбинации находятся в химическом равновесии. При расширении Вселенной γ -электроны и γ -протоны замедлились и получили возможность образовывать связанные состояния. Данный газ становится прозрачным для γ -излучения: происходит процесс оцепления γ -фотонов. Положим, что отцепление произошло при температуре порядка $T_{\text{rec}} \sim m_a/10$.

Сразу после рекомбинации γ -фотонный фон отцепляется от а и б, а также от обычной материи. Температура γ -фона (T_γ), изменяется как $1/a$, где a — масштабный фактор. Влияние обычной материи на γ -плазму мало (т.к. мало взаимодействие), поэтому после оцепления от γ -фона [15], температура газа γ -частиц изменяется во времени как:

$$T_a \approx \frac{T^2}{T_{ay}}, \quad T_{ay} = 0.2 \text{ MeV} \left(\frac{m_a}{100 \text{ GeV}} \right) \frac{1/100}{\alpha_y}. \quad (4.8)$$

Для расчета изменения концентрации γ -частиц воспользуемся уравнением Больцмана:

$$-\frac{dn_a}{dt} = \langle \sigma v \rangle n_a n_b + 3Hn_a, \quad (4.9)$$

где n_a , n_b — концентрация частиц а и б, $\langle \sigma v \rangle$ — скорость рекомбинации, H — параметр Хаббла. Для достижения электронейтральной плазмы положим, что частиц а и б одинаковое количество: $n_a = n_b = n$. Получим уравнение:

$$-\frac{dn}{dt} = \langle \sigma v \rangle n^2 + 3Hn. \quad (4.10)$$

В процессе эволюции Вселенная расширяется, в связи

с этим концентрация в единице объема постоянно падает. Также время не является удобной переменной для отсчета масштаба в космологии, гораздо удобнее использовать масштабный фактор или температуру фотонов. Для удобства оценки мы перейдем к другим переменным:

$$r = n/s, \quad s \approx \frac{2\pi^2 g_s}{45} T^3, \quad (4.11)$$

где s — плотность энтропии, g_s — количество степеней свободы.

$$-dt = \frac{1}{HT} dT, \quad (4.12)$$

где T — температура фотонов.

Учтем также, что скорость трехчастичной рекомбинации $\langle \sigma v \rangle = \beta(T_a)$. Тогда уравнение (4.10) можно переписать в виде:

$$\frac{dr}{dT} = \frac{r^2 s}{HT} \beta(T_a) = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \frac{r^3 s^2 m_a^{1/2} e_y^6 \sigma}{HT T_a^{5/2} m_b}. \quad (4.13)$$

Полное сечение взаимодействия электрона с нейтральным атомом $\sigma \sim e_y^4/T_a^2$. Учтем связь между температурой y -частиц и обычных фотонов (4.8):

$$\frac{dr}{dT} = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \cdot \frac{s^2 m_a^{1/2} e_y^{10} T_{ay}^{9/2}}{H m_b} \cdot \frac{r^3}{T^{10}}. \quad (4.14)$$

Параметр Хаббла на RD и MD стадиях имеет следующую зависимость от температуры:

$$H(T) = \begin{cases} h_{RD} T^2 & h_{RD} = 5.5 \sqrt{g_\epsilon/11} / M_{Pl} \\ h_{MD} T^{3/2} & h_{MD} = 10^{-14} / M_{Pl}^{1/2} \end{cases}. \quad (4.15)$$

Подставив выражение для плотности энтропии и параметра Хаббла в уравнение (4.14). Тогда для RD стадии:

$$\frac{dr}{dT} = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \cdot \frac{(2\pi^2 g_s/45)^2 m_a^{1/2} e_y^{10} T_{ay}^{9/2}}{h_{RD} m_b} \cdot \frac{r^3}{T^6}. \quad (4.16)$$

Разделив переменные и проинтегрировав с начальными условиями $r(T_{\text{rec}}) = r_0$, получаем выражение для относительной плотности на RD

стадии:

$$r_{\text{RD}}(T) = r_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{5} D_{\text{RD}} r_0^2 \left(\frac{1}{T^5} - \frac{1}{T_{\text{rec}}^5} \right) \right)^{-1/2}, \quad (4.17)$$

$$D_{\text{RD}} = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \frac{(2\pi^2 g_s/45)^2 m_a^{1/2} e_y^{10} T_{ay}^{9/2}}{h_{\text{RD}} m_b}.$$

