

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
РАСЧЁТ КУМУЛЯТИВНЫХ СПЕКТРОВ
БЕТА-ЧАСТИЦ И АНТИНЕЙТРИНО
ПРОДУКТОВ ДЕЛЕНИЯ УРАНА И
ПЛУТОНИЯ МЕТОДОМ ПРЯМОГО
СУММИРОВАНИЯ

Научный руководитель
ассистент кафедры №40

Студент



Д. В. Попов



В. Н. Зайцев

Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Теоретическое обоснование модели	6
1.1 Расчет вероятности β -распада	6
1.2 Функция Ферми	7
1.3 Построение суммарного спектра изотопа	8
1.4 Построение кумулятивного спектра изотопа	10
1.5 Реконструирование позитронного спектра	10
2 Учет поправок к спектрам β-частиц и антинейтрино	13
2.1 Поправка на конечный размер дочернего ядра	13
2.2 Поправка на конечный размер родительского ядра	14
2.3 Радиационные поправки	15
2.4 Учет экранирования	16
2.5 Слабый магнетизм	17
2.6 «Эффект обмена»	17
2.7 Запаздывание перестройки электронной оболочки	18
2.8 Учет запрещенности переходов	19
2.9 Влияние поправок на форму спектров	21

3 Анализ полученных спектров	24
3.1 Сравнение с экспериментальными данными	24
3.2 Подгонка путем вариации кумулятивных выходов	26
Заключение	30
Список использованных источников	32

ВВЕДЕНИЕ

Основной теоретической моделью современной физики является Стандартная модель (СМ), описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Последним на данный момент значительным подтверждением СМ стало открытие бозона Хиггса на Большом адронном коллайдере в 2012 году, что завершило формирование современной СМ.

Тем не менее, предсказания этой теоретической модели имеют некоторых расхождения с экспериментальными наблюдениями. Например, согласно модели, нейтрино должны быть строго безмассовыми, в то время как верхняя экспериментальная оценка суммы масс всех типов нейтрино составляет порядка 0,28 эВ [1]. Эта и некоторые другие проблемы нуждаются в решении для расширения СМ.

Существование нейтрино было предложено Паули еще в 1930 году, чтобы решить актуальную на тот момент проблему несохранения энергии и углового момента при ядерном β -распаде. Однако открытия нейтрино как частицы пришлось ждать до 1953-1959 годов, когда Фредерик Райнес и Клайд Коуэн [2; 3] обнаружили электронное антинейтрино, испускаемое ядерным реактором. В реакторах в процессе их работы образуются β -радиоактивные изотопы, в результате распада которых эти частицы возникают в больших количествах. Этот фундаментальный эксперимент положил начало исследованию нейтрино с помощью реакторных антинейтрино.

В самом общем случае все источники нейтрино можно разделить на 3 группы:

- Космические нейтрино;
- Нейтрино от естественных источников на Земле, возникающие в процессах бета-распада радионуклидов;

- Нейтрино от искусственных источников, к ним относятся реакторные антинейтрино и ускорительные нейтрино.

В настоящий момент наиболее интенсивными источниками антинейтрино являются ядерные реакторы. Для реакторных антинейтрино характерны энергии до 10 МэВ [4]. Их полный спектр формируется из парциальных спектров от всех распадающихся изотопов. При этом в связи с несовпадением теоретических и экспериментальных данных одной из основных проблем является формирование точной модели для расчета спектров.

Существует два основных подхода к расчету спектров реакторных антинейтрино: метод конверсии и метод прямого суммирования (метод *ab initio* – «из первых принципов»).

Метод конверсии был сформулирован и впервые применен в работах [5; 6; 7]. В моделях такого типа для получения спектра антинейтрино используются спектры бета-частиц, измеренные путем облучения мишени ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu тепловыми нейтронами на реакторе Института Лауэ—Ланжевена (ILL, Франция) и мишени ^{238}U быстрыми нейтронами на реакторе Технического университета Мюнхена (MPI, Германия). Эти экспериментальные спектры делятся на некоторое количество виртуальных бета-переходов, парциальный спектр каждого из которых по отдельности конвертируется в парциальный спектр антинейтрино, после чего суммированием восстанавливаются изначальные кумулятивные антинейтриновые спектры. Наиболее известные модели конверсии описаны в работах [8; 9; 10]. Все эти работы объединяет очень большая зависимость от истинности экспериментальных значений, полученных на реакторах ILL и MPI. В связи с большим количеством замечаний по отношению к методике проведения эксперимента, невозможно однозначно утверждать об истинности полученных данных. Более того, для лучшего сходства моделей конверсии с другими экспериментами в них вводятся поправки на физические факторы, меняющие форму спектра, однако метод полагается на виртуальные переходы нефизической природы, что можно расценивать как

противоречие внутри модели. Вышеописанные факторы осложняют предсказания спектров антинейтрино в рамках метода конверсии.

Второй метод – метод прямого суммирования – заключается в поэтапном сложении вкладов нескольких тысяч бета-переходов от всех продуктов распада исследуемых изотопов с учетом всей физики процесса β -распада. Такой подход позволяет прецизионно расчитать спектры как одиночных переходов, так и кумулятивных спектров продуктов деления радиоизотопов, контролируя вклад каждого перехода и позволяя проводить расчет даже для тех изотопов, для которых нет измеренных спектров бета-частиц. На данный момент существует несколько *ab initio* моделей, наиболее известные из которых описаны в работах [11; 12; 13], однако ни в одной из них не был учтен полный набор факторов, которые могут повлиять на процесс бета-распада, что приводит к расхождению этих моделей с экспериментальными данными.

Таким образом, актуальной задачей является развитие новой теоретической *ab initio* модели для расчета спектров бета-частиц и антинейтрино.

Цель данной работы заключается в определении и развитии теоретической модели, по которой можно построить спектр бета-частиц и антинейтрино продуктов деления изотопов в активной зоне реактора методом прямого суммирования.

Задачи:

- Получить кумулятивные спектры бета-частиц и антинейтрино от основных изотопов, используемых как топливо для ядерных реакторов (^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu);
- Сравнить кумулятивные спектры с экспериментальными спектрами и другими существующими моделями;
- При несовпадении модельных спектров с экспериментальными путем вариации параметров попробовать устранить несоответствие.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ

1.1 Расчет вероятности β -распада

Общая формула β -распада ядра с зарядовым числом Z и массовым числом A имеет следующий вид:



В связи с тем, что взаимодействие в этом процессе достаточно слабое (гораздо слабее электромагнитного [14]), для расчета вероятности β -распада можно применять методы теории возмущений.

Согласно золотому правилу Ферми вероятность перехода системы из начального состояния $|i\rangle$ с энергией E_i в некоторое конечное состояние $|f\rangle$ с энергией E_f в единицу времени при условии $E_0 = E_f - E_i$ равна

$$dW_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 d\rho|_{E=E_0}, \quad (1.2)$$

где H' – гамильтониан малого возмущения, приводящего к переходу, а $d\rho$ – плотность конечных состояний на единицу энергии (статистический множитель).

Для β -распада в пренебрежении малой энергией отдачи ядра (~ 15 кэВ [15]) полная энергия распределяется между электроном и антинейтрино:

$$E_0 = E_e + E_{\bar{\nu}}. \quad (1.3)$$

Тогда статистический множитель можно представить в виде:

$$d\rho|_{E=E_0} = \left. \frac{d\tilde{N}}{dE} \right|_{E=E_0} = \frac{1}{dE} \frac{V d^3 \mathbf{p}_e V d^3 \mathbf{q}_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi\hbar)^3}, \quad (1.4)$$

где $Vd^3\mathbf{p}_e/(2\pi\hbar)^3$ – число состояний электрона для значений импульса в интервале от \mathbf{p}_e до $\mathbf{p}_e + d\mathbf{p}_e$, $Vd^3\mathbf{q}_{\bar{\nu}}/(2\pi\hbar)^3$ – число состояний антинейтрино для значений импульса в интервале от $\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$ до $\mathbf{q}_{\bar{\nu}} + d\mathbf{q}_{\bar{\nu}}$.

Представив дифференциалы в виде

$$d^3\mathbf{p}_e = p_e^2 dp_e d\Omega_e, \quad (1.5a)$$

$$d^3\mathbf{q}_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} d\Omega_{\bar{\nu}}, \quad (1.5b)$$

с учетом релятивистских соотношений, получим

$$p_e^2 dp_e = p_e E_e dE_e / c^2, \quad (1.6a)$$

$$q_{\bar{\nu}}^2 dq_{\bar{\nu}} = q_{\bar{\nu}} E_{\bar{\nu}} dE_{\bar{\nu}} / c^2. \quad (1.6b)$$

Подставляя полученные значения в (1.2) и интегрируя по углам для числа β - и $\bar{\nu}$ -частиц с энергией в интервале от E до $E + dE$ получим выражения:

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{E_e^2 - m^2 c^4} E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e, \quad (1.7a)$$

$$dW_{if} = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} |\langle f | H | i \rangle|^2 \sqrt{(E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 - m^2 c^4} (E_0 - E_{\bar{\nu}})^2 E_{\bar{\nu}}^2 dE_{\bar{\nu}}. \quad (1.7b)$$

1.2 Функция Ферми

Корректный расчет спектров β - и $\bar{\nu}$ -частиц невозможен без учета влияния поля ядра. Это обстоятельство приводит к тому, что в выражения для β - и $\bar{\nu}$ -спектров (1.7a, 1.7b) необходимо вводить множитель $F(Z, E)$, называемый функцией Ферми.

