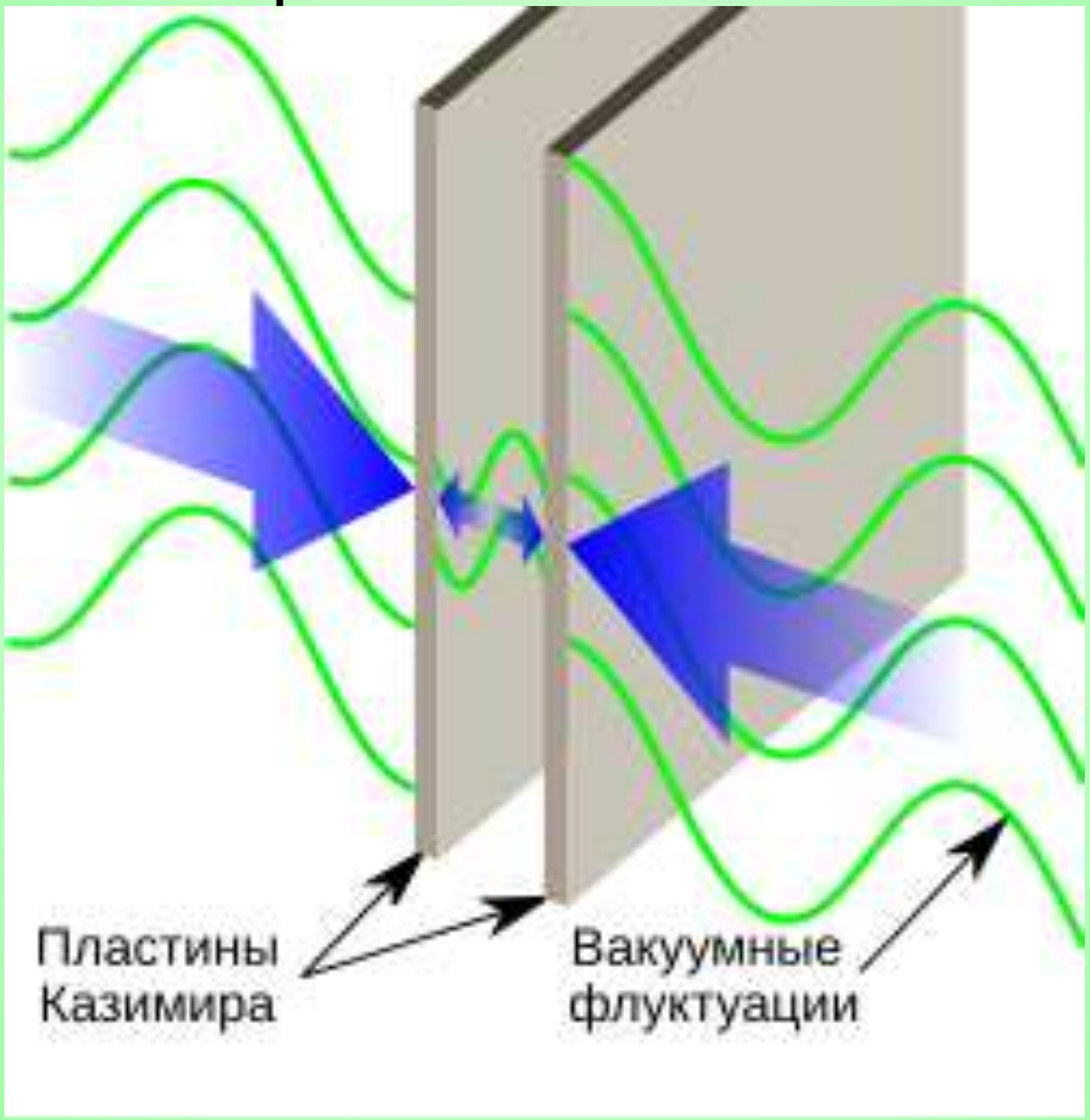
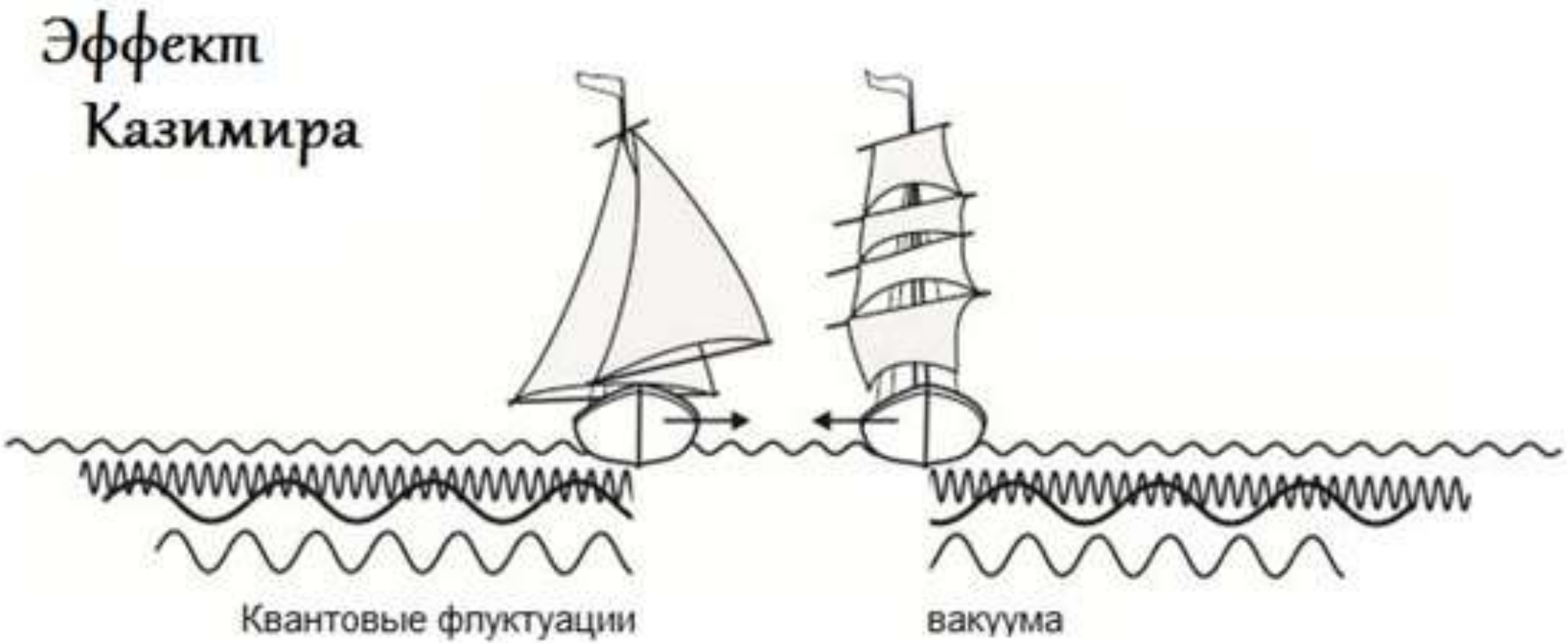
Связь простых чисел со статистиками элементарных частиц