Переход на MD стадию произошел при $T_{\text{RM}} \approx 1.2 \text{ eV}$ и $r_{\text{RM}} = r_{\text{RD}}(T_{\text{RM}})$. Тогда произведя подобные выкладки на MD стадии, получаем:

$$r_{\text{MD}}(T) = r_{\text{RM}} \cdot \left(1 + \frac{4}{9} D_{\text{MD}} r_{\text{RM}}^2 \left(\frac{1}{T^{9/2}} - \frac{1}{T_{\text{RM}}^{9/2}} \right) \right)^{-1/2}, \quad (4.18)$$

$$D_{\text{MD}} = \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \frac{(2\pi^2 g_s/45)^2 m_a^{1/2} e_y^{10} T_{ay}^{9/2}}{h_{\text{MD}} m_b}.$$

4.3 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Воспользуемся моделью SIDM, рассмотренной в статье [15] для сравнения вклада от трехчастичной рекомбинации в концентрацию у-частиц.

m_a	100 GeV
m_b	1 TeV
α_y	1/100
r_{rec}	$4.6 \cdot 10^{-13}$

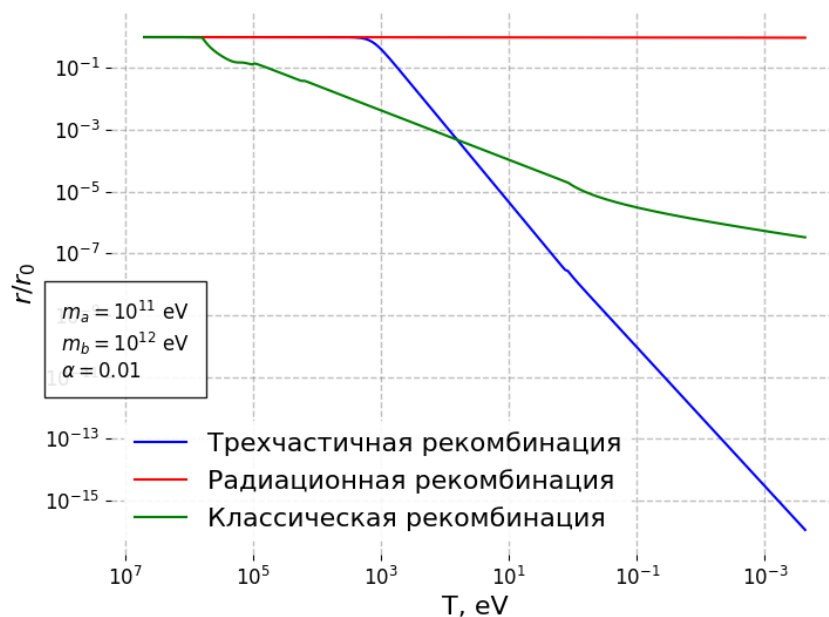
Численное решение представлено на графиках (4.1) и (4.2). Следует также учесть ограничения на этот результат из пределов применимости формул (4.17) и (4.18). Их можно получить из (2.3), перейдя к переменным r и T :

$$\frac{r}{r_0} \gg \frac{T_{ay}^2}{T^4} \left((4\pi\alpha)^3 r_0 \sqrt{\frac{m_a}{m_b}} (2\pi^2 g_s/45) \right)^{-1}. \quad (4.19)$$

4.4 АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТА

В результате численного расчета были получены графики (4.1, 4.2), на которых отражена зависимость относительной плотности заряженных

у-частиц от температуры обычных фотонов.



Рисунок

4.1

График зависимости относительной плотности у-заряженных частиц скрытой массы от температуры фотонов. Трехчастичная рекомбинация приводит к тому, что почти все частицы переходят в связанное состояние к настоящему моменту.

Для формулы рекомбинации Крамерса, относительное количество прорекомбинировавших частиц не превышает 10 процентов к настоящему моменту времени ($T \approx 10^{-3}$ эВ). То есть, большая часть плазмы остается заряженной: сохраняет взаимодействие между частицами.