Функция Ферми $F(Z, E)$ описывает кулоновское взаимодействие точечного дочернего ядра с β -электроном. Формально она определяется как [15]

$$F(Z, E_e) = \frac{|\Psi_U|^2}{|\Psi_0|^2}, \quad (1.8)$$

где Ψ_U – решение уравнения Дирака в электрическом поле ядра, Ψ_0 – решение свободного уравнения Дирака.

Если принять дочернее ядро точечным, то можно записать функцию Ферми в явном виде [15]:

$$F_0(Z, E_e) = 2(\gamma + 1) \left(\frac{2p_e R}{\hbar c} \right)^{2(\gamma-1)} e^{(\frac{\pi\alpha Z E_e}{p_e})} \frac{|\Gamma(\gamma + \frac{i\alpha Z E_e}{p_e})|^2}{|\Gamma(2\gamma + 1)|^2}, \quad (1.9)$$

где $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, p_e – импульс электрона, E_e – полная энергия вылетевшего электрона, R – радиус родительского ядра, Z – заряд дочернего ядра, $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера комплексной переменной.

Тогда форма спектра электронов в результате β -распада с учетом выражения (1.7a) может быть представлена в следующем виде [16]:

$$S_e(E_e; E_0, Z) = K p_e E_e (E_0 - E_e)^2 F_0(Z, E_e) C(Z, E_e, E_0), \quad (1.10)$$

где K – нормировочный множитель, E_0 – энергия перехода, $C(Z, E_e, E_0)$ – фактор формы, включающий в себя ядерный матричный элемент гамильтониана возмущения H' между конечным и начальным состояниями. Для разрешенных β -переходов $C(Z, E_e, E_0) = 1$ [17].

Спектр антинейтрино $S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z)$ получается заменой E_e в формуле (1.10) на $E_0 - E_{\bar{\nu}}$:

$$S_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}; E_0, Z) = S_e(E_0 - E_{\bar{\nu}}; E_0, Z). \quad (1.11)$$

1.3 Построение суммарного спектра изотопа

При построении суммарного спектра бета-частиц и антинейтрино при β -распаде конкретного изотопа необходимо учитывать вероятностный характер самого распада. Для большинства изотопов характерно наличие большого количества возможных β -переходов с разной степенью запрета и разной

энергией перехода. Каждый такой переход может произойти с некоторой вероятностью, определяемой его матричным элементом.

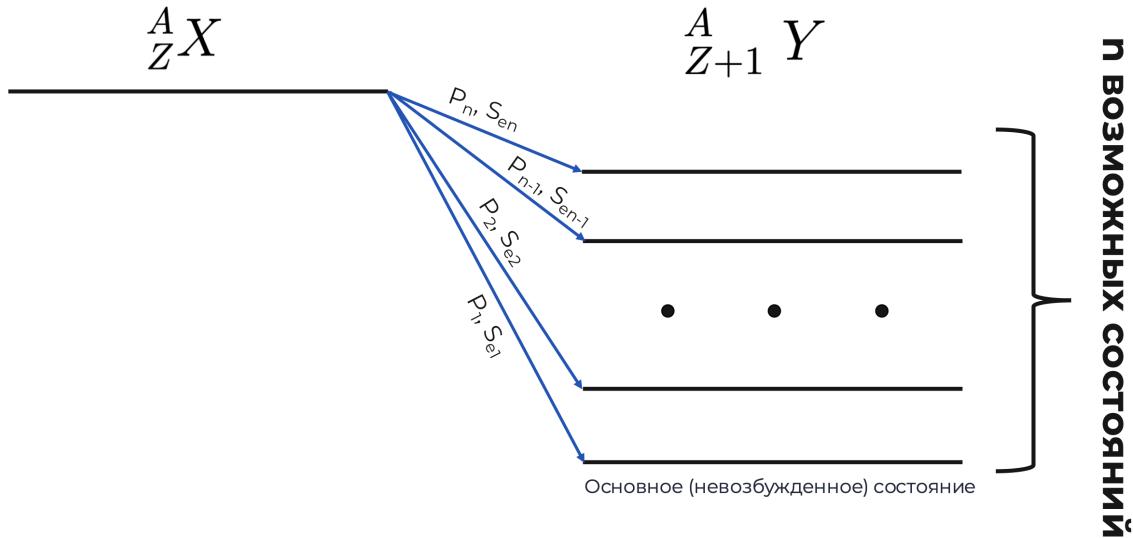


Рисунок 1 — Схема возможных β -переходов изотопа.

Для получения суммарного спектра необходимо просуммировать все одиночные спектры определенного изотопа с учетом вероятностей их реализации. При условии нормировки единичных спектров суммарный спектр также является отнормированным.

Таким образом, форму суммарных спектров бета-частиц и антинейтрино можно представить в следующем виде:

$$S_e^{iso} = \sum_{k=1}^n P_k S_{ek}, \quad (1.12)$$

$$S_{\bar{\nu}}^{iso} = \sum_{k=1}^n P_k S_{\bar{\nu}k}, \quad (1.13)$$

где n – количество возможных переходов, P_k – вероятность k -го перехода, S_{ek} и $S_{\bar{\nu}k}$ – одиночные спектры k -го перехода (1.10, 1.11).

1.4 Построение кумулятивного спектра изотопа

Для получения кумулятивного спектра продуктов деления изотопа необходимо просуммировать спектры всех возможных дочерних ядер с учетом их кумулятивных выходов. Кумулятивный выход подразумевает под собой суммарную вероятность того, что нужное дочернее ядро получится либо в результате непосредственно деления материнского ядра, либо как продукт деления одного из его осколков.

Представить форму кумулятивных спектров бета-частиц и антинейтрино можно в следующем виде:

$$S_e^{tot} = \sum_j CY(Z, A) S_{ej}^{iso}, \quad (1.14)$$

$$S_{\bar{\nu}}^{tot} = \sum_j CY(Z, A) S_{\bar{\nu}j}^{iso}, \quad (1.15)$$

где $CY(Z, A)$ — кумулятивный выход изотопа с зарядовым числом Z и массовым числом A , а суммирование проводится по всем продуктам распада.

1.5 Реконструирование позитронного спектра

С момента открытия в экспериментах на ядерном реакторе, детектирование антинейтрино осуществляется, в основном, по реакции обратного бета-распада (ОБР):



Позитронный спектр получается сверткой потока антинейтрино с дифференциальным сечением ОБР [18]:

$$\frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}) = \epsilon N_p \int_{E_{\bar{\nu}} \text{ min}}^{E_{\bar{\nu}} \text{ max}} \Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{\text{IBD}}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}, \quad (1.17)$$

где ϵ – эффективность регистрации, N_p – число протонов мишени, $\Phi_{\bar{\nu}}$ – поток реакторных антинейтрино, σ_{IBD} – сечение реакции ОБР.

Связь потока реакторных антинейтрино с кумулятивным спектром антинейтрино можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) = \frac{1}{4\pi L^2} \sum_i N_{fis}^{(i)} S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}), \quad (1.18)$$

где $N_{fis}^{(i)}$ – число делений i -го изотопа в реакторе в единицу времени, L – расстояние от детектора до реактора, $S_{\bar{\nu}i}^{tot}$ – кумулятивный спектр антинейтрино (1.15) i -го изотопа.

Число делений связано с тепловой мощностью реактора следующим образом:

$$P_{th} = \sum_i N_{fis}^{(i)} \varepsilon_i = N_{fis} \sum_i \alpha_i \varepsilon_i = N_{fis} \langle \varepsilon \rangle, \quad (1.19)$$

где N_{fis} – полное число делений в реакторе в единицу времени, α_i – доля делений i -го изотопа в смеси, ε_i – тепловая энергия, выделяемая при делении i -го изотопа, $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя тепловая энергия, выделяемая при одном делении в реакторе.