Эффект Казимира в квантовой теории поля



Эффект Казимира в мореплавании



Величина силы эффекта Казимира

Уравнение плоской волны в свободном пространстве:

$$\psi(\vec{r},t) = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\xi)} \Leftrightarrow \psi(x,y,z,t) = e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t+\xi)}$$

Частота плоской волны:

$$\omega^2 = c^2k^2 = c^2k_x^2 + c^2k_y^2 + c^2k_z^2$$

Граничные условия на зеркальных пластинах:

$$\psi(x,y,0,t) = \psi(x,y,a,t) = 0$$

Краевая задача:

$$\psi(x,y,z,t) = e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t+\xi)} = e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi'+k_z z+\xi_z)} =$$

$$= e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi')} e^{i(k_z z+\xi_z)} = e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi')}\left(A\cos k_z z + \sqrt{1-A^2}\sin k_z z\right)$$

$$\psi(x,y,0,t) = 0 \Leftrightarrow e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi')}\left(A\cos 0 + \sqrt{1-A^2}\sin 0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cos 0 + \sqrt{1-A^2}\sin 0 = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \psi(x,y,z,t) = e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi')}\sin k_z z$$

$$\psi(x,y,a,t) = 0 \Leftrightarrow e^{i(k_x x+k_y y-\omega t+\xi')}\sin k_z a = 0 \Rightarrow \sin k_z a = 0 \Rightarrow k_z a = \pi n \Rightarrow k_{z_n} = \frac{\pi n}{a}, n \in \mathbb{N}$$

Величина силы эффекта Казимира

Частота стоячей волны:

$$\omega_n^2 = c^2k_x^2 + c^2k_y^2 + c^2k_{z_n}^2 = c^2k_x^2 + c^2k_y^2 + \frac{c^2\pi^2n^2}{a^2} \Rightarrow \omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2n^2}{a^2}}$$

