

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА РЕЗОНАНСНОГО
ОБМЕНА ЭНЕРГИЕЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ
СОЛИТОНОВ

Научный руководитель
д.ф.-м.н.

_____ В. А. Гани

Студент

_____ А. С. Никифоров

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Теоретическая часть	3
1.1 Основные сведения о кинке	3
1.2 Явление резонансного обмена энергией	4
1.3 Постановка задачи о спектре возбуждений	4
1.4 Схема численного решения задачи о спектре возбуждений	5
2 Основная часть	6
2.1 Постановка задачи о столкновениях солитонов	6
2.2 Процедура минимизации	7
2.3 Спектр возбуждений кинк-антикинк столкновения	8
2.3.1 Явный вид потенциала $U(x)$ в модели φ^8	8
2.3.2 Дискретный и непрерывный спектры.	9
2.3.3 Полученный спектр	9
2.4 Постановка численного эксперимента	10
Заключение	11

ВВЕДЕНИЕ

Кинк представляет собой полевую конфигурацию, интерполирующую между двумя состояниями, отвечающими минимумам самодействия поля (потенциала теоретико-полевого модели). При этом кинк имеет наименьшую возможную энергию среди всех конфигураций, соединяющих эти два минимума [5].

Изучение механизма резонансного обмена энергией необходимо для объяснения резонансных явлений в столкновениях (рассеянии) кинков. В свою очередь резонансные явления необходимы для описания столкновения доменных стенок. Целью данной и последующих работ является объяснение причин резонансной природы столкновения солитонов в моделях высоких порядков.

Для достижения данной цели решались следующие задачи:

- Ознакомление с основной литературой, посвященной данной тематике;
- Постановка задачи о столкновении кинка и антикинка;
- Написание программы для численного решения поставленной задачи (учитывая процесс минимизации по параметру);
- Исследование спектра возбуждений системы кинк-антикинк φ^8 .

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Основные сведения о кинке

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, t)$, развитие которого описывается лагранжианом в пространстве $(\mathcal{D} = 1 + 1)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi), \quad \mu = 0, 1. \quad (1.1)$$

Где $V(\varphi)$ - потенциал системы, который достигает нуля в конечном числе точек. Из лагранжиана получим уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (1.2)$$

Для стационарного случая, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $\varphi(x, t) \equiv \varphi(x)$, получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{d\varphi}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \sqrt{2V(\varphi)}. \quad (1.4)$$

1.2 Явление резонансного обмена энергией

При столкновениях солитонов в основном реализуются два разных случая, в зависимости от их начальных скоростей v . Первый случай - при превышении некоторой критической скорости $v > v_{cr}$, солитоны сталкиваются, разлетаясь после этого на бесконечность. Второй - при скоростях ниже критической $v < v_{cr}$ солитоны сталкиваясь, образуют связанное состояние (бион), которое медленно распадается. Однако на практике при численном изучении столкновений был открыт еще один возможный способ взаимодействия, получивший название резонансного обмена энергией. При некоторых скоростях ниже критической возможен случай, когда столкнувшиеся солитоны после столкновения разлетятся на некоторое расстояние, после чего снова столкнутся. Таких повторных столкновений может быть произвольное конечное число раз, после чего они вновь разлетятся на бесконечность.

1.3 Постановка задачи о спектре возбуждений

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, t)$ как стационарное решение $\varphi_K(x)$ с малым возмущением $\delta\varphi(x, t)$, т.е.

$$\varphi(x, t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x, t), \quad \|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|. \quad (1.5)$$

Подставим это выражение в уравнение (1.2), получим:

$$\left. \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} \right|_{\varphi_k(x) + \delta\varphi} = 0. \quad (1.6)$$

Выполним разложение по степеням $\delta\varphi$ для $\frac{dV(\varphi_k + \delta\varphi)}{d\varphi}$, т.к. $\|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|$:

$$\frac{dV(\varphi_k + \delta\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{dV(\varphi_k)}{d\varphi} + \frac{d^2 V(\varphi_k)}{d\varphi^2} \cdot \delta\varphi, \quad \frac{dV(\varphi_k)}{d\varphi} = \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi_k(x)} \cdot \delta\varphi = 0. \quad (1.8)$$

Будем искать возмущение в форме:

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x) \cos(\omega t) \quad (1.9)$$

