

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
КИНКИ В КЛАССИЧЕСКИХ
СКАЛЯРНЫХ ДВУХПОЛЕВЫХ
МОДЕЛЯХ

Научный руководитель
д. ф.-м. н.

_____ В. А. Гани

Студент

_____ И. Н. Самощенко

Москва 2025

Содержание

1	Введение	3
2	Цели и задачи	4
3	Описание полевой модели	5
4	Геометрия орбит	7
5	Гармонические морфизмы	11
6	Получение дискретного набора вакуумов	16
7	Заключение	20
8	Список литературы	21

1 Введение

В конце 1960-х годов в квантовой теории поля появился новый подход, позволяющий из классических нелинейных уравнений поля получать решения, которые могут интерпретироваться как частицы соответствующей квантованной теории. Свойства этих частиц во многом определяются свойствами классических решений, среди которых простейшим является кинк. Кинк — это полевая конфигурация в пространстве-времени размерности $(1 + 1)$, интерполирующая между парой нулей потенциала, определяющего взаимодействие и самодействие полей. Он имеет стационарную, отличную от нуля и конечную энергию, поэтому является устойчивым и не может быть непрерывно деформирован в тривиальное решение.

В общем случае, возникающие в теории нелинейные уравнения являются уравнениями в частных производных второго порядка двух переменных, что значительно усложняет их решение. Даже в статическом случае, наличие двух и более полей делает задачу в общем виде неразрешимой. Поэтому, важным открытием в теории кинков стали уравнения Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (BPS), позволившие понизить порядок исходных уравнений при некоторых ограничениях на потенциал и энергию решения. Метод состоит в выражении исходного потенциала через градиент некоторой новой функцией, называемой суперпотенциалом. К сожалению, для одного потенциала могут существовать различные суперпотенциалы, что приводит к различным уравнениям BPS. Данное обстоятельство делает методы нахождения новых суперпотенциалов отдельной задачей, заслуживающей внимания.

Уравнения BPS оказываются удобны еще и тем, что орбиты им соответствующие обретают наглядный геометрический смысл, что также во многом упрощает решение и сводит задачу к алгебраической.

Кинковые решения могут быть легко вложены в пространство большей размерности $(1 + d)$, поэтому они могут быть применены в теориях с большим числом пространственных измерений.

Полезным для изучения космической инфляции является построение космологических моделей со скалярными полями. Теория космологической эволюции, основанная на скалярных полях, исследовалась в нескольких областях, охватывающих классический и квантовый уровни расширяющейся Вселенной.

Модели с одним скалярным полем применяются в квантовой теории

поля (модель ϕ^4) и для описания поведения кристаллических решеток (модель Синус-Гордона). Также, модели с $O(m)$ симметрией могут быть использованы для нахождения кинковых решений в моделях с большим числом полей.

Для двухполевых моделей, потенциал которых определяется гармоническим суперпотенциалом, отыскание и изучение орбит кинковых решений сводится к изучению гармонических функций и соответствующих им голоморфных функций (см. [2]). В двухполевых теориях с $U(1)$ симметрией одним из самых известных примеров является модель “мексиканской шляпы”, необходимой для описания механизма Хиггса. Двухполевые модели используются также в космологии для описания взаимодействия D-бран.

Модели с множеством вещественных скалярных полей также имеют множество приложений. Примером такой модели является модель Тоды, обладающая сложной классификацией и служащая обобщением некоторых известных моделей таких как Синус- и Шинус- Гордон. Данная модель интересна тем, что является интегрируемой и описывает солитонные решения.

2 Цели и задачи

Цель: Обобщение метода гармонических суперпотенциалов для двухполевых моделей на модели с большим числом полей. В соответствии с методом приводится пример четырехполевой модели, явно находятся кинковые решения в ней.

Задачи:

1. Описание геометрических свойств орбит
2. Рассмотрение гармонических суперпотенциалов двухполевых моделей, их симметрий и геометрических свойств
3. Обобщение свойств гармонических суперпотенциалов на большее число полей
4. Привести конструкцию многополевого суперпотенциала, привести пример с явно найденными кинками.