Уравнение стоячей волны между зеркальными пластинами:

$$\psi_n(x, y, z, t) = e^{i(k_x x + k_y y - \omega_n t + \xi')} \sin k_{z_n} z$$

Переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} k_x = q\cos\varphi \\ k_y = q\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = q^2 \Rightarrow \omega_n = c\sqrt{q^2 + \frac{\pi^2n^2}{a^2}} \Rightarrow I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -q\sin\varphi \\ \sin\varphi & q\cos\varphi \end{vmatrix} = q\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi = q$$

Минимальная энергия квантового гармонического осциллятора:

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar}{2} * \omega$$

Энергия вакуума между зеркальными пластинами:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar}{2} * 2 \int_{k_x} \int_{k_y} \frac{\sigma dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \hbar\sigma \int_{k_x} \int_{k_y} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \infty$$ (ультрафиолетовая расходимость)

Перенормировка

$$\langle E(s)\rangle = \hbar\sigma \int_{k_x}\int_{k_y} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \omega_n^{-s} = \hbar\sigma \int_{\varphi}\int_{q} \frac{d\varphi q dq}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s} = \hbar\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s} =$$

$$= \hbar\sigma\, \varphi\Big|_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s} = \hbar\sigma * 2\pi \int_0^{\infty} \frac{q dq}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s} = \frac{\hbar\sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s}\, q dq =$$

$$= \frac{\hbar\sigma}{4\pi} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{1-s}\, dq^2 = \frac{\hbar\sigma}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_n^{1-s}\, dq^2 = \frac{\hbar\sigma}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(c\sqrt{q^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} \right)^{1-s} dq^2 =$$

$$= \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(q^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right)^{\frac{1-s}{2}} dq^2 = \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi^2 n^2}{a^2}}^{\infty} \left(q^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right)^{\frac{1-s}{2}} d\left(q^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \right) =$$

Перенормировка

$$= \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi^2n^2}{a^2}}^{\infty} t^{\frac{1-s}{2}}\,dt = \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{t^{\frac{3-s}{2}}}{\left(\frac{3-s}{2}\right)}\right|_{\frac{\pi^2n^2}{a^2}}^{\infty} = \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left. t^{\frac{3-s}{2}}\right|_{\frac{\pi^2n^2}{a^2}}^{\infty} =$$

$s-3 \geq 0$
$s \geq 3$

$$= \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{t\to\infty} t^{\frac{3-s}{2}} - \left(\frac{\pi^2n^2}{a^2}\right)^{\frac{3-s}{2}}\right) = \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty} t^{\frac{s-3}{2}}} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{3-s}\right) =$$

$$= \frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(0 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{3-s}\right) = -\frac{\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{3-s} = -\frac{\pi^{3-s}\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2\pi a^{3-s}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{3-s} =$$

$$= -\frac{\pi^{2-s}\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2a^{3-s}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{3-s} = -\frac{\pi^{2-s}\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2a^{3-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-3}} - \frac{\pi^{2-s}\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2a^{3-s}}\zeta(s-3)$$

$$\langle E\rangle = \lim_{s\to 0}\langle E(s)\rangle = -\lim_{s\to 0}\frac{\pi^{2-s}\hbar c^{1-s}\sigma}{(3-s)2a^{3-s}}\zeta(s-3) = -\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{6a^3}\zeta(-3)$$