С учетом (1.19) можно переписать выражение (1.18) в более удобной форме:

$$\Phi_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) = \frac{P_{th}}{4\pi L^2 \langle \varepsilon \rangle} \sum_i \alpha_i S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}), \quad (1.20)$$

Тогда выражение для позитронного спектра можно привести к виду:

$$\frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}) = \frac{\epsilon N_p P_{th}}{4\pi L^2 \langle \varepsilon \rangle} \sum_i \alpha_i \int_{E_{\bar{\nu}} \text{ min}}^{E_{\bar{\nu}} \text{ max}} S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{IBD}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}, \quad (1.21)$$

Деление на множитель перед интегралом позволяет перейти к более универсальной форме спектра, не зависящей от характеристик эксперимен-

тальной установки и конкретного реактора-источника:

$$S_{e^+}(E_{e^+}) = \sum_i \alpha_i \int_{E_{\bar{\nu}} \text{ min}}^{E_{\bar{\nu}} \text{ max}} S_{\bar{\nu}i}^{tot}(E_{\bar{\nu}}) \cdot \frac{d\sigma_{IBD}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\bar{\nu}}) dE_{\bar{\nu}}. \quad (1.22)$$

Такое представление спектра наиболее удобно для анализа и сравнения с экспериментальными данными, при этом $S_{e^+}(E_{e^+})$ имеет размерность [$\text{см}^2 / (\text{деление}\cdot\text{МэВ})$].

Методы расчета дифференциального сечения ОБР представлены в работах [18; 19]. В системе покоя протона эта величина может быть выражена в явном виде:

$$\frac{d\sigma_{IBD}}{dE_{e^+}}(E_{e^+}, E_{\nu}) = 2m_p \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2\pi(s - m_p^2)^2} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.23)$$

при условии, что

$$E_{\bar{\nu}} \geq \frac{(m_n + m_e)^2 - m_p^2}{2m_p} \approx 1.806 \text{ МэВ}, \quad (1.24)$$

где G_F — постоянная Ферми слабого взаимодействия, V_{ud} — ud -элемент СКМ-матрицы смешивания, $s = (p_p^i + p_{\bar{\nu}}^i)^2 = 2m_p E_{\bar{\nu}}$ — мандельштамовская переменная, p^i — 4-импульс, m_p, m_n, m_e — массы протона, нейтрона и электрона соответственно. Явный вид функции \mathcal{M} представлен в работе [19].

Реконструирование позитронного спектра позволяет проводить сравнение теоретической модели с экспериментальными данными (эксперименты RENO [20], DayaBay [21], PROSPECT [21] и др.).

2. УЧЕТ ПОПРАВОК К СПЕКТРАМ β -ЧАСТИЦ И АНТИНЕЙТРИНО

Выражения (1.10) и (1.11) для формы спектров электронов и антинейтрино не учитывают всех тонкостей процесса β -распада и получены в грубом приближении с большим количеством упрощений. Для увеличения точности модели необходимо ввести к этим выражениям поправки, учитывающие те или иные физические факторы, влияющие на эти спектры. В целях соответствия литературе и упрощения вида формул все выводы и выражения, представленные в этой главе, приведены в рациональной системе единиц ($h = c = 1$).

2.1 Поправка на конечный размер дочернего ядра

Функция Ферми (1.9) была получена в приближении того, что дочернее ядро считается точечным. Если учесть конечный размер ядра, то решить уравнение Дирака и получить более точное выражение для функции Ферми аналитически невозможно. Для соответствия имеющейся функции $F_0(Z, E_e)$ в работе [22] рассматривается следующая модель: ядро представляется в виде шара с равномерно распределенным по нему зарядом, радиус R которого выбирается таким образом, чтобы получилось экспериментально правильное значение $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ для дочернего ядра. Численным решением уравнения Дирака в данной модели в той же работе было получено следующее выражение для функции $L_0(Z, E)$, являющейся поправкой к функции Ферми:

$$L_0(Z, E) = 1 + \frac{13}{60}(\alpha Z)^2 - \frac{\alpha ZER(41 - 26\gamma)}{[15(2\gamma - 1)]} - \frac{\alpha ZR\gamma(17 - 2\gamma)}{[30E(2\gamma - 1)]} + \\ + a_{-1} \frac{R}{E} + \sum_{n=0}^5 a_n (ER)^n + 0.41(R - 0.0164)(\alpha Z)^{4.5}, \quad (2.1)$$

где $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$, $a_n = \sum_{j=1}^6 b_{j,n}(\alpha Z)^j$, а значения коэффициентов $b_{j,n}$ для электронов даны в таблице (2.1).

Таблица 2.1 — Коэффициенты $b_{j,n}$ функции $L_0(Z, E)$ для электронов [22].

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_{-1}	0.115	-1.8123	8.2498	-11.223	-14.854	32.086
a_0	-0.00062	0.007165	0.01841	-0.53736	1.2691	-1.5467
a_1	0.02482	-0.5975	4.84199	-15.3374	23.9774	-12.6534
a_2	-0.14038	3.64953	-38.8143	172.1368	-346.708	288.7873
a_3	0.008152	-1.15664	49.9663	-273.711	657.6292	-603.7033
a_4	1.2145	-23.9931	149.9718	-471.2985	662.1909	-305.6804
a_5	-1.5632	33.4192	-255.1333	938.5297	-1641.2845	1095.358

2.2 Поправка на конечный размер родительского ядра

Поправка на конечный размер родительского ядра связана с неточечностью слабого взаимодействия и, соответственно, необходимостью учитывать конечность длин волн лептонов и распределение нуклонов внутри ядра. Явный вид такой поправки зависит от разрешенности и типа перехода. В случае разрешенных переходов гамов–теллеровского типа она представима в следующем виде [23]:

$$C(Z, E) \simeq 1 + C_0 + C_1 E + C_2 E^2 + C_{-1}/E, \quad (2.2)$$

где

$$C_0 = -\frac{1}{5}(E_0 R)^2 + \frac{4}{9}R^2 + \frac{2}{35}\alpha Z E_0 R - \frac{233}{630}(\alpha Z)^2 \quad (2.2a)$$

$$C_1 = \frac{4}{9}E_0 R^2 - \frac{4}{7}\alpha Z R \quad (2.2b)$$

$$C_2 = -\frac{4}{9}R^2 \quad (2.2c)$$

$$C_{-1} = -\frac{2}{45}E_0 R^2 - \frac{\alpha Z R}{70} \quad (2.2d)$$

2.3 Радиационные поправки

Радиационные поправки связаны с тем, что заряженные частицы, участвующие в процессе распада, неизбежно взаимодействуют с квантовым электромагнитным полем, испуская и поглощая как виртуальные фотоны (которые изменяют эффективные свойства частиц), так и реальные фотоны, что приводит к перераспределению энергии между продуктами распада и изменяет наблюдаемую форму спектра. Аналитический вид для функций $g(E, E_0)$ и $h(E, E_0)$, описывающих радиационные поправки к спектрам электронов и антинейтрино соответственно, был получен в работах [24], [25] и [26]:

$$g(E, E_0) = \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left[3 \ln m_p - \frac{3}{4} + \frac{4}{\beta} L_s \left(\frac{2\beta}{1+\beta} \right) + \right. \right. \\ + 4 \left(\frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left(\frac{E_0 - E}{3E} - \frac{3}{2} + \ln \left[\frac{2(E_0 - E)}{m_e} \right] \right) + \\ + \frac{\tanh^{-1} \beta}{\beta} \left(2(1 + \beta^2) + \frac{(E_0 - E)^2}{6E^2} - 4 \tanh^{-1} \beta \right) - \\ \left. \left. - 3 \ln \frac{m_p m_e}{2E_0} \right] \right\} \times \left\{ 1.026725 \left[1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{2E_0}{m_e} \right]^{\frac{9}{4}} \right\}, \quad (2.3)$$

$$h(E, E_0) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 3 \ln \left(\frac{m_p}{m_e} \right) + \frac{23}{4} + \right. \\ + \frac{8}{\hat{\beta}} L_s \left(\frac{2\hat{\beta}}{1+\hat{\beta}} + 8 \left(\frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} - 1 \right) \ln \left(\frac{2\hat{E}\hat{\beta}}{m_e} \right) \right) + \\ \left. + 4 \frac{\tanh^{-1} \hat{\beta}}{\hat{\beta}} \left[\frac{7 + 3\hat{\beta}^2}{8} - 2 \tanh^{-1} \hat{\beta} \right] \right\}, \quad (2.4)$$

где $\hat{E} = E_0 - E_\nu$, $\hat{\beta} = \frac{\hat{p}}{\hat{E}}$, $\hat{p} = \sqrt{\hat{E}^2 - m_e^2}$, а $L_s(x)$ – функция Спенса, также известная как дилогарифм:

$$L_s(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\text{Li}_2(x). \quad (2.5)$$

2.4 Учет экранирования

Рассматривая процесс β -распада, необходимо учитывать влияние электронной оболочки атома на процесс испускания электронов, возникающее из-за кулоновского взаимодействия между бета-частицей и электронами атомной оболочки, которые частично экранируют ядерный заряд, ослабляя притяжение между ядром и вылетающим бета-электроном. Это приводит к изменению формы бета-спектра, в особенности в низкоэнергетической области.