3 Описание полевой модели

Пусть $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ — поля, определенные в пространстве разности $(1 + 1)$ (одном пространственном, которое мы обозначим как $x \in \mathbb{R}$ и одном временном, $t \in [t_1, t_2]$), m — натуральное число. Пусть также $V = V(\phi)$ — неотрицательная функция с конечным или счетным числом нулей, называемая *потенциалом*. Множество нулей потенциала называется *вакуумами* (*истинными вакуумами*) модели, обозначать их мы будем как v с индексами. Динамика полей определяется функционалом действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dt \quad (1)$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left[\left(\frac{\partial \phi^s}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi^s}{\partial x} \right)^2 \right] - V(\phi). \quad (2)$$

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial^2 \phi^s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi^s} = 0. \quad (3)$$

Нас будут интересовать статические (т.е. не зависящие от времени) решения, для которых

$$\frac{d^2 \phi^s}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi^s}, \quad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = v_{\pm}, \quad (5)$$

где $v_- \neq v_+$, и с конечной энергией

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left(\frac{d\phi^s}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (6)$$

Такие решения уравнений движения называются *кинками*, обозначать их будем как $\phi_K = \phi_K(x)$. Заметим, что замена $x \mapsto -x$ в кинковом решении — также решение, называемое *антикинком*. Любые статические решения уравнений движения будем называть просто *решениями*.

Любое решение уравнений движения можно рассматривать как кривую в пространстве полей, задаваемую параметром x . Эту кривую мы будем называть *орбитой* решения. Любая пара различных вакуумов определяет гомотопический класс эквивалентности кривых с фиксированными концами, который мы будем называть *топологическим сектором*. Орбита всякого кинкового решения принадлежит своему топологическому сектору.

Заметим, что порядок уравнений движения можно понизить, выразив потенциал как

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi) \right)^2 \quad (7)$$

через новую функцию $W(\phi)$, называемую *суперпотенциалом*. После подстановки, выделим в функционале энергии полный квадрат:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left[\left(\frac{d\phi^s}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right)^2 \right] dx \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left[\left(\frac{d\phi^s}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right)^2 + 2 \frac{d\phi^s}{dx} \frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right] dx \quad (9)$$

$$= |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^m \left(\frac{d\phi^s}{dx} - \frac{\partial W}{\partial \phi^s} \right)^2 dx. \quad (10)$$

Первое слагаемое не влияет на экстремальность функционала энергии, оно зависит лишь от выбора топологического сектора. Таким образом, энергия экстремальна тогда, когда

$$\frac{d\phi^s}{dx}(x) = \frac{\partial W}{\partial \phi^s}(\phi(x)). \quad (11)$$

Данные уравнения называются *уравнениями Богомольного-Прасада-Зоммерфельда* или *BPS* (см., например, [1]), в дальнейшем мы сосредоточимся на их решении.

Заметим, что суперпотенциал определен неоднозначно. Действительно, выражение (7) является дифференциальным уравнением в частных производных на функцию $W(\phi)$ для заданного потенциала $V(\phi)$. Задача нахождения суперпотенциала по заданному потенциалу достаточно сложна, поэтому, обычно, мы будем начинать наши рассуждения, считая, что некоторый суперпотенциал (или несколько суперпотенциалов) нам заранее известны, и именно они определяют потенциал, в котором будут искаться кинковые решения.