Тогда уравнение (8) примет вид: [4]

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right]_{\varphi_k(x)} \psi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad \psi(x) \in C^2, \psi(x) \in L^2 \quad (1.10)$$

Переобозначим

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} \bigg|_{\varphi_k(x)} = U(x) \quad (1.11)$$

и примем:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (1.12)$$

Рассмотрим случай нулевого собственного значения. Тогда возмущение примет вид:

$$\delta\varphi = \psi(x). \quad (1.13)$$

Очевидно, что в таком случае всегда будет соответствующая ему собственная функция:

$$\psi_0 = \frac{d\varphi_k}{dx}. \quad (1.14)$$

1.4 Схема численного решения задачи о спектре возбуждений

Численное решение задачи на собственные значения и собственные функции для уравнения Шредингера с произвольным потенциалом:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = \omega^2 \psi(x) \quad (1.15)$$

Преобразуем непрерывное пространство в дискретное. Зададим границы области, $x \in [-a, a]$ и разобьем пространство:

$$\begin{aligned} x_0 &= -a & , \\ x_1 &= -a + \Delta x & , \\ \dots & & , \\ x_{N-1} &= a & . \end{aligned}$$

Введем обозначение $f(x_i) = f_i$. Тогда:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0, \\ \dots &, \\ \psi_{N-1} &= 0.\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение Шредингера аппроксимируя вторую производную конечными разностями [3]:

$$\begin{cases} -\frac{\psi_{j+1}-2\psi_j+\psi_{j-1}}{\Delta x^2} + V_j\psi_j = \omega^2\psi_j + O(\Delta x^2), \\ j = 1, \dots, N-2 \end{cases} \quad (1.16)$$

Полученную систему уравнений перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + U_1 & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_2 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + U_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-2} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Для численного нахождения собственных значений и собственных функций полученной тридиагональной симметричной матрицы используем библиотеку LAPACK, а именно функцию `dstev()`.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1 Постановка задачи о столкновениях солитонов

Рассмотрим столкновение кинка и антикинка в модели φ^8 $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^4(1 - \varphi^2)^2$. Для этой модели кинк и антикинк задаются следующими уравнениями соответственно

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varphi_K}{1 - \varphi_K} - \frac{1}{\varphi_K} = x \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varphi_{\bar{K}}}{1 - \varphi_{\bar{K}}} - \frac{1}{\varphi_{\bar{K}}} = -x \quad (2.2)$$

В данной работе будет рассматриваться столкновение кинка и антикинка, соединяющих топологические сектора $(-1,0)$ и $(0,-1)$ соответственно.

Для решения уравнения движения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (2.3)$$

необходимо сконструировать начальные и граничные условия. Получим их из анзаца следующего вида

$$\varphi_s(x, t) = \varphi_K(\gamma(x + x_0 - vt)) + \varphi_{\bar{K}}(\gamma(x - x_0 + vt)) - \varphi_{vac}. \quad (2.4)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_K(\gamma(x + x_0)) - \varphi_{\bar{K}}(\gamma(x - x_0)) + \varphi_{vac} \quad (2.5)$$

$$\varphi_t(x, 0) = -v\gamma\varphi'_K((x + x_0)) + v\gamma\varphi'_{\bar{K}}((x - x_0)) \quad (2.6)$$

Граничные условия стандартно задаются как:

$$\varphi(\pm\infty, 0) = 0. \quad (2.7)$$

Однако такое задание начальных условий не является допустимым из-за перекрывающихся степенных асимптотик кинков ("хвостов"). Для решения этой проблемы был использован процесс минимизации начальных условий как было показано в работе[x].

2.2 Процедура минимизации

Для моделей с полиномиальными хвостами (в частности, в φ^8) стандартный суперпозиционный анзац вида $\varphi(x, 0) \approx \varphi_K(x + x_0) + \varphi_{\bar{K}}(x - x_0) - \varphi_{vac}$ порождает паразитные возбуждения уже при $t > 0$. Причина состоит в том, что хвосты уединённых решений спадают степенным образом и при любом разумном конечном x_0 существенно перекрываются. Поэтому начальная конфигурация не является (даже приближённо) решением стационарного уравнения движения, что приводит к "старту" с лишней радиацией и может качественно исказить картину столкновения.