Существует большое количество моделей потенциала экранирования, однако основные модели согласуются между собой в пределах нескольких процентов [23]. В настоящей работе используется относительно простая модель, полученная в работе [27]:

$$S(Z, E) = \begin{cases} \frac{\bar{E}}{E} \left(\frac{\bar{p}}{p} \right)^{(2\gamma-1)} e^{\pi(\bar{y}-y) \frac{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}{|\Gamma(\gamma+iy)|^2}}, & \bar{E} > m_e; \\ 1, & \bar{E} < m_e, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\bar{E} = E - V_0$, $\bar{p} = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}$, $y = \frac{\alpha Z E}{p}$, $\bar{y} = \frac{\alpha Z \bar{E}}{\bar{p}}$, а V_0 – потенциал экранирования, заданный в виде:

$$V_0 = \alpha^2 (Z-1)^{\frac{4}{3}} N(Z-1). \quad (2.7)$$

В этом выражении $N(Z)$ – дискретная функция для параметризации, заданная как линейная интерполяция значений из таблицы (2.2).

Таблица 2.2 – Точки функции $N(Z)$ для параметризации поправки на учет экранирования [27].

Z	1	8	13	16	23	27	29	49	84	92
$N(Z)$	1.000	1.420	1.484	1.497	1.520	1.544	1.561	1.637	1.838	1.907

2.5 Слабый магнетизм

Поправка на слабый магнетизм вызвана интерференцией между вкладом гамов-теллеровского механизма и вкладом, обусловленным разностью электромагнитных форм-факторов нуклонов, в слабое взаимодействие, что эффективно можно воспринимать, как взаимодействие магнитного момента ядра и β -частицы. В случае разрешенных переходов гамма-теллеровского типа выражение для этой поправки представимо в следующем виде [28]:

$$\mathcal{W}(E, E_0) = 1 + \delta_{WM} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_N g_A} (E_e \beta^2 - (E_0 - E)), \quad (2.8)$$

где M_N – атомная единица массы (масса нуклона), μ_ν – изовекторный магнитный момент нуклона, g_A – постоянная аксиально-векторного взаимодействия.

2.6 «Эффект обмена»

Неортогональность волновых функций атомов в начальном и конечном состояниях при β -распаде допускает дополнительные косвенные процессы, посредством которых могут испускаться электроны. В случае «эффекта обмена» эта неортогональность оставляет возможность испускания β -частицы непосредственно в связанное состояние дочернего атома, тем самым вытесняя первоначально связанный с этим атомом электрон.

Экспериментально невозможно отличить этот непрямой процесс от обычного β -распада, поэтому вводится дополнительная коррекция для экспериментально полученных спектров. В теоретической модели, в свою очередь, необходимо учесть обратную коррекцию для лучшего сходства с экспериментальными данными.

В настоящей работе для учета этого эффекта используется эмпирическая формула, полученная в работе [23]:

$$X(Z, E) \approx 1 + a/W' + b/W'^2 + c \cdot \exp(-dW') + e \cdot \sin[(W - f)^g + h]/W^i, \quad (2.9)$$

где $W' = W - 1$, $W = \frac{E}{m_e}$, а параметры (a, b, \dots, i) протабулированы для каждого значения Z и представлены в приложении к работе [23].

2.7 Запаздывание перестройки электронной оболочки

«Атомная несогласованность» (в англоязычной литературе – «Atomic mismatch») – это эффект, возникающий при β -распаде, когда внезапное изменение заряда ядра происходит гораздо быстрее, чем электронная оболочка атома успевает перестроиться в новое основное состояние, что приводит к тому, что атом оказывается в возбуждённом состоянии с электронной конфигурацией, ещё соответствующей исходному ядру. Это временное несоответствие между изменением заряда ядра и перераспределением электронов затем компенсируется через процессы перестройки оболочки – внутренней конверсией, испусканием Оже-электронов или рентгеновского излучения – что влияет на полную энергию, выделяющуюся при распаде.

Аналитическое выражение для учета описанного эффекта было получено в работе [29]:

$$r(Z, E, E_0) = 1 - \frac{2}{E_0 - E} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} B(Z) + 2(C_0 + C_1) \right), \quad (2.10)$$

где C_0 и C_1 – поправочные коэффициенты, подробно описанные в работе [29], а $B(Z)$ – энергия связи для нейтрального атома с $(Z + 1)$ протонами.

Вторая производная, входящая в выражение (2.10), может быть параметризована как функция от параметра Z [30]:

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} B(Z) = 44.200Z^{0.41} + 2.3196 \cdot 10^{-7} Z^{4.45} \text{ [эВ].} \quad (2.11)$$

2.8 Учет запрещенности переходов

Запрещёнными называют β -переходы, при которых в силу значительного различия начального и конечного ядерных состояний (изменение спина $\Delta J \geq 2$ или противоположная чётность $\pi = -1$) лептонная пара вынуждена уносить с собой ненулевой орбитальный угловой момент ($L \geq 1$). В таком случае в разложении полного матричного элемента перехода доминируют высшие мультипольные компоненты, причем они подавлены пропорционально $(pR)^{2L}$. Такие переходы классифицируются по степени запрета L и делятся на уникальные (с одним доминирующим ядерным матричным элементом) и неуникальные (со сложной интерференцией ядерных матричных элементов). Каждой степени и типу запрета соответствует свой набор требований к изменению спина и чётности ядра, а также характерная форма энергетического спектра испускаемых электронов.

В настоящей работе был проведен анализ отношения вкладов переходов различных типов и степеней запрещенности в кумулятивные спектры исследуемых изотопов. Полученные относительные вклады приведены в таблице (2.3). Тип «A» соответствует разрешенным переходам, тип «S» – суперразрешенным переходам (с изменением спин-четности $0^+ \rightarrow 0^+$), типы «XU» и «XNU» – переходам уникального и неуникального типа соответственно со степенью запрещенности X.

Таблица 2.3 – Относительные вклады различных типов переходов в кумулятивные спектры исследуемых изотопов.

	A	1U	1NU	2U	2NU	3U
^{235}U	40.16%	12.69%	27.67%	0.07%	3.79%	<0.01%
^{238}U	43.77%	8.87%	24.88%	0.07%	3.57%	<0.01%
^{239}Pu	48.06%	8.50%	23.51%	0.07%	4.38%	<0.01%
^{241}Pu	47.82%	7.09%	23.52%	0.07%	3.72%	<0.01%

	3NU	4U	4NU	5NU	S	Неизвестный тип
^{235}U	0.47%	<0.01%	0.01%	0.03%	<0.01%	15.09%
^{238}U	0.29%	<0.01%	0.02%	0.06%	<0.01%	18.46%
^{239}Pu	0.20%	<0.01%	0.03%	0.02%	<0.01%	15.22%
^{241}Pu	0.15%	<0.01%	0.04%	0.03%	0.01%	17.55%

Из полученных данных можно сделать вывод, что нельзя пренебрегать учетом специфики формы переходов первой степени запрета. Однако, в силу относительной малости различия между спектрами разрешенных и запрещенных переходов [11] и малости суммарного вклада в кумулятивный спектр (<5%), можно пренебречь отдельным учетом переходов старших степеней запрета, так как изменение кумулятивного спектра составит менее 0.5%.

Выражения для фактора формы и поправок на слабый магнетизм для разрешенных переходов и переходов первой степени запрета описаны в работе [31]:

$$\text{Allowed } (\Delta J^\pi = 1^+) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = 1 \\ \delta_{WM} = \frac{2}{3} \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_N g_A} (E_e \beta^2 - (E_0 - E)) \end{cases} \quad (2.12a)$$

$$1^{\text{st}} \text{ Unique } (\Delta J^\pi = 2^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} \left(E_\nu^2 + p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} \right) \\ \delta_{WM} = \frac{3}{5} \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_N g_A} \frac{(E_e \beta^2 - E_\nu)(p_e^2 + E_\nu^2) + 2\beta^2 E_e E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_e^2 + E_\nu^2} \end{cases} \quad (2.12b)$$

$$1^{\text{st}} \text{ NonUnique } (\Delta J^\pi = 0^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} \left(E_\nu^2 + p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + 2p_e E_\nu \tilde{F}_{sp_{1/2}} \right) \\ \delta_{WM} = 0 \end{cases} \quad (2.12c)$$

$$1^{\text{st}} \text{ NonUnique } (\Delta J^\pi = 1^-) : \begin{cases} C(E, E_\nu) = \frac{R^2}{9} \left(E_\nu^2 + \frac{2}{3} p_e^2 \tilde{F}_{p_{1/2}} + \frac{1}{3} p_e^2 \tilde{F}_{p_{3/2}} - \frac{4}{3} E_\nu p_e \tilde{F}_{sp_{1/2}} \right) \\ \delta_{WM} = \frac{\mu_\nu - 1/2}{M_N g_A} \frac{(E_e \beta^2 - E_\nu)(p_e^2 + E_\nu^2) + 2\beta^2 E_e E_\nu (E_\nu - E_e)/3}{p_e^2 + E_\nu^2 - 4\beta^2 E_\nu E_e/3} \end{cases} \quad (2.12d)$$

Функции $\tilde{F}_{p_{3/2}}$, $\tilde{F}_{p_{1/2}}$, $\tilde{F}_{sp_{1/2}}$ в приведенных выражениях – Ферми-подобные функции, определенные следующим образом [31]:

$$\tilde{F}_{p_{3/2}}(E_e, Z) \simeq F_1(E, Z)/F_0(E, Z), \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{p_{1/2}}(E_e, Z, R) \simeq & \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_e R}{3} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{2m_e^2 R}{3E_e} \left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right) \right] / j_1^2(p_e R), \end{aligned} \quad (2.13b)$$

$$\tilde{F}_{sp_{1/2}}(E_e, Z, R) \simeq \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} + \frac{E_e R}{3} \right) - \frac{m_e^2 R}{3E_e} \right] / (j_0(p_e R) j_1(p_e R)), \quad (2.13c)$$

где $j_0(x)$, $j_1(x)$ – сферические функции Бесселя, а F_0 и F_1 – функции Ферми нулевого и первого порядка, описанные в работе [32].