4 Геометрия орбит

Пусть $F(\phi) = 0$ уравнение гладкой поверхности \mathcal{N} размерности $m - 1$ (т.е., параметризованной гладкими функциями от $m - 1$ вещественного параметра) в пространстве \mathbb{R}^m , причем орбита \mathcal{M} некоторого кинкового решения ϕ_K уравнений (11) принадлежит этой поверхности: $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Очевидно,

$$F(\phi_K(x)) = 0 \quad (12)$$

Откуда, дифференцированием по x получим:

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial F}{\partial \phi^s}(\phi_K(x)) \frac{d\phi_K^s}{dx}(x) = 0. \quad (13)$$

Подставляя уравнения BPS:

$$(\nabla F \nabla W)|_{\phi_K(x)} = 0. \quad (14)$$

Т.е. градиент функции F ортогонален градиенту функции W на орбите кинкового решения. Замечательно то, что верным оказывается и обратное: если дан m -полевой суперпотенциал W и функционально независимые функции F^s , $s = \overline{2, m}$ такие, что

1. Поверхности \mathcal{M}_s , определяемые уравнением $F^s = 0$ имеют размерность $m - 1$;
2. Пересечение поверхностей \mathcal{M}_s — есть некоторая кривая, которую мы обозначим как \mathcal{M} ;

3. $\nabla W \nabla F^s = 0$ — градиенты суперпотенциала и функций F^s ортогональны всюду;
4. Градиенты ∇F^s и частные производные W_s не равны тождественно нулю на кривой \mathcal{M} .

Тогда существует решение $\phi = \phi(x)$ уравнений BPS

$$\frac{d\phi^s}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi^s}, \quad (15)$$

причем его орбита есть кривая \mathcal{M} .

Утверждение следует из того, что уравнение

$$\nabla W \nabla F = 0 \quad (16)$$

на неизвестную функцию F имеет своими первыми интегралами функции F^s , для которых на кривой \mathcal{M} характеристическая система

$$\frac{d\phi^1}{W_1} = \dots = \frac{d\phi^m}{W_m}, \quad (17)$$

где $W_1 = \frac{\partial W}{\partial \phi^1}, \dots, W_m = \frac{\partial W}{\partial \phi^m}$, обращается в тождество.

Данное утверждение удобно тем, что дает критерий орбиты решения уравнений BPS без необходимости решать сами уравнения.

Пример 1. Пусть $\phi^1 = \phi, \phi^2 = \chi, W$ — суперпотенциал, определяющий потенциал V . Из уравнений BPS получим

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0. \quad (18)$$

Данное выражение есть полный дифференциал если W — гармоническая функция. Тогда сопряженная к W гармоническая функция M определяет уравнения орбит $M = C$, причем их градиенты ортогональны всюду и

$$\nabla W^2 = \nabla M^2 = 2V. \quad (19)$$

Неоднозначность выбора W для данного потенциала приводит к различным уравнениям BPS. Введем новую функцию w :

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где первая компонента определяет суперпотенциал, а вторая — уравнение орбиты. Пусть также $O \in O(2)$ — ортогональная матрица и

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{M} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Компоненты функции \tilde{w} обладают теми же свойствами, что и компоненты w , т.е. их градиенты ортогональны, а модули градиентов равны, что позволяет получить новые уравнения BPS и уравнение орбиты:

$$\frac{d\phi^s}{dx} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \phi^s}, \quad (22)$$

$$\widetilde{M} = C. \quad (23)$$

Зачастую, в приложениях известен не суперпотенциал, а потенциал V , для которого необходимо найти суперпотенциал. В случае гармонического суперпотенциала W , функция $\omega(z) = W + iM$, $z = \phi + i\chi$ голоморфна, следовательно $2V = |\omega'|^2$. Заметим, что $\ln 2V$ — вещественная часть комплексного логарифма, откуда получаем критерий гармоничности суперпотенциала для данного потенциала:

$$\Delta \ln V = 0 \quad (24)$$

В качестве примера выберем функцию

$$\omega = \frac{1}{3}z^3 - z, \quad (25)$$

или, что то же самое:

$$w = \begin{pmatrix} W \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\phi^3 - \phi\chi^2 - \phi \\ -\frac{1}{3}\chi^3 + \chi\phi^2 - \chi \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Потенциал V , определяемый компонентами W, M имеет пару вакуумов в точках $v_{\pm} = (\pm 1, 0)$. Фиксировав W в качестве суперпотенциала, нетрудно найти орбиту, чье уравнение $\chi = 0$ и кинковое решение для нее

$$\phi_K(x) = (\tanh x, 0). \quad (27)$$

Данный пример наглядно демонстрирует то, насколько упрощается задача, если вместо одного суперпотенциала известна функция

$$w = \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix}, \quad n \leq m, \quad (28)$$