Для получения правильного решения используется процедура минимизации, предложенная в [1]: в качестве начального приближения берётся *split-domain* анзац

$$\varphi_{init}(x) = [1 - H(x)] \varphi_{(-1,0)}(x + x_0) + H(x) \varphi_{(0,-1)}(x - x_0), \quad (2.8)$$

где $H(x)$ — функция Хэвисайда. Данный анзац правильно воспроизводит вакуумы слева и справа, но имеет излом в окрестности $x = 0$ (разрыв производной), поэтому далее он используется только как стартовое приближение в вариационной процедуре.

Ищется функция $\varphi(x)$, минимизирующая функционал:

$$I[\varphi] = \|(1 - v^2)D_2\varphi - V'(\varphi)\|_2^2 + C |\varphi(-x_0) - \tilde{\varphi}|^2 + C |\varphi(x_0) - \tilde{\varphi}|^2. \quad (2.9)$$

Здесь $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, $\tilde{\varphi} = \varphi(\pm x_0)$, а $C \gg 1$ — эмпирическая константа.

После нахождения минимизатора $\varphi(x, 0) = \varphi_{\min}(x)$ задаётся начальная скорость поля. Простейший выбор, согласованный со знаком скоростей кинка и антикинка, имеет вид

$$\varphi_t(x, 0) = v\gamma \operatorname{sgn}(x) \frac{d\varphi_{\min}}{dx}. \quad (2.10)$$

Этот выбор корректно задаёт противоположные направления движения, однако может создавать слабую “засечку” в φ_t в окрестности $x = 0$. При необходимости её можно дополнительно сгладить второй минимизацией по φ_t , см. [1].

2.3 Спектр возбуждений кинк-антикинк столкновения

При анализе резонансной структуры (окон многократных столкновений) важно понимать, куда переходит кинетическая энергия (нулевая мода) после первого удара и как затем возвращается обратно при повторном столкновении. В классической картине для модели φ^4 эту роль играет внутренняя мода одиночного кинка. Однако, как показано в работе [2] для модели φ^6 , резонансные окна могут существовать даже при отсутствии внутренней моды у одиночного кинка: энергия может временно переходить в локализованные моды малых колебаний вокруг составной конфигурации kink–antikink.

Зафиксируем (параметрически) расстояние между солитонами и рассмотрим квазистационарную конфигурацию kink-antikink, зависящую от параметра полуразделения $a > 0$ (центры солитонов в точках $x = \pm a$). Для выбранного топологического сектора $(-1, 0) + (0, -1)$ естественная суперпозиция широко разнесённых решений имеет вид

$$\varphi_s(x) \approx \varphi_{(-1,0)}(x + a) + \varphi_{(0,-1)}(x - a), \quad a \gg 1. \quad (2.11)$$

В практических вычислениях (особенно в моделях со степенными хвостами) вместо суперпозиции удобно использовать минимизированный профиль $\varphi_s(x)$, получаемый процедурой минимизации стационарного уравнения (см. предыдущий раздел).

2.3.1 Явный вид потенциала $U(x)$ в модели φ^8 .

В данной работе

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^4 (1 - \varphi^2)^2 = \frac{1}{2} (\varphi^4 - 2\varphi^6 + \varphi^8), \quad (2.12)$$

поэтому

$$V'(\varphi) = 2\varphi^3 - 6\varphi^5 + 4\varphi^7, \quad V''(\varphi) = 6\varphi^2 - 30\varphi^4 + 28\varphi^6. \quad (2.13)$$

Следовательно,

$$U(x) = 6\varphi_s^2(x) - 30\varphi_s^4(x) + 28\varphi_s^6(x). \quad (2.14)$$

2.3.2 Дискретный и непрерывный спектры.

При $x \rightarrow \pm\infty$ поле стремится к вакууму, соответствующему рассматриваемому сектору. Если внешние границы отвечают вакууму $\varphi_{\text{vac}} = -1$, то

$$U(\pm\infty) = V''(\varphi_{\text{vac}}) = V''(-1) = 4, \quad (2.15)$$

и непрерывный спектр начинается с порога $\omega^2 \geq 4$. Локализованные (связанные) моды, способные аккумулировать энергию в области взаимодействия, соответствуют собственным значениям

$$0 \leq \omega^2 < 4, \quad (2.16)$$

и имеют собственные функции, экспоненциально (или быстрее) убывающие при $|x| \rightarrow \infty$.