2.9 Влияние поправок на форму спектров

Вклад каждой из описанных в настоящей главе поправок приведен в таблице 2.4 и проиллюстрирован на рисунках 2 и 3. Как можно видеть, вклад поправок в мягкой области составляет порядка 10% для бета-спектра и порядка 5% для спектра антинейтрино. В жесткой области вклады составляют порядка 15% и 6% соответственно.

Влияние уровня и типа запрещенности переходов на одиночный спектр проиллюстрировано на рисунке 4. Наиболее сильно от разрешенных переходов отличаются переходы неуникального типа первой степени запрета с изменением спин-четности 1^- . Переходы того же типа с изменением спин-четности 0^- , в свою очередь, наиболее близки к разрешенным и отличаются от них менее чем на 0.1%.

Таблица 2.4 — Сводная таблица используемых в настоящей работе поправок к спектрам β -частиц и антинейтрино

Обозначение	Учитываемый физический фактор	Вклад в спектр	Формула
$L_0(Z, E)$	Поправка на конечный размер дочернего ядра	$\approx 4\%$	2.1
$C(Z, E)$	Поправка на конечный размер родительского ядра	$\approx 2.5\%$	2.2
$g(E, E_0)$	Радиационные поправки (β)	$\approx 6\% (\beta)$	2.3
$h(E, E_0)$	Радиационные поправки ($\bar{\nu}$)	$\approx 1\% (\bar{\nu})$	2.4
$S(Z, E)$	Учет экранирования	$\approx 2.5\%$	2.6
$\mathcal{W}(E, E_0)$	Слабый магнетизм	$\approx 2\%$	2.8
$X(Z, E)$	«Эффект обмена»	$\approx 2.5\%$	2.9
$r(Z, E, E_0)$	Запаздывание перестройки электронной оболочки	$\approx 2\%$	2.10

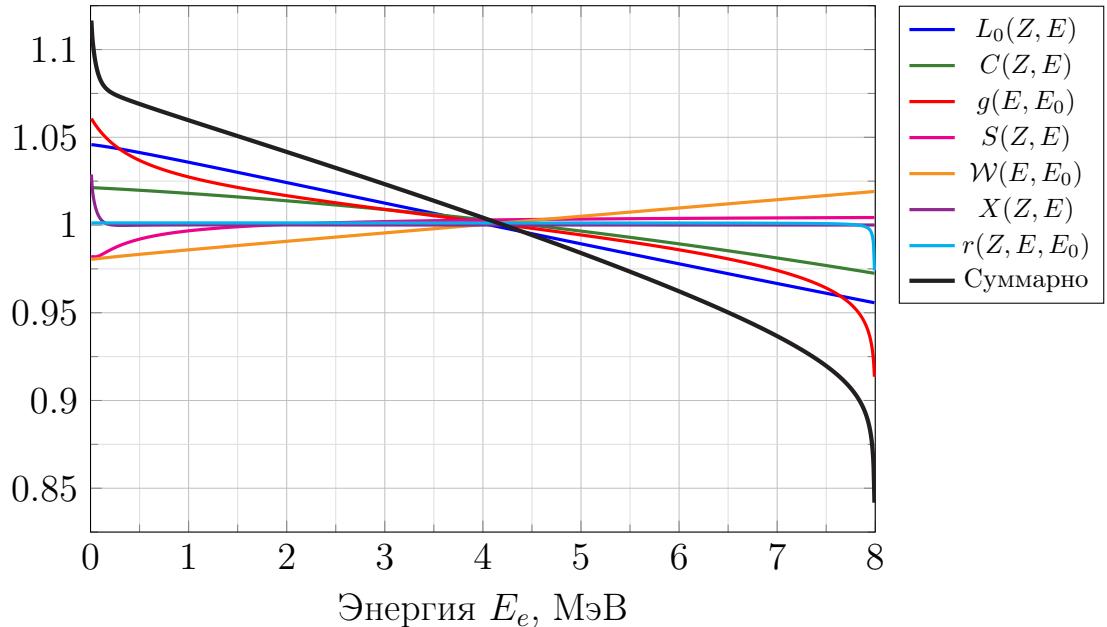


Рисунок 2 — Вклад поправок в форму одиночного синтетического бета-спектра ($Z=46$, $E_0 - m_e = 8$ МэВ, переход полагается разрешенным)

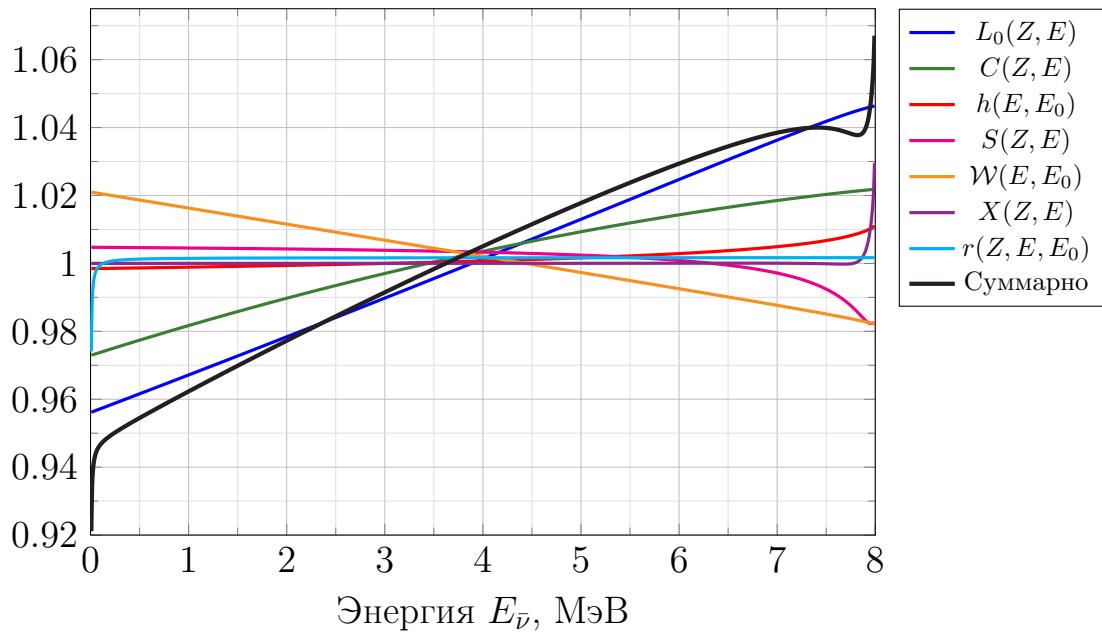


Рисунок 3 — Вклад поправок в форму одиночного синтетического спектра антинейтрино ($Z=46$, $E_0 - m_e = 8$ МэВ, переход полагается разрешенным)

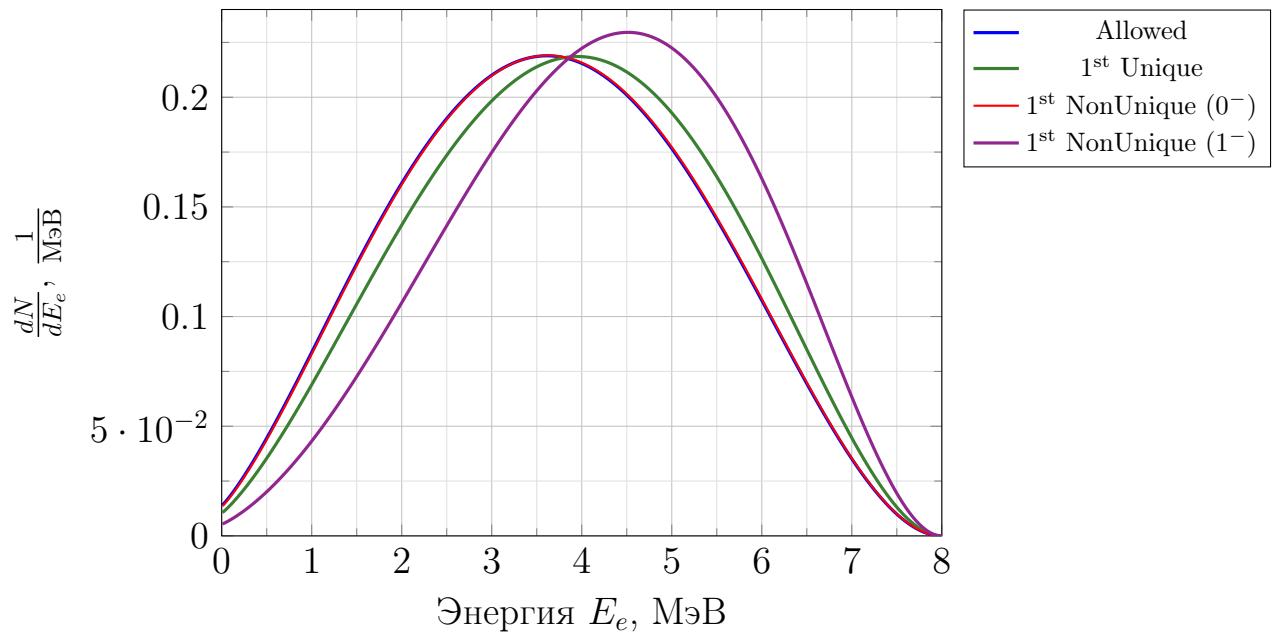


Рисунок 4 — Влияние степени и типа запрещенности на одиночный синтетический бета-спектр ($Z=46$, $E_0 - m_e = 8$ МэВ)