компоненты которой обладают свойством

$$\nabla W^k \cdot \nabla W^s = 2V\delta^{ks}, \quad (29)$$

где δ^{ks} — символ Кронекера. Первую компоненту W^1 будем в дальнейшем выбирать в качестве суперпотенциала, тогда уравнения $W^s = C^s, s = \overline{2, n}$ определяют поверхности \mathcal{M}_s размерности $m - 1$, пересечению которых может принадлежать орбита решения. Аналогично двумерному случаю, действием ортогональных матриц $O \in O(n)$ можно получать новые функции

$$Ow = \tilde{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{W^1} \\ \vdots \\ \widetilde{W^n} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

компоненты которых также удовлетворяют свойству (29) для того же потенциала V , что дает нам параметрическое множество уравнений BPS и поверхностей, которым их решения могут принадлежать. Возможность получать новые уравнения BPS важна, т.к. один набор BPS не может дать всех решений. Убедиться в этом поможет следующий

Пример 2. Снова выберем функцию w из примера 1, однако, выберем в качестве суперпотенциала функцию M . Уравнения движения тогда орбеты вид

$$\frac{d\phi}{dx} = 2\phi\chi, \quad (31)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = -\chi^2 + \phi^2 - 1. \quad (32)$$

Но они несовместимы с решением $\phi_K(x)$. Действительно, подстановка $\chi = 0$ в первое уравнение даст $\frac{d\phi}{dx} = 0 \neq \frac{1}{\cosh^2 x}$, что опровергает наше предположение.

5 Гармонические морфизмы

Основная информация для этого раздела взята из магистерской диссертации Martin Svensson “Polynomial Harmonic Morphisms” [5] и книги Paul Baird и John C. Wood “Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds” [4]. Изложение в обоих трудах имеет достаточно абстрактный характер, отображения рассматриваются между римановыми многообразиями. Мы же ограничимся случаем конечномерных вещественных пространств с евклидовой метрикой, в соответствии с чем и построим дальнейшее изложение.

Свойство (29) естественным образом возникает при рассмотрении следующей задачи: какие условия необходимо наложить на компоненты вектор-функции m полей $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$, $\psi^s = \psi^s(\phi^1, \dots, \phi^m)$, $m \geq n$, чтобы для любой гармонической функции f от n переменных их композиция $f(\psi)$ вновь была гармонической? Очевидно,

$$0 = \Delta f(\psi) \quad (33)$$

$$= \sum_s \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \right) \quad (34)$$

$$= \sum_{s,k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s \quad (35)$$

$$= \sum_{s \neq k} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^s \partial \psi^k}(\psi) \cdot \nabla \psi^s \nabla \psi^k + \sum_s \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^{s^2}}(\psi) \cdot (\nabla \psi^s)^2 + \frac{\partial f}{\partial \psi^s}(\psi) \cdot \Delta \psi^s. \quad (36)$$

Выберем функцию $f = \phi^s$, тогда

$$\Delta \psi^s = 0. \quad (37)$$

Если же $f = \phi^s \phi^k$, $s \neq k$, то

$$\nabla \psi^s \nabla \psi^k = 0. \quad (38)$$

И, наконец, $f = (\phi^s)^2 - (\phi^k)^2$, $s \neq k$ для любых s, k даст

$$(\nabla \psi^s)^2 = (\nabla \psi^k)^2. \quad (39)$$

Отсюда получаем, что функция $f(\psi)$ гармоническая, если

$$\nabla\psi^s\nabla\psi^k = \lambda^2\delta^{sk}, \quad (40)$$

$$\Delta\psi^s = 0. \quad (41)$$

Такие отображения ψ называются *гармоническими морфизмами* за их свойство “оттягивать назад” свойство гармоничности функции f . Очевидно, в случае m -полевых моделей $\lambda^2 = 2V$, причем λ определена всюду. Для гармонических морфизмов, определенных на всем m -мерном пространстве полей доказан целый ряд полезных теорем, которые мы формулируем в качестве списка свойств:

1. Если $m = n \geq 3$, то гармонический морфизм $\psi = \alpha O\phi, \alpha > 0$ — ортогональное преобразование и гомотетия. (Следует из теоремы Лиувилля о конформных отображениях).