2.3.3 Полученный спектр

Результаты полученные для параметра $a = 15$. Потенциал выглядит следующим образом

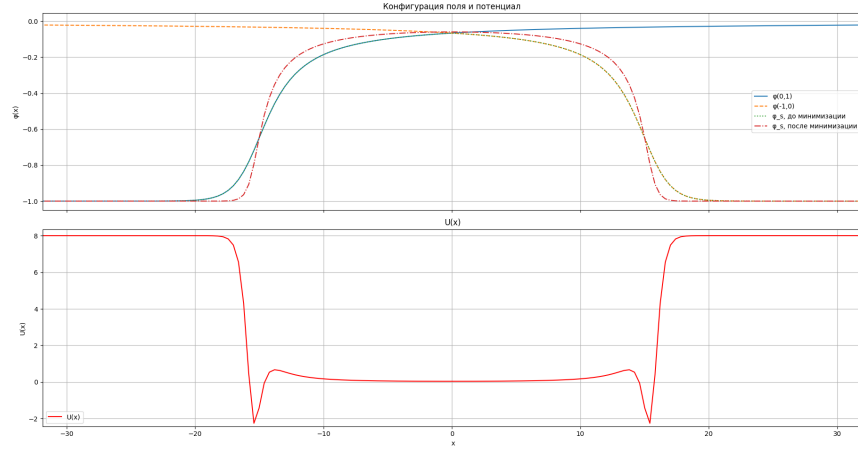


Рисунок 1 — График зависимости скалярного поля и потенциала от координаты

В результате численного эксперимента было получено 32 собственных значения, не превышающих верхнего предела. Приведем несколько первых собственных функций

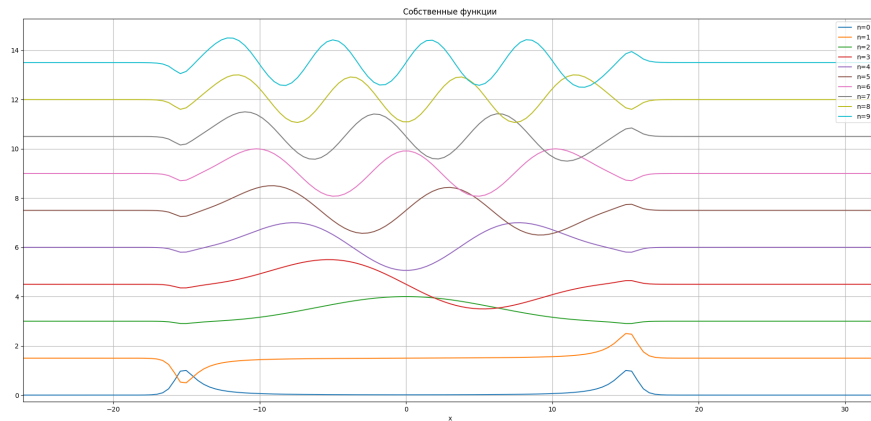


Рисунок 2 — График зависимости собственных функций от координаты

2.4 Постановка численного эксперимента

Динамика поля описывается уравнением

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V'(\varphi) = 0, \quad V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^4(1 - \varphi^2)^2. \quad (2.17)$$

Численное моделирование проводится на конечном интервале $x \in [-L, L]$ с граничными условиями, соответствующими выбранному топологическому сектору:

$$\varphi(-L, t) = \varphi(L, t) = -1, \quad (2.18)$$

Начальные условия $\varphi(x, 0)$ и $\varphi_t(x, 0)$ строятся по процедуре минимизации, описанной выше.

Пространственная производная аппроксимируется конечными разностями второго порядка на сетке $x_j = -L + j\Delta x$, $j = 0, \dots, N - 1$:

$$\varphi_{xx}(x_j, t^n) \approx \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.19)$$

По времени используется явная разностная схема:

$$\varphi_j^{n+1} = 2\varphi_j^n - \varphi_j^{n-1} + \Delta t^2 \left(\frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - V'(\varphi_j^n) \right). \quad (2.20)$$

Шаг по времени выбирается из условия устойчивости $\Delta t \leq \sigma \Delta x$, где $\sigma < 1$.