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ СПЕКТРОВ

3.1 Сравнение с экспериментальными данными

В настоящей работе все необходимые для расчета модельных спектров экспериментально полученные данные (вероятности в схемах переходов, кумулятивные выходы) брались из библиотеки ядерных экспериментальных данных ENDF (Evaluated Nuclear Data File) версии B-VIII.1 и из библиотеки ядерных баз данных ENSDF (Nuclear Data Services).

На данный момент были получены:

- Кумулятивные спектры бета-частиц и антинейтрино продуктов деления ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{241}Pu ;
- Модельные позитронные спектры вышеперечисленных изотопов.

Для проверки модели было проведено сравнение полученных в работе позитронных спектров с экспериментально полученными в работах [20; 21] значениями (рис. 5, 6). На тех же рисунках приведено сравнение с другой существующей моделью BESTIOLE (Beta Energy Spectrum Tool for an Improved Optimal List of Elements)[11]. Данная модель была выбрана для сравнения по следующим причинам:

- Данная модель, как и модель в настоящей работе, построена на методе прямого суммирования;
- Другие модели, построенные на этом методе, позволяют расчитывать меньшее количество точек спектра, в связи с чем теряется точность;
- Данная модель является одной из самых последних на момент написания настоящей работы.

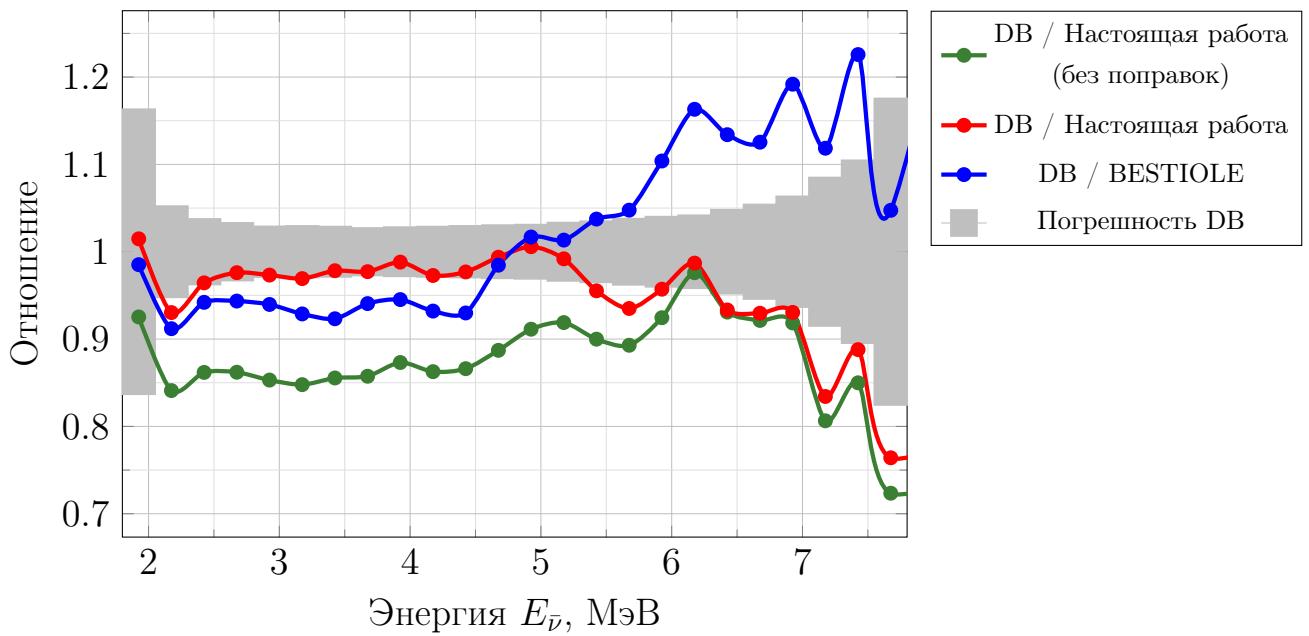


Рисунок 5 — Отношение экспериментального позитронного спектра от деления ^{235}U к модельным позитронным спектрам.

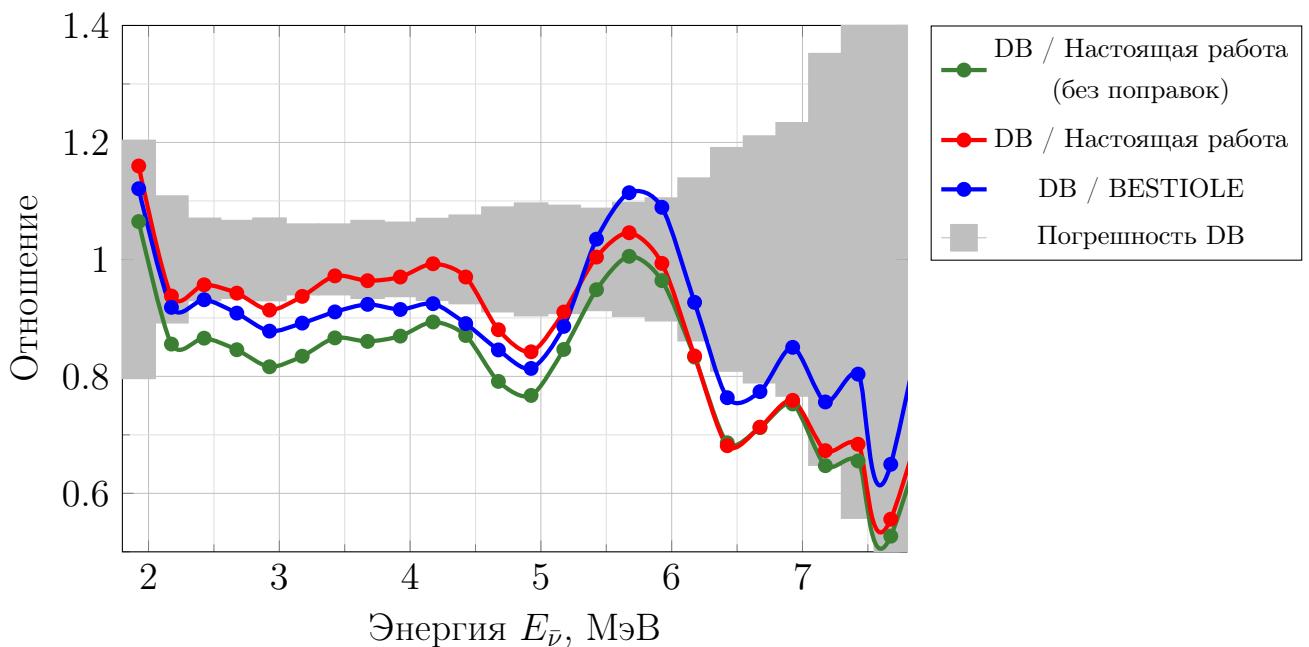


Рисунок 6 — Отношение экспериментального позитронного спектра от деления ^{239}Ru к модельным позитронным спектрам.

3.2 Подгонка путем вариации кумулятивных выходов

В связи с имеющимся расхождением модельных и экспериментальных позитронных спектров была предпринята попытка подгонки спектра варьированием кумулятивных выходов изотопов в пределах их погрешностей с минимизацией функции отклонения, учитывающей нормальный характер распределения значений в пределах ошибок. Функция отклонения χ^2 была выбрана следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_E \left(\frac{S_{e^+}^{theory}(E, \vec{CY}) - S_{e^+}^{exp}}{\Delta_{e^+}^{exp}} \right)^2 + \sum_k \left(\frac{CY_k^{fit} - CY_k}{\Delta CY_k} \right)^2, \quad (3.1)$$

$$p_k = \frac{CY_k^{fit} - CY_k}{\Delta CY_k} \in (-1, 1), \quad (3.2)$$

где $S_{e^+}^{theory}, S_{e^+}^{exp}$ – модельное (теоретическое) и экспериментальное значения позитронного спектра при заданной энергии, $\Delta_{e^+}^{exp}$ – погрешность экспериментального значения, CY_k – кумулятивный выход k-го продукта распада, ΔCY_k – заданная в библиотеках ошибка кумулятивного выхода k-го продукта распада, CY_k^{fit} – пробное значение кумулятивного выхода k-го продукта распада. Суммирование в первом слагаемом ведется по всем энергетическим отрезкам (бинам), а суммирование во втором слагаемом проводится по всем продуктам распада.