$s-3 > 1$
$s > 4$

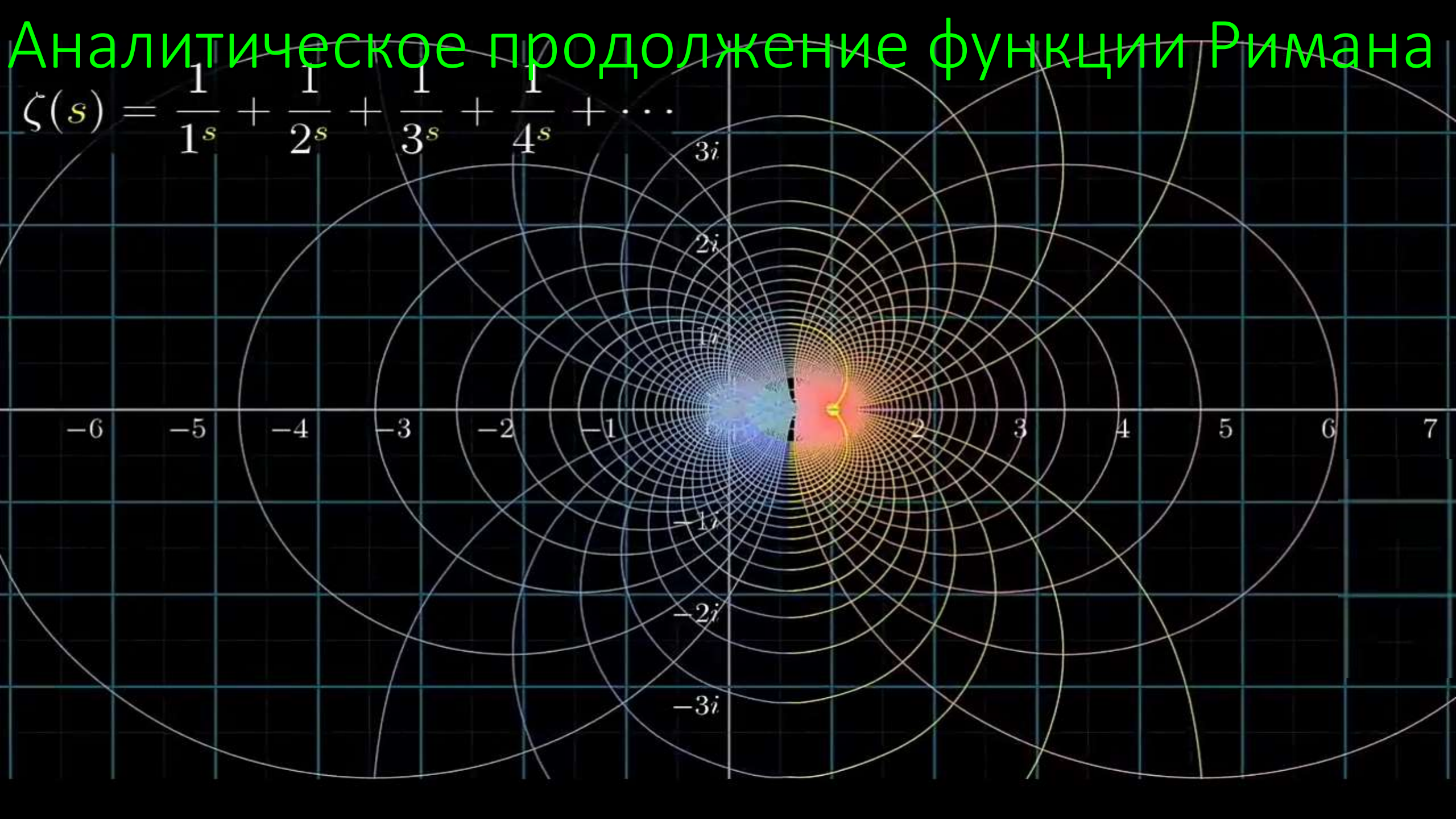
Аналитическое продолжение функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Аналитическое продолжение функции Римана

Аналитическое продолжение функции Римана

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$



Частные значения ζ функции в области аналитического продолжения

$$1+1+1+1+1+\cdots=\zeta(0)=B_1=-\frac{1}{2}$$

$$1+2+3+4+5+\cdots=\zeta(-1)=-\frac{B_2}{2}=-\frac{1}{12}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots=\zeta(-2)=\frac{B_3}{3}=0$$