Большая часть частиц плазмы рекомбинирует при использовании формулы трехчастичной рекомбинации. К настоящему моменту времени относительное количество прорекомбинировавших частиц составит $r/r_0 = 10^{16}$, то есть буквально все частицы. Подобный механизм позволил за короткий интервал времени перевести все частицы SIDM в связанное состояние, ведущее себя как частицы невзаимодействующей скрытой массы, то есть убрать эффект самовзаимодействия данных частиц к настоящему моменту времени.

На графике (4.3) также выведено ограничение на применение трехчастичной формулы. Формула трехчастичной рекомбинации применима, если относительная плотность частиц больше значения данной функции при

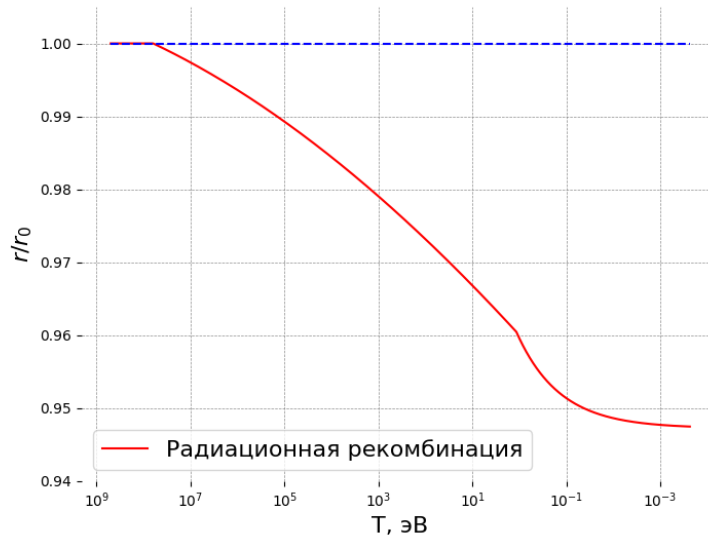


Рисунок 4.2 — График зависимости относительной плотности u -заряженных частиц скрытой массы от температуры фотонов для рекомбинации Крамерса. Примерно 5 процентов частиц перейдут в связанное состояние к настоящему моменту времени.

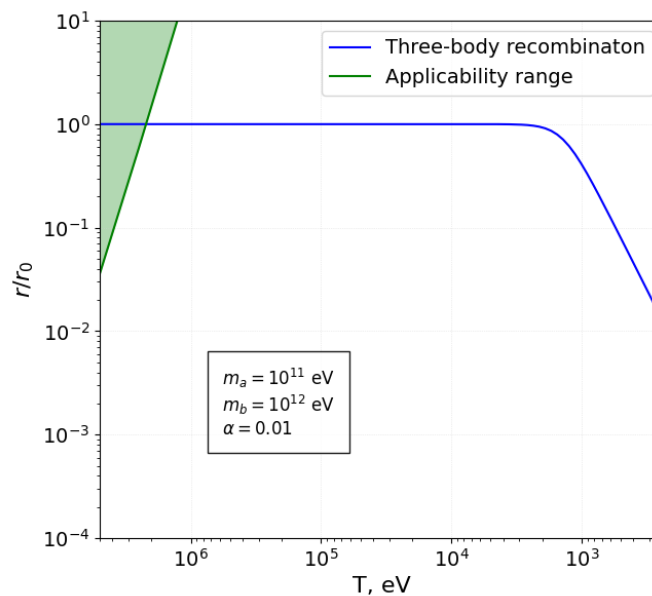


Рисунок 4.3 — График зависимости относительной плотности u -заряженных частиц скрытой массы от температуры фотонов. Заштрихованная область выше зеленой кривой описывает область применимости формулы трехчастичной рекомбинации.

определенной температуре. Как видим, для текущих параметров модели, трехчастичная рекомбинация не применима.

4.5 ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ

Рассмотренная нами параметры модели не удовлетворяет условиям применимости формулы трехчастичной рекомбинации. Но мы можем подобрать параметры самовзаимодействующей скрытой массы (массы частиц и силу взаимодействия между ними) такими, что условия будут выполняться.

В текущей секции работы было исследовано пространство параметров нашей модели. При различных параметрах рассчитывались относительная плотность частиц нерекombинировавшей скрытой массы по формуле трехчастичной рекомбинации и ограничение на применимость формулы. Находилась точка пересечения двух этих функций — количество частиц, которые успевали перейти в связанное состояние до того, как формула трехчастичной рекомбинации переставала быть применима. Полученное значение относительной плотности ставилось в соответствие параметрам, при котором оно было получено.