Для контроля корректности расчёта мониторится закон сохранения энергии:

$$E(t) = \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + V(\varphi) \right] dx, \quad (2.21)$$

а также величина поля в центре столкновения $\varphi(0, t)$. Времена последовательных столкновений определяются по локальным экстремумам $\varphi(0, t)$ (либо по минимумам расстояния между центрами кинка и антикинка).

Положение кинка $x_K(t)$ и антикинка $x_{\bar{K}}(t)$ удобно определять как уровень поля $\varphi(x, t) = \tilde{\varphi}$ (фиксированное значение между вакуумами), после чего расстояние между солитонами равно $R(t) = x_{\bar{K}}(t) - x_K(t)$. Финальный режим классифицируется как: (i) однократное рассеяние (один “удар”) при $v > v_{\text{cr}}$, (ii) захват с образованием биона, (iii) многоударные окна (two-bounce, three-bounce, ...), характеризующиеся числом столкновений до разлёта. Структура многоударных окон является аналогом наблюдаемой в других моделях [2, 1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о столкновениях кинка и антикинка в теоретико-полевой модели φ^8 с потенциалом $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^4(1 - \varphi^2)^2$. В теоретической части сформулированы основные сведения о кинках как топологических дефектах в $(1 + 1)$ -мерной модели, а также изложена идея резонансного обмена энергией при столкновениях солитонов, приводящая к существованию окон многократных столкновений при скоростях ниже критической.

Для интерпретации резонансных явлений поставлена и рассмотрена задача о спектре малых возмущений. Проведена линеаризация уравнения движения в окрестности стационарного решения и получена спектральная задача Шрёдингера с эффективным потенциалом $U(x) = V''(\varphi(x))$. Описана численная схема вычисления собственных значений и собственных функций методом конечных разностей с последующим нахождением спектра симметричной трёхдиагональной матрицы стандартными средствами LAPACK.

В основной части обоснована необходимость специального построения начальных условий для моделирования столкновения kink-antikink в модели φ^8 . Из-за степенного убывания хвостов уединённых решений прямая суперпозиция кинка и антикинка приводит к заметным паразитным возмущениям уже на ранних временах. Для подавления этих эффектов использована процедура минимизации начальной конфигурации, основанная на split-domain анзаце и минимизации невязки стационарного уравнения, что позволяет получить более корректный старт для динамических расчётов.

Кроме того, исследован спектр малых колебаний вокруг составной конфигурации kink-antikink при фиксированном расстоянии между солитонами. Для выбранного значения параметра полуразделения $a = 15$ построен эффективный потенциал $U(x)$ и численно получен набор дискретных собственных значений в диапазоне $\omega^2 < 4$, соответствующий локализованным модам ниже порога непрерывного спектра. Показаны примеры собственных функций низших уровней. Наличие локализованных мод составной конфигурации является важным элементом механизма резонансного обмена энергией, аналогичного обсуждаемому в литературе для моделей, где резонансные окна наблюдаются даже при отсутствии внутренней моды у одиночного кинка.

Полученные результаты формируют основу для дальнейшего этапа работы: систематического численного исследования столкновений при различных начальных скоростях, определения критической скорости, изучение положения окон многократных столкновений и сопоставления наблюдаемых частот с ветвями собственных мод $\omega(a)$, вычисляемых для составной конфигурации kink-antikink.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Ivan C. Christov и др. “Kink-antikink collisions and multi-bounce resonance windows in higher-order field theories”. В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 97 (2021), с. 105748. ISSN: 1007-5704. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421000599>.
- [2] Patrick Dorey и др. “Kink-Antikink Collisions in the ϕ^6 Model”. В: *Phys. Rev. Lett.* 107 (9 авг. 2011), с. 091602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.091602>.
- [3] J. Izaac и J. Wang. “Computational Quantum Mechanics (Part of the Undergraduate Lecture Notes in Physics book series)”. В: *Springer Nature Switzerland* (2018).
- [4] V. Lensky V. A. Gani и M. A. Lizunova. “Kink excitation spectra in the (1+1)- dimensional φ^8 model”. В: *Eur. Phys. J C* 78, 345 (2018).
- [5] Гани В. А. “Динамические и асимптотические свойства низкоразмерных топологических солитонов”. В: (2023).