Данное утверждение говорит о невозможности получить полноценное обобщение случая двухполевой модели с гармоническим суперпотенциалом, где для каждого суперпотенциала W существовала сопряженная функция M такая, что уравнение $M = \text{const}$ определяло орбиты решения;

2. Если компоненты ψ — полиномы, обладающие свойством

$$\nabla\psi^s\nabla\psi^k = 2V\delta^{sk}, \quad (42)$$

то ψ — гармонический морфизм.

Это сводит изучение полиномиальных суперпотенциалов со свойством (29) к изучению гармонических морфизмов;

3. Если $n \geq 3$, то компоненты гармонического морфизма ψ — полиномы степени не выше $\frac{m-2}{n-2}$.

Это сводит изучение суперпотенциалов со свойством (29) к изучению гармонических морфизмов.

Таким образом, свойство (29) оказывается тесно связанным со свойством гармоничности суперпотенциала.

Прежде чем переходить к построению конкретных потенциалов, приведем несколько примеров отображений со свойством (29):

1. Все конформные отображения;
2. Из работы [3] известен $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{(\phi^2)^2 + (\phi^3)^2} \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{2}|\phi|^2)\phi^2 + \phi^1\phi^3\sqrt{2} \\ (1 - \frac{1}{2}|\phi|^2)\phi^3 + \phi^1\phi^2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\text{с } \lambda = \frac{1 + \frac{1}{2}|\phi|^2}{(\phi^2)^2 + (\phi^3)^2};$$

3. $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \ln |\phi| \\ \arctan \frac{\phi^3}{\sqrt{(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2}} \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\text{с } \lambda = \frac{1}{|\phi|}.$$

А также примеры гармонических морфизмов:

1. Голоморфные функции $\psi : \mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Отдельно выделим случай голоморфных функций при $m = 1$: $\psi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Примечателен этот случай тем, что размерности образа и прообраза совпадают и равны 2;
2. Линейные функции вида $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : \phi \mapsto \alpha O\phi, \alpha \in \mathbb{R}, O \in O(m)$;
3. Проекции $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : (\phi^1, \dots, \phi^m) \mapsto (\phi^1, \dots, \phi^n), n < m$;
4. $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

для которой $\lambda^2 = 4|\phi|^2$.

Пример 3. [Построение потенциала четырехполевой модели]

Пусть $m = 4, n = 2$ и $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ — поля.

Гармонические морфизмы $\psi = (a, b, c) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть полиномы степени не выше 2. Известный пример гармонического морфизма:

$$\psi = \begin{pmatrix} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 \\ 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Композиция гармонических морфизмов есть гармонический морфизм:

$$W = w(a, b) \quad (47)$$

Выберем теперь комплексный суперпотенциал, рассмотренный в примере 1: $\omega = \frac{1}{3}z^3 - z, z = a + ib$. Тогда

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a^3 - b^2a - a \\ -\frac{1}{3}b^3 + a^2b - b \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Положим потенциал V как $2V = \mu^2(a, b) \cdot \lambda^2$. Множество вакуумов включает точку $(0, 0, 0, 0)$ и две двумерные поверхности \mathcal{N}_\pm , каждую из которых определяет пара уравнений

$$\begin{cases} (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = \pm 1 \\ 2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4 = 0. \end{cases} \quad (49)$$

Действие группы $O(2)$ на W оставляет потенциал неизменным. Фиксируем $O \in O(2)$ и обозначим $OW = (W^1, W^2)$. Выберем W^1 в качестве суперпотенциала, тогда для любых $A, B \in \mathbb{R}$ уравнения

$$\begin{cases} W^2 = A \\ c = 2B \end{cases} \quad (50)$$

определяют двумерную поверхность, которой принадлежат орбиты решений (не обязательно кинковых) уравнений BPS.