Данные, полученные с помощью этих вычислений приведены на графике (4.4). По графику видно, что трехчастичная рекомбинация переводит большее количество частиц в связанное состояние для больших констант связи (α_y) и малых масс частиц (m_a). Чтобы наглядно показать процесс рекомбинации в случае, когда формула трехчастичной рекомбинации применима, был построен график (4.5). Как видим по графику, определенная часть частиц успевает перейти в связанное состояние, часть частиц остается ионизированными. Подобная двухкомпонентная темная плазма является одной из моделей, объясняющих позитронную аномалию [26].

Формула трехчастичной рекомбинации может быть применена к широкому диапазону значений параметров SIDM моделей. Для некоторых наборов параметров, она будет давать новый физический результат, которые не наблюдался с помощью рекомбинации Крамерса.

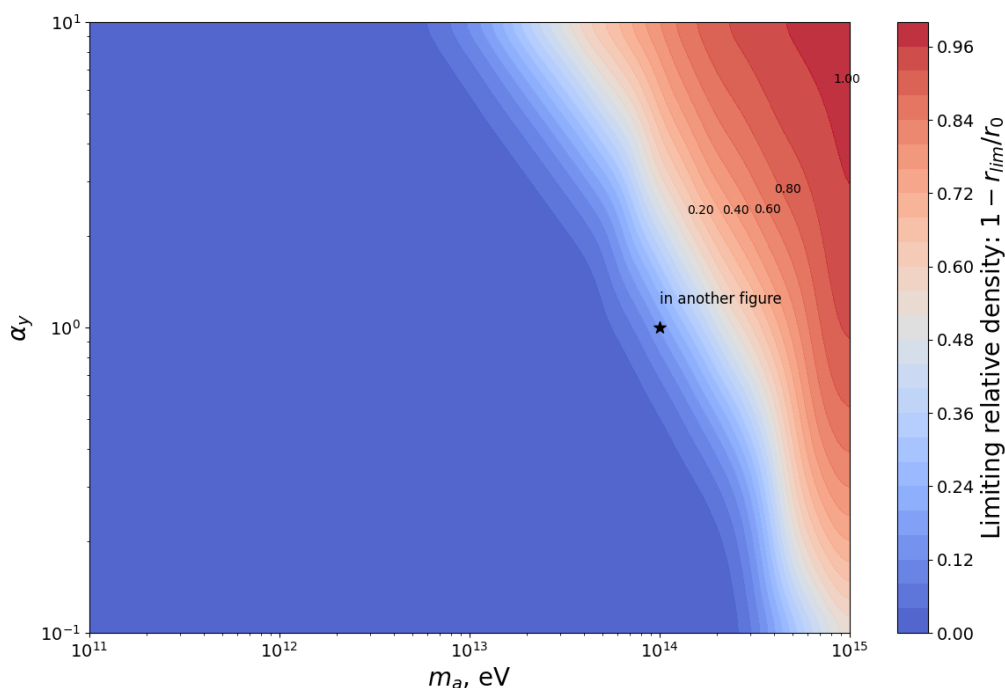


Рисунок 4.4 — Распределение значений предельной относительной плотности прорекомбинировавших γ -частиц от параметров модели. Значение в каждой ячейке характеризует порядок относительной плотности частиц, успевших прорекомбинировать за время, пока формула трехчастичной рекомбинации была применима.