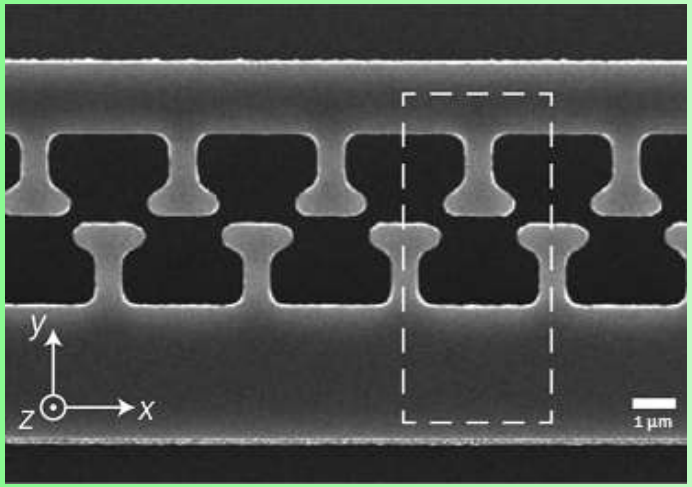
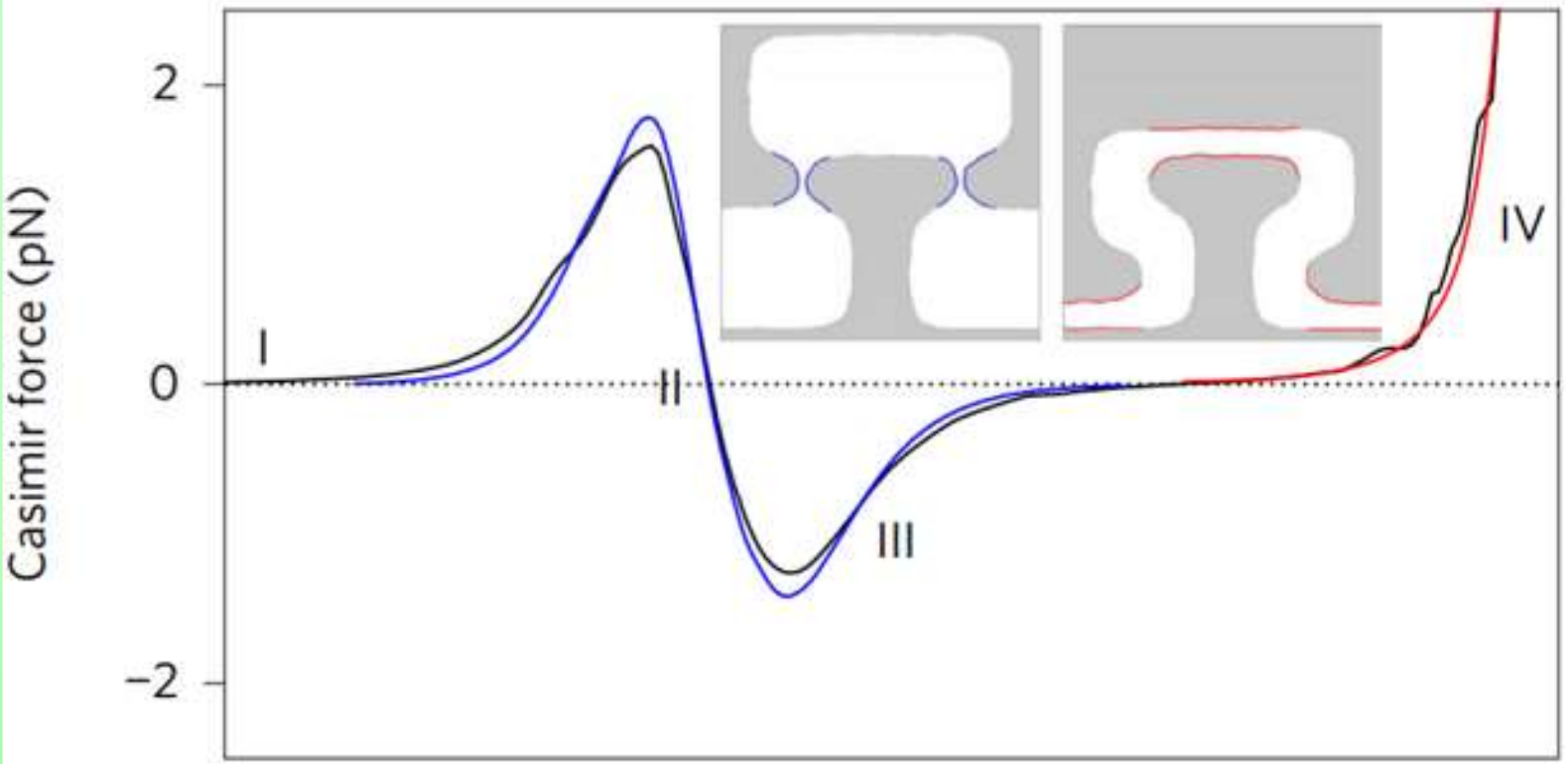
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots=\zeta(-3)=-\frac{B_4}{4}=\frac{1}{120}$$

$$\zeta(-n)=(-1)^n\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

$$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots=\zeta(-4)=\frac{B_5}{5}=0$$

$$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots=\zeta(-5)=-\frac{B_6}{6}=-\frac{1}{252}$$

$$\langle E\rangle=-\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{6a^3}\zeta(-3)=-\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{6a^3}*\frac{1}{120}=-\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{720a^3}$$

$$F=-\frac{d\langle E\rangle}{da}=-\frac{d}{da}\left(-\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{720a^3}\right)=\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{720}*\frac{da^{-3}}{da}=\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{720}*(-3)a^{-4}=-\frac{\pi^2\hbar c\sigma}{240a^4}\Rightarrow p=\frac{F}{\sigma}=-\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Экспериментальное обнаружение эффекта Казимира