Заметим, что гармонический морфизм $w = w(a, b)$ определяет уже рассмотренную модель из примера 1, для которого орбита определялась уравнением $b = 0$. Тогда, для нахождения кинковых решений выберем в качестве O матрицу поворота на угол, при котором поверхность \mathcal{M}^2 пересекает обе поверхности \mathcal{N}_\pm при $A = 0$. Проверка показывает, что это

угол 0. Заметим, что константа B ничем не фиксирована. Тогда супер-потенциал будет иметь вид

$$W^1 = ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2) \quad (51)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{3} ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 - (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4)^2 - 1 \right]. \quad (52)$$

Функции

$$W^2 = (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4) \quad (53)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{3} (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 \right], \quad (54)$$

$$c = 2\phi^1\phi^4 - 2\phi^2\phi^3 \quad (55)$$

определяют поверхность \mathcal{M}^2 , которой принадлежит орбита. Условие $A = 0$ упрощает уравнение $W^2 = 0$, разбивая его на пару

$$\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4 = 0 \quad (56)$$

$$\frac{1}{3} (2\phi^1\phi^3 + 2\phi^2\phi^4)^2 - ((\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2)^2 + 1 = 0 \quad (57)$$

Из этих двух уравнений только решения первого дадут топологические солитоны, поэтому воспользуемся им. Уравнение на \mathcal{M}^2 упростилось:

$$\begin{cases} \frac{b}{2} = \phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4 = 0 \\ \frac{c}{2} = \phi^1\phi^4 - \phi^2\phi^3 = B. \end{cases} \quad (58)$$

Очевидно,

$$\nabla W^1 = (a^2 - b^2 - 1) \nabla a - 2ab \nabla b \quad (59)$$

с учетом $b = 0$

$$\nabla W^1|_{b=0} = (a^2 - 1) \nabla a. \quad (60)$$

Т.е. для недостающего уравнения \mathcal{M} , функция F должна иметь градиент ортогональный ∇a почти всюду (чтобы не переопределить ситсему). Примером такой функции F является

$$F = F\left(\frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4}\right). \quad (61)$$

Итого, орбита \mathcal{M} определяется системой уравнений

$$\phi^1 \phi^3 + \phi^2 \phi^4 = 0, \quad (62)$$

$$\phi^1 \phi^4 - \phi^2 \phi^3 = B, \quad (63)$$

$$F = C. \quad (64)$$

Тогда уравнение орбиты можно дать параметрически

$$\mathcal{M} = \{(\alpha\beta\frac{1}{t}, \beta\frac{1}{t}, t, -\alpha t) \in \mathbb{R}^4 | t \in I \subset \mathbb{R}\}, \quad (65)$$

где I — множество значений ϕ^3 , а α, β — некоторые новые константы, находимые из условия $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}_{\pm} = v_{\pm}$, v_{\pm} — нули потенциала на соответствующих поверхностях. Вычисления дадут:

$$\phi_K^3 = \phi_K^3(x) = \pm \left\{ \sqrt{\gamma^2 + \beta^4} + \gamma \tanh \left[8x (\alpha^2 + 1)^2 \gamma \right] \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (66)$$

где $\gamma = \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^2} \sqrt{\beta^2(\alpha^2 + 1)^2 + \frac{1}{4}}$ Тогда решением будет

$$\phi_K = (\alpha\beta(\phi_K^3)^{-1}, \beta(\phi_K^3)^{-1}, \phi_K^3, -\alpha\phi_K^3). \quad (67)$$

6 Получение дискретного набора вакуумов

Приведем метод, позволяющий для данного потенциала получить новый потенциал с тем же набором решений.