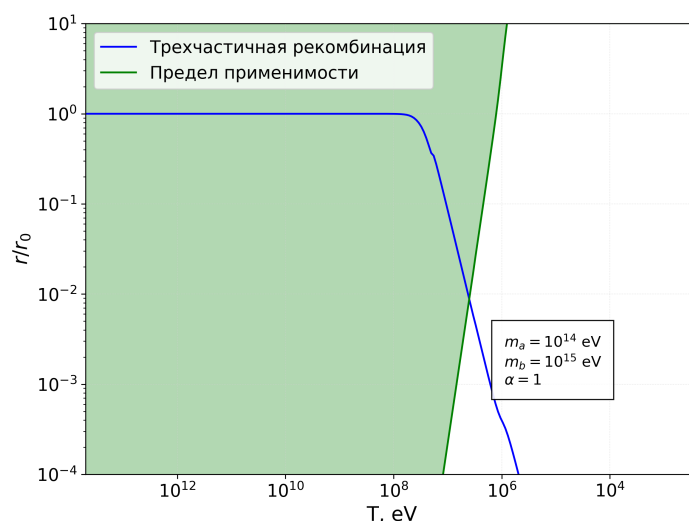


Рисунок 4.5 — График зависимости относительной плотности γ -заряженных частиц скрытой массы от температуры фотонов с ограничением на применимость формулы. При данных параметрах ионизированными остается меньше процента частиц к моменту, когда формула трехчастичной рекомбинации становится неприменима.

5 ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР ИЗ САМОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ

5.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОТИВАЦИЯ

В рамках инициативы, описанной в главах и, показано, что трёхчастичная рекомбинация приводит к естественному разделению DM на две компоненты: *заряжённую* (взаимодействующую) и *нейтральную* (поводящую себя как CDM). Такая двухкомпонентная картина потенциально способна одновременно:

- решать маломасштабные проблемы Λ CDM за счёт внутреннего теплообмена в гало;
- порождать астрофизические структуры (диски, бары, клампы) из SIDM компоненты (проверяем в этой работе);
- объяснять позитронную аномалию [27; 28], если заряжённая компонента нестабильна и распадается с образованием позитронов [26; 29—31].

Однако даже при аналитическом описании рекомбинационных процессов точное предсказание морфологии и динамики сидм-структур невозможно без прямого моделирования гравитационной эволюции системы «барионы нейтральная CDM заряжённая SIDM». Для этой цели требуется высокоточное N-body моделирование с специализированным модулем самовзаимодействия.

Цель главы — с помощью Nbody моделирования с самовзаимодействием темной материи показать, что формирование структур возможно. Проанализировать морфологию структур и параметры при которых конкретная морфология проявляется.

5.2 ПОЧЕМУ N-BODY НЕИЗБЕЖНО

5.2.1 ОГРАНИЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОДХОДОВ

Линейная теория возмущений и полуаналитические методы (например, Press–Schechter) адекватно описывают рост структур на ранних стадиях, но полностью теряют применимость после вхождения системы в нелинейный режим. Наличие самовзаимодействия дополнительно усложняет задачу: поперечное сечение σ/m зависит от относительных скоростей и внутригалактических условий, что невозможно учесть в закрытом виде.

5.2.2 ТРЕБОВАНИЯ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ

Для достоверного изучения морфологии сидм-структур необходимо:

- 1) Достаточное массовое и пространственное разрешение, чтобы различить субструктуры (диски, бары) радиусом $R \lesssim 1$, кpc.
- 2) Корректная реализация столкновительных и кинетических процессов всё в той же гидродинамической/гравитационной среде.
- 3) Гибкая схема
временного интегрирования, позволяющая адаптивные шаги для плотных регионов (например, TreePM или комбинация с SPH).

Этим условиям удовлетворяют код GADGET-2 ([32]) и его наследники, благодаря модульности, наличию TreePM-алгоритма и открытости исходного кода.

5.3 ТЕКУЩИЙ СТАТУС ПРОЕКТА

5.3.1 КОНТЕЙНЕРИЗАЦИЯ И ВОСПРОИЗВОДИМОСТЬ

Для обеспечения полной воспроизводимости на любом устройстве и удобства установки была собрана **Docker-сборка**, автоматически устанавливающая:

- Пакеты (MPI, FFTW, GSL);
- GADGET-2 с необходимыми make опциями (PERIODIC, PMGRID, DOUBLEPRECISION, TREEPM);
- Питоновские модули анализа снимков `ut` и скрипты для него.

Сборка

публикуется в открытом репозитории и сопровождается CI-скриптом, проверяющим корректность компиляции и прогон минимального теста (развитие неустойчивостей в расширяющейся вселенной).