Первое слагаемое в выбранной функции отклонения соответствует классическому выражению χ^2 , а величина p_k введена для подавления слишком большого отклонения подгоночных выходов от табличных значений.

Новые отношения для модельных спектров после данной процедуры приведены на рисунках 7, 8. Из отношений можно увидеть, что полученные таким образом теоретические спектры практически полностью сходятся с экспериментальными в пределах ошибок.

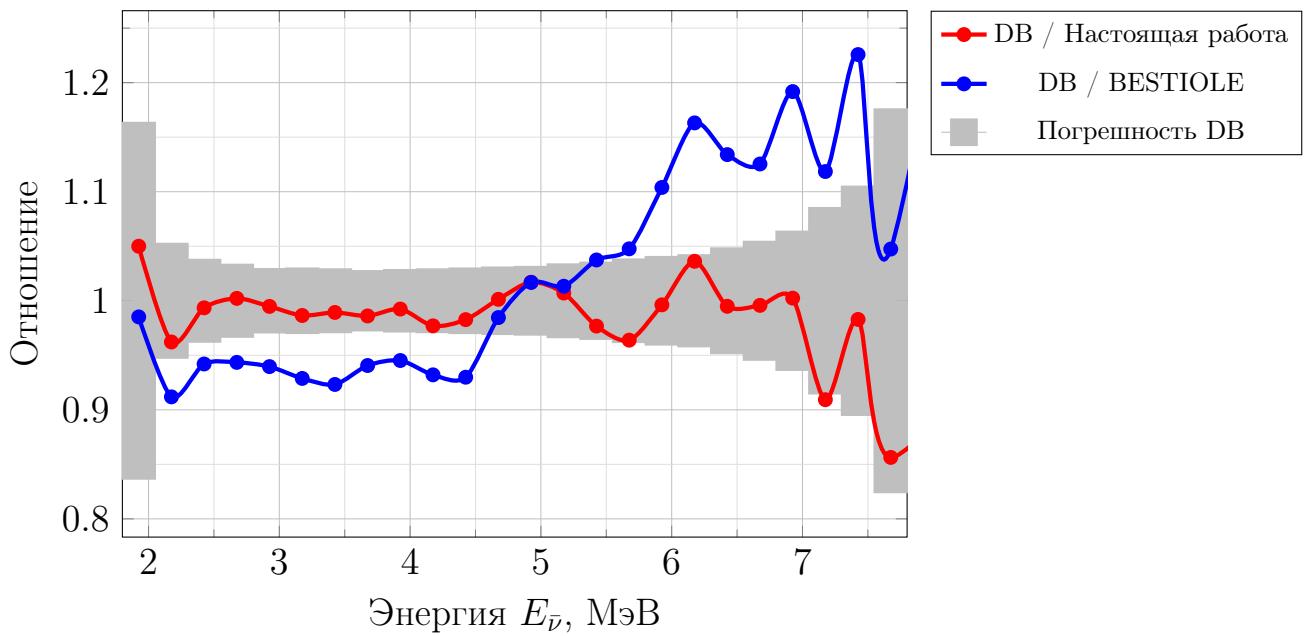


Рисунок 7 — Отношение экспериментального позитронного спектра от деления ^{235}U к модельным позитронным спектрам после процесса подгонки.

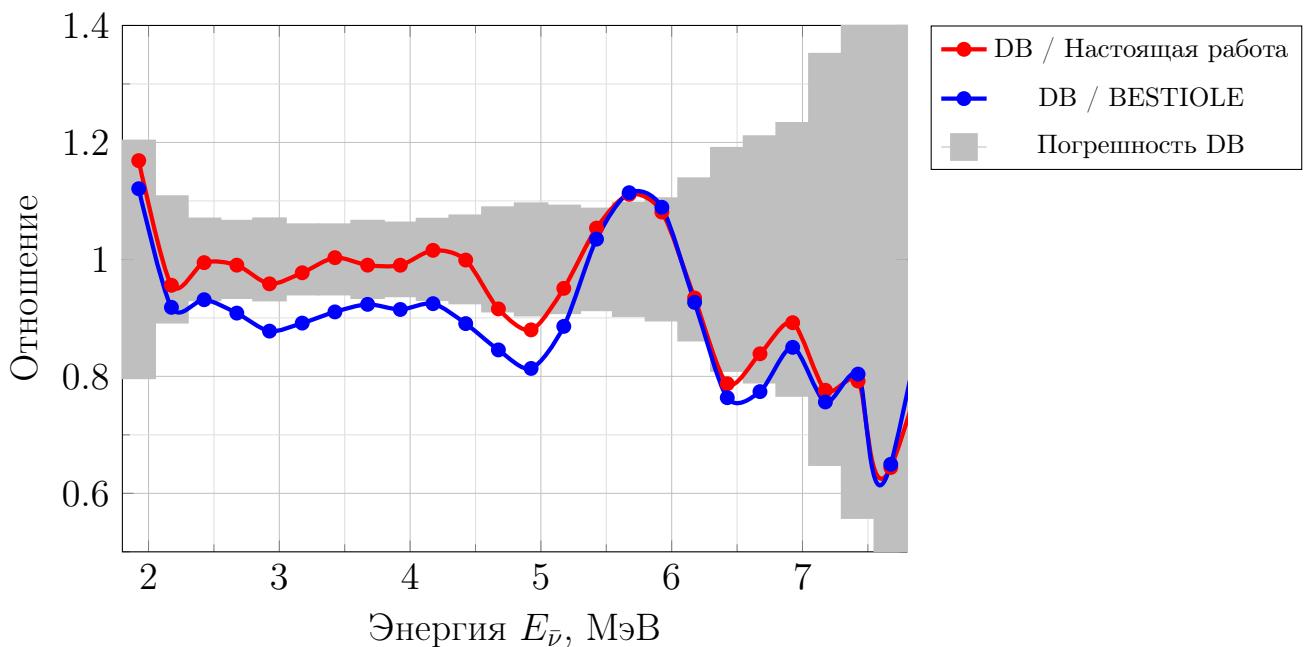


Рисунок 8 — Отношение экспериментального позитронного спектра от деления ^{239}Ru к модельным позитронным спектрам после процесса подгонки.

В силу того, что в работах [20; 21] не приведены отдельные спектры для изотопов ^{238}U и ^{241}Pu , их подгонка проводилась по рассчитанным позитронным спектрам смеси изотопов, в которых уже учтены результаты подгонки для ^{235}U и ^{239}Pu . Стоит отметить, что экспериментальные данные для смеси имеют наибольшую статистику и считаются наиболее точными, что позволяет лучше проверить и откалибровать модель.

Сравнение с полученными в работах [20; 21] значениями приведено на рисунках 9, 10. Из полученных отношений можно сделать вывод, что модель имеет очень хорошее сходство с экспериментальными данными. Расхождение в зоне >7 МэВ может быть связано с неэффективностью выбранного способа минимизации функции отклонения χ^2 .