Пусть V — m -полевой потенциал, v_{\pm} — нули потенциала, которым соответствует решение $\phi(x)$ уравнений движения $\phi_{xx} = \nabla V$, орбита $\phi(x)$ есть кривая \mathcal{M} . Пусть также F — неотрицательная функция, обращающаяся в ноль на орбите вместе со своими частными производными. Тогда можно рассмотреть новый потенциал

$$\tilde{V} = V + F, \quad (68)$$

имеющий ту же пару нулей v_{\pm} , и для которого уравнения движения обретут вид

$$\phi_{xx} = \nabla \tilde{V} \quad (69)$$

$$= \nabla V + \nabla F. \quad (70)$$

Подстановка решения $\phi(x)$ в них даст

$$\phi(x)_{xx} = \nabla V + (\nabla F)|_{\mathcal{M}} \quad (71)$$

$$= \phi(x)_{xx} + 0 \quad (72)$$

— верное тождество, т.е. $\phi(x)$ — решение уравнений движения для потенциала \tilde{V} .

Заметим, что при подобном построении потенциала \tilde{V} можно сохранить и более одного решения. Для этого нужно выбрать аналогичный набор функций F^1, \dots, F^n для каждого из n решений. Потенциал в таком случае будет иметь вид

$$\tilde{V} = V + F^1 \cdot \dots \cdot F^n. \quad (73)$$

Данный метод позволяет сохранять решения исходного потенциала, но не гарантирует отсутствия новых, в исходном потенциале не содержащихся.

Зачастую, в приложениях требуются потенциалы с дискретным набором нулей. Прибавление функции $F^1 \cdot \dots \cdot F^n$ позволяет из потенциала с поверхностью нулей выбрать необходимый набор из n решений и построить новый потенциал, среди решений которого будут все избранные.

Пример 4. Воспользуемся результатами из примера 3. Фиксируем две пары констант

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad (74)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 1, \quad (75)$$

для каждой из которых существует кинковое решение $\phi_K^{(1)}, \phi_K^{(2)}$ с орбита-

ми $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ с концами в вакуумах

$$v_{\pm}^1 = \left(\frac{1}{4} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10}}{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}, \right. \quad (76)$$

$$\left. \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{2} \frac{(19 \cdot 3 \pm 8\sqrt{41})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{10}} \right), \quad (77)$$

$$v_{\pm}^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \frac{\sqrt{5}}{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}, \right. \quad (78)$$

$$\left. \frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{5}}, -\frac{(33 \pm 4\sqrt{29})^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{5}} \right). \quad (79)$$

Размерность \mathcal{N}_{\pm} равна двум, т.е. для получения дискретных нулей по-

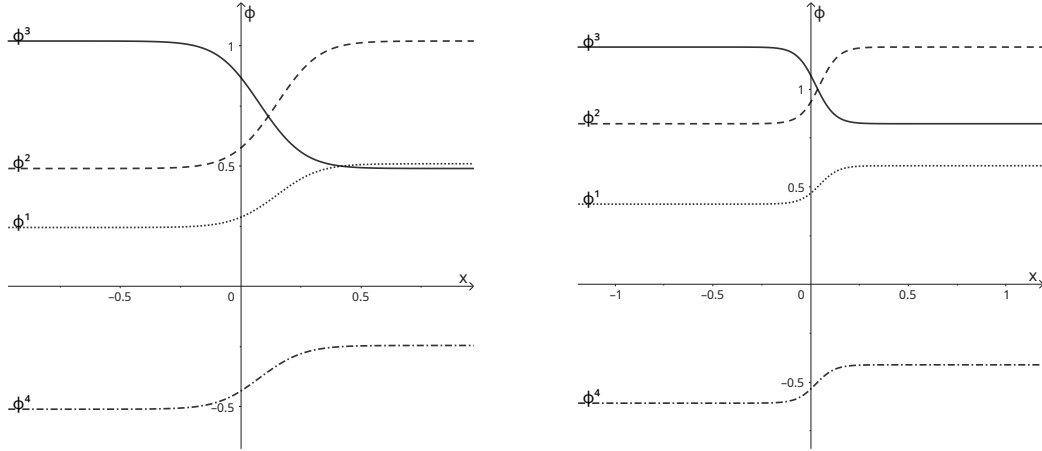


Рисунок 1 — Пара кинковых решений для констант $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (слева) и для $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ (справа). С левой стороны каждого графика подписаны компоненты кинка.