5.4 ПЛАН РАБОТЫ

5.4.1 ЭТАП 1. ВАЛИДАЦИЯ SIDM-МОДУЛЯ

5.4.2 ЭТАП 2. ТЕСТОВЫЕ ЗАПУСКИ

5.4.3 ЭТАП 3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И МЕТРИКИ НА ТЕСТОВЫХ ДАННЫХ

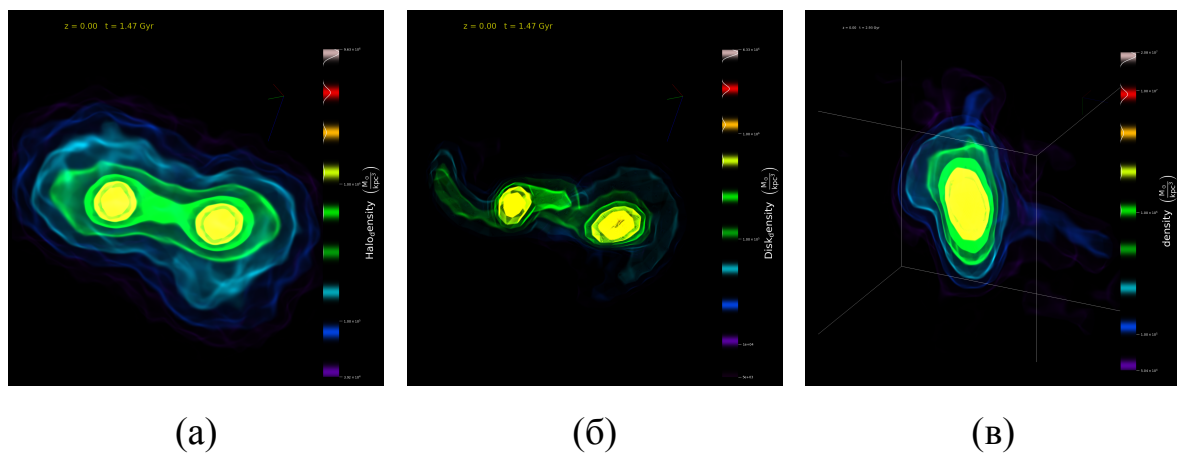


Рисунок 5.1 — Сравнение визуализаций плотности тёмной материи и диска.

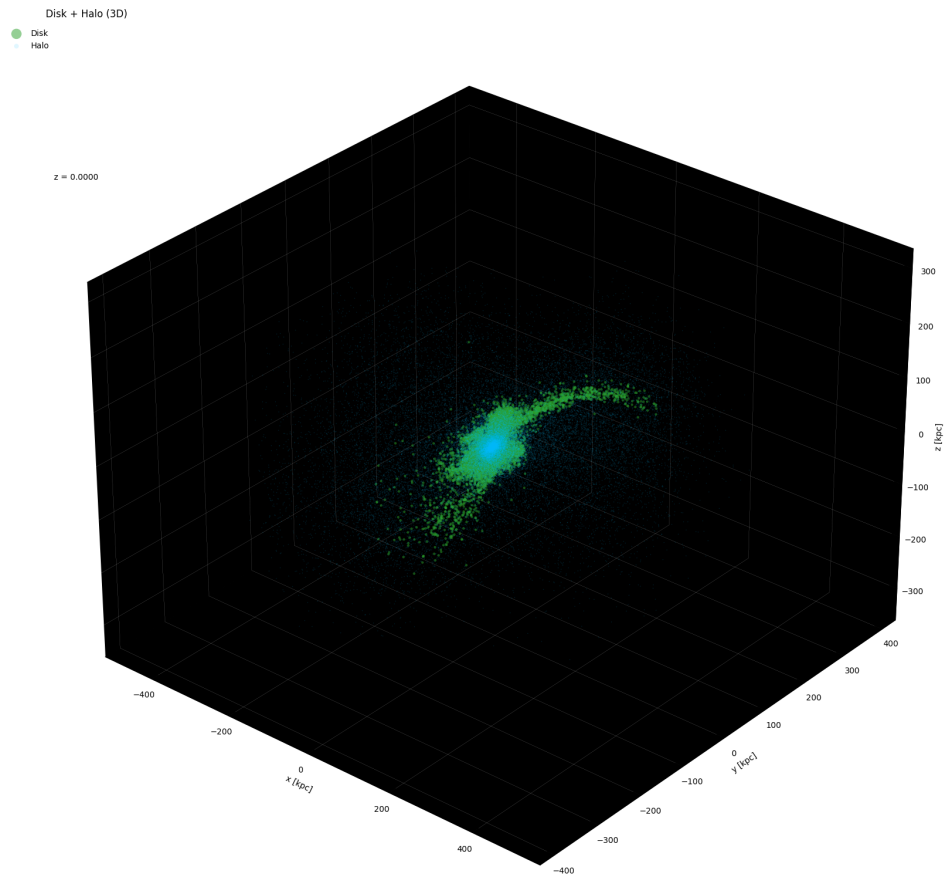


Рисунок 5.2 — Трёхмерная визуализация компонентов Halo и Disk.