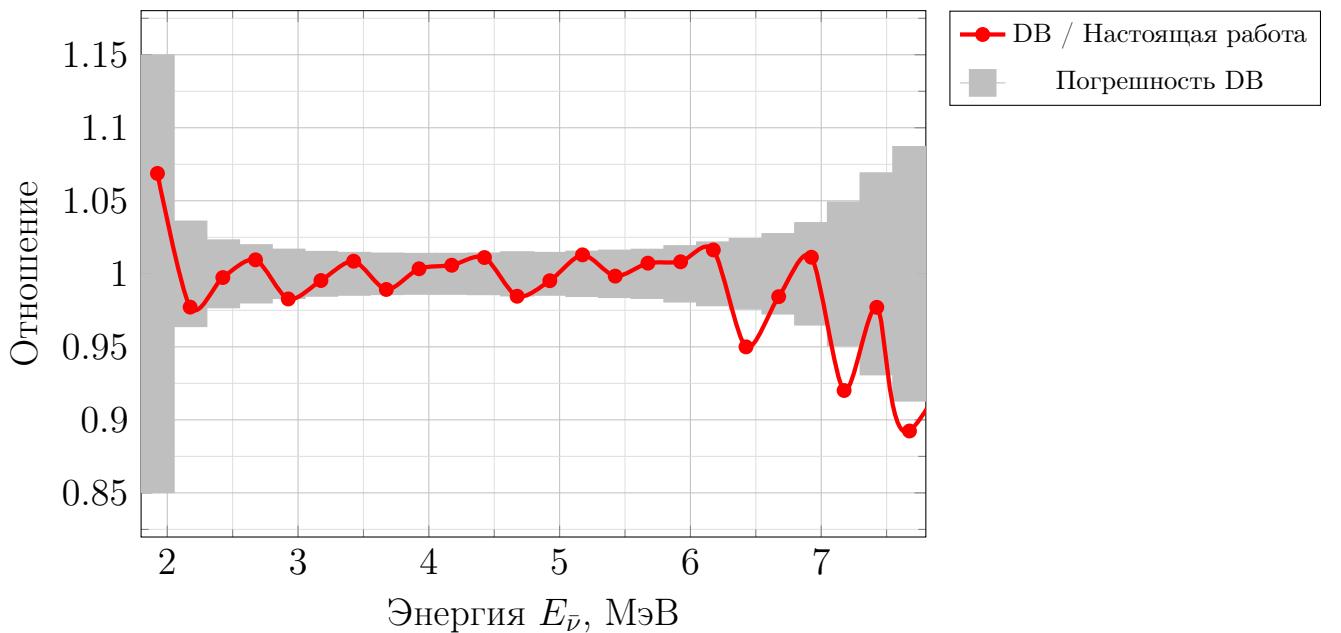


Рисунок 9 — Отношение экспериментального позитронного спектра (DayaBay) от деления смеси изотопов к модельному позитронному спектру.

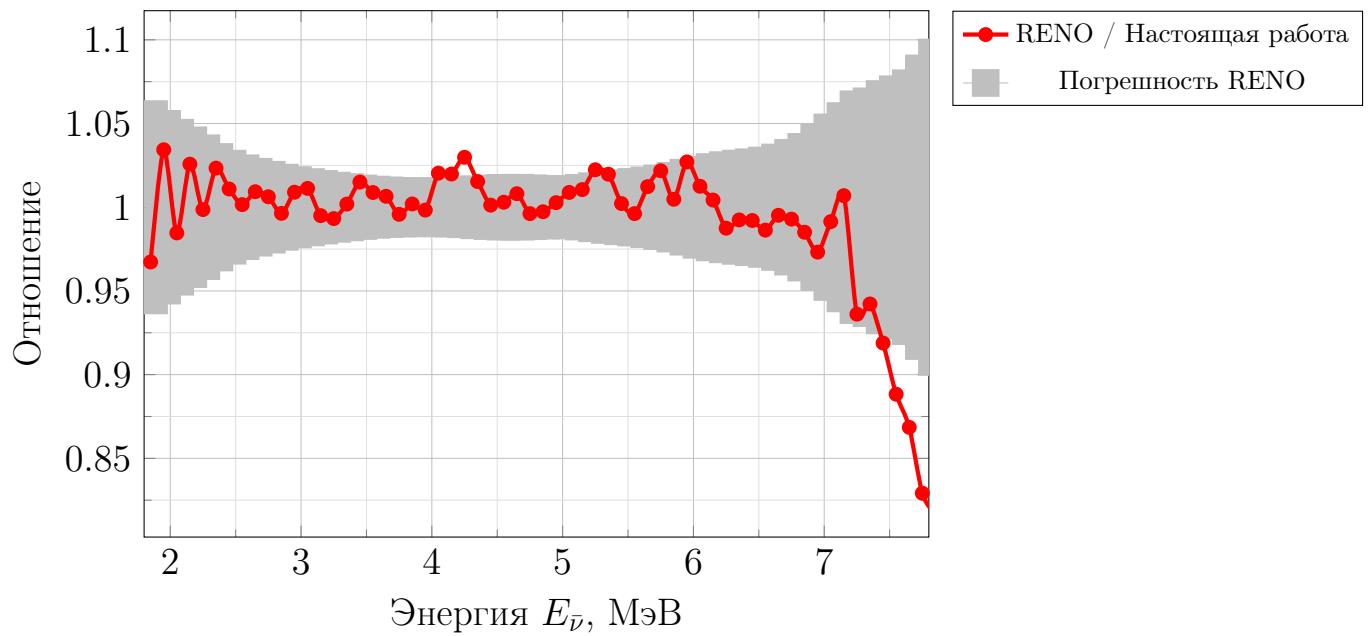


Рисунок 10 — Отношение экспериментального позитронного спектра (RENO) от деления смеси изотопов к модельным позитронным спектрам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная научно-исследовательская работа посвящена исследованию и расчету спектров бета-частиц и антинейтрино, рожденных в процессе β -распада.

Первая часть работы включала в себя получение спектров бета-частиц и антинейтрино в простейшем приближении. Были учтены кинематика процесса β -распада, влияние поля ядра на процесс перехода, был записан явный вид функции Ферми (1.9), описывающей поправку на это влияние. Были получены общие формулы (1.10) и (1.11), описывающие формы спектра бета-частиц и антинейтрино от единичного β -распада с известной энергией перехода. Суммированием этих спектров с учетом вероятностей их реализации были получены выражения для полных спектров бета-частиц (1.12) и антинейтрино (1.13) от β -распада известного изотопа. С учетом всех кумулятивных выходов дочерних изотопов, были получены выражения для кумулятивных спектров (1.14), (1.15) основных радионуклидов, используемых в качестве топлива для ядерных реакторов. Для сравнения с экспериментом и дальнейшего анализа исследовался метод реконструирования позитронных спектров (1.22) радионуклидов на основе реакции обратного бета-распада (ОБР).

Следующая часть работы заключалась в уточнении модели путем введения поправок, учитывающих влияние тех или иных физических факторов на процесс β -распада. Был учтен ряд поправок, дающих наибольший вклад в изменение спектров. Также было учтено влияние запрещенности распада на форму спектра для переходов с первой степенью запрета.

Далее было проведено сравнение полученных в работе модельных позитронных спектров с другой моделью и с экспериментальными данными (рис. 5, 6). В связи с несоответствием модельных и экспериментальных спектров была предпринята попытка подгонки спектров путем варьирования кумулятивных выходов изотопов. Была подобрана функция отклонения (3.1) и проведена процедура подгонки для изотопов ^{235}U и ^{239}Ru с известными экс-

периментальными спектрами. Результат подгонки представлен на рисунках 7, 8. С использованием известных экспериментальных спектров от смеси изотопов была проведена аналогичная подгонка для изотопов ^{238}U и ^{241}Pu . Из сравнения полученных таким образом суммарных модельных спектров с экспериментальными значениями (рис. 9, 10) можно сделать вывод о том, что полученная в настоящей работе модель имеет почти полное сходство с экспериментальными данными и превосходит все существующие на данный момент конкурентные модели.

Тем самым, актуальной на данный момент остается задача оптимизации метода минимизации функции отклонения χ^2 (3.1) для получения еще более близких к экспериментальным данным значений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Thomas S. A., Abdalla F. B., Lahav O.* Upper Bound of 0.28 eV on Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey // Physical Review Letters. — 2010. — July. — Vol. 105, no. 3. — ISSN 1079-7114. — DOI: [10.1103/physrevlett.105.031301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.031301).
2. *Reines F., Cowan C. L.* Detection of the Free Neutrino // Physical Review. — 1953. — Nov. — Vol. 92, no. 3. — P. 830–831. — ISSN 0031-899X. — DOI: [10.1103/physrev.92.830](https://doi.org/10.1103/physrev.92.830).
3. *Reines F., Cowan C. L.* Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons // Physical Review. — 1959. — Jan. — Vol. 113, no. 1. — P. 273–279. — ISSN 0031-899X. — DOI: [10.1103/physrev.113.273](https://doi.org/10.1103/physrev.113.273).
4. Neutrino oscillations: status and prospects for the determination of neutrino mass ordering and the leptonic CP-violation phase / L. D. Kolupaeva [et al.] // Physics-Uspekhi. — 2022. — May. — Vol. 66, no. 08. — P. 753–774. — ISSN 1468-4780. — DOI: [10.3367/ufne.2022.05.039191](https://doi.org/10.3367/ufne.2022.05.039191).
5. Absolute measurement of the beta spectrum from ^{235}U fission as a basis for reactor antineutrino experiments / K. Schreckenbach [и др.] // Physics Letters B. — 1981. — Февр. — Т. 99, № 3. — С. 251–256. — ISSN 0370-2693. — DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)91120-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91120-5).
6. *Feilitzsch F. von, Hahn A., Schreckenbach K.* Experimental beta-spectra from ^{239}Pu and ^{235}U thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra // Physics Letters B. — 1982. — Дек. — Т. 118, № 1–3. — С. 162–166. — ISSN 0370-2693. — DOI: [10.1016/0370-2693\(82\)90622-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90622-0).

7. Determination of the antineutrino spectrum from ^{235}U thermal neutron fission products up to 9.5 MeV / K. Schreckenbach [et al.] // Physics Letters B. — 1985. — Oct. — Vol. 160, no. 4/5. — P. 325–330. — ISSN 0370-2693. — DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)91