тенциала требуется найти еще две пары функций $F^s, G^s, s = 1, 2$ для каждой \mathcal{M}_s соответственно. Функция $F = F(\frac{\phi^1}{\phi^2}, \frac{\phi^3}{\phi^4})$ определяет орбиты

обоих решений. Пусть тогда $F = \frac{\phi^1}{\phi^2} + \frac{\phi^3}{\phi^4}$. Для каждого решения получим

$$F|_{\mathcal{M}_1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad (80)$$

$$F|_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}. \quad (81)$$

Т.е., орбиты решений удовлетворяют уравнениям $F = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. Для устранения сингулярностей домножим каждое из них на $\phi^2\phi^4$, получим функции F^1, F^2 :

$$F^1 = \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4, \quad (82)$$

$$F^2 = \phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4. \quad (83)$$

Для нахождения функций G^s , заметим, что для любых кинковых решений

$$\phi_K^1\phi_K^3 = \alpha\beta, \quad (84)$$

$$\phi_K^2\phi_K^4 = -\alpha\beta, \quad (85)$$

откуда

$$[\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4]_{\mathcal{M}_s} = 2\alpha_s\beta_s. \quad (86)$$

Таким образом:

$$G^1 = \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2}, \quad (87)$$

$$G^2 = \phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1. \quad (88)$$

Градиенты полученных функций F^s, G^s не обращаются в ноль на \mathcal{M}_s , однако, это можно исправить, возведя каждую из функций в квадрат. Тогда новый потенциал \tilde{V} может быть получен как

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= V + (F^1 F^2)^2 + (G^1 G^2)^2 \\ &= 2|\phi|^2 \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 - 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\}^2 \\ &\quad \cdot \left\{ [(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 - (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 + 1]^2 + 4[\phi^1\phi^3 + \phi^2\phi^4]^2 \right\}^2 \\ &\quad + \left[\phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{1}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \left[\phi^1\phi^4 + \phi^2\phi^3 + \frac{3}{2}\phi^2\phi^4 \right]^2 \\ &\quad + \left[\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - \frac{1}{2} \right]^2 [\phi^1\phi^3 - \phi^2\phi^4 - 1]^2 \end{aligned} \quad (89)$$

7 Заключение

В данной работе обобщен метод, позволяющий упростить нахождение кинковых решений в многополевых потенциалах. Метод основан на свойствах особого вида отображений — гармонических морфизмов. Геометрические свойства этих отображений схожи со свойствами сопряженных гармонических функций, что сводит задачу на поиск орбит к алгебраической или в значительной мере упрощает ее.

В дальнейшем планируется расширить множество допустимых суперпотенциалов, отказавшись от условия гармоничности, а также найти более сложные примеры.

8 Список литературы

Список литературы

- [1] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, R.F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method*, Modern Physics Letters A, vol. 17, no. 29 (2002), pp. 1945–1953, doi.org/10.1142/S0217732302008435.
- [2] A. Alonso Izquierdo, M.A. González León, J. Mateos Guilarte, *$N=2$ Supersymmetric Kinks and Real Algebraic Curves*, Physics Letters B, vol. 480, no. 3–4 (2000), pp. 373–380, [doi.org/10.1016/S0370-2693\(00\)00406-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00406-8).
- [3] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*, Ann. Glob. Anal. Geom. **34** (2008), 403–414.
DOI: [10.1007/s10455-008-9118-8](https://doi.org/10.1007/s10455-008-9118-8).
Received 25 January 2008; accepted 21 April 2008; published online 8 May 2008; issue date November 2008.
- [4] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs, New Series, vol. 29, Oxford University Press, 2003.
- [5] M. Svensson, *Polynomial harmonic morphisms*, Master’s dissertation, Lund University, 1998.
matematik.lu.se/.../Martin-Svensson-MSc.pdf.