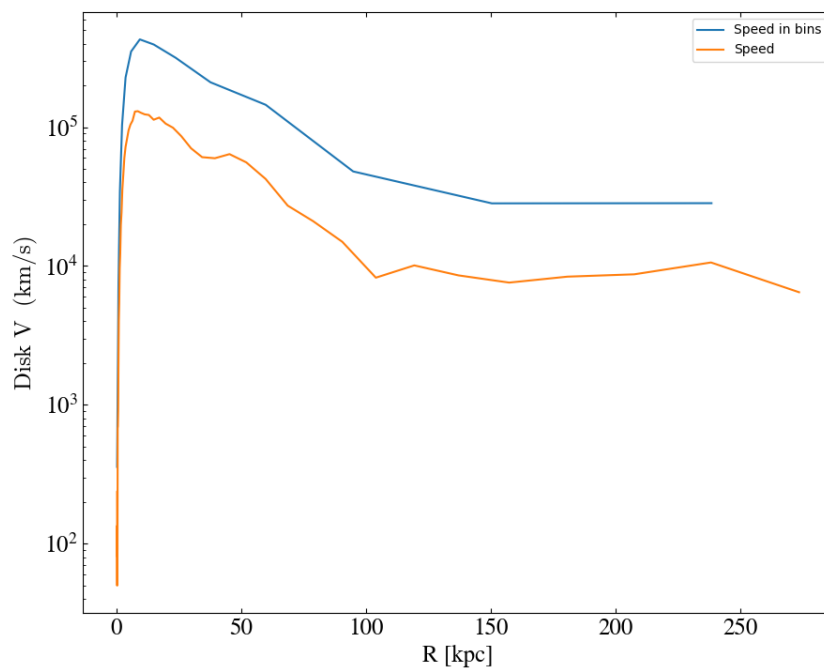


Рисунок 5.3 — Распределение скоростей в диске.

5.4.4 ЭТАП 4. МОДИФИКАЦИЯ КОДА ДЛЯ УЧЕТА САМОВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

5.4.5 ЭТАП 5. СОПОСТАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Задача формирования структур требует N-body подхода; аналитические методы дают лишь порядок величины.
- Подготовлена воспроизводимая инфраструктура (Docker+CI) и проведены тестовые запуски.
- Созданы базовые инструменты анализа (визуализаторы и метрики).
- Следующий этап — внедрение и валидация модели самовзаимодействия, после чего можно переходить к масштабным космологическим расчётам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Density Profiles and Substructure of Dark Matter Halos: Converging Results at Ultra-High Numerical Resolution / S. Ghigna [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 2000. — Vol. 544, no. 2. — P. 616–628. — ISSN 1538-4357.
2. Where Are the Missing Galactic Satellites? / A. Klypin [et al.] // *The Astrophysical Journal*. — 1999. — Vol. 522, no. 1. — P. 82–92.
3. *Bullock J. S., Boylan-Kolchin M.* Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. — 2017. — T. 55, Volume 55, 2017. — C. 343—387. — ISSN 1545-4282.
4. *Spergel D. N., Steinhardt P. J.* Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — P. 3760–3763.
5. Self-interacting dark matter / B. D. Wandelt [et al.] // 4th International Symposium on Sources and Detection of Dark Matter in the Universe (DM 2000). — 2000. — P. 263–274.
6. 3-3-1 Self Interacting Dark Matter and the Galaxy Core-Cusp problem. // *arXiv: Astrophysics of Galaxies*. — 2020.
7. *Rubakov V. A.* Cosmology and Dark Matter. — 2019.
8. *Randall L., Scholtz J.* Dissipative dark matter and the Andromeda plane of satellites // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2015. — P. 057–057. — ISSN 1475-7516.
9. Dissipative dark matter on FIRE-I. Structural and kinematic properties of dwarf galaxies / X. Shen [et al.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2021. — P. 4421–4445. — ISSN 1365-2966.
10. A population of red candidate massive galaxies 600 Myr after the Big Bang / I. Labbe [et al.]. — 2022. — *arXiv: [2207.12446](#) [astro-ph.GA]*.

11. *Tulin S., Yu H.-B.* Dark matter self-interactions and small scale structure // *Physics Reports*. — 2018. — T. 730. — C. 1—57. — ISSN 0370-1573. — Dark matter self-interactions and small scale structure.
12. Direct Constraints on the Dark Matter Self-Interaction Cross Section from the Merging Galaxy Cluster 1E 065756 / *M. Markevitch [и др.]* // *The Astrophysical Journal*. — 2004. — T. 606, № 2. — ISSN 1538-4357.
13. *Robertson A., Massey R., Eke V.* What does the Bullet Cluster tell us about self-interacting dark matter? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — T. 465, № 1. — C. 569—587. — ISSN 1365-2966.
14. Constraints on Dark Matter Self-Interactions from weak lensing of galaxies from the Dark Energy Survey around clusters from the Atacama Cosmology Telescope Survey / *S. Adhikari [и др.]*. — 2024. — arXiv: [2401.05788](https://arxiv.org/abs/2401.05788) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
15. *Belotsky K., Esipova E., Kirillov A.* On the classical description of the recombination of dark matter particles with a Coulomb-like interaction // *Physics Letters B*. — 2016. — Vol. 761. — P. 81–86.
16. *Belotsky K., Esipova E., Kirillov A.* On the temperature evolution of multicomponent dark matter with Coulomb-like interaction // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — Vol. 675. — P. 012017.
17. *Harling B., Petraki K.* Bound-state formation for thermal relic dark matter and unitarity // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2014. — Vol. 2014.
18. *Petraki K., Pearce L., Kusenko A.* Self-interacting asymmetric dark matter coupled to a light massive dark photon // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2014. — Vol. 2014.
19. *Knyazev B.* Low Temperature Plasma and Gas Discharge. In Russian. — 2003. — ISBN 5-94356-137-4.
20. *Kramers H. A.* XCIII. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // *Philosophical Magazine Series 1*. — 1923. — Vol. 46. — P. 836–871.
21. *Kotelnikov I. A., Milstein A. I.* Electron radiative recombination with a hydrogen-like ion // *Physica Scripta*. — 2019. — Vol. 94, no. 5. — P. 055403.

22. On quantum and classical treatments of radiative recombination / A. Barabanov [et al.] // *Physics Letters B*. — 2022. — Vol. 834. — P. 137459. — ISSN 0370-2693.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1941.
24. *Pitaevskii L.* RECOMBINATION OF ELECTRONS IN A MONOATOMIC GAS // *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.* — 1962. — Vol. 42.
25. *Elyutin P.* Classical recombination cross section // *Theor Math Phys.* — 1978. — Vol. 34. — P. 112–115.
26. *Belotsky K. M., Solovyov M. L., Rakhimova M. A.* Mechanisms of Cosmic Ray Generation // *Phys. At. Nucl.* — 2022. — T. 85, № 1. — С. 92—96.
27. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5–100 GeV / O. Adriani, G. Barbarino, G. Bazilevskaya [и др.] // *Nature*. — 2009. — T. 458. — С. 607—609.
28. First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5–350 GeV / M. Aguilar [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — T. 110, вып. 14. — С. 141102.
29. High-energy cosmic antiparticle excess vs. isotropic gamma-ray background problem in decaying dark matter Universe / V. V. Alekseev [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2016. — T. 675, № 1. — С. 012023.
30. Gamma-rays from possible disk component of dark matter / K. M. Belotsky [и др.] // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — T. 798, № 1. — С. 012084.
31. *Belotsky K. M., Kirillov A. A., Solovyov M. L.* Development of dark disk model of positron anomaly origin // *International Journal of Modern Physics D*. — 2018. — T. 27, № 06. — С. 1841010. — eprint: <https://doi.org/10.1142/S0218271818410109>.
32. *Springel V.* The cosmological simulation code gadget-2 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2005. — T. 364, № 4. — С. 1105—1134. — ISSN 1365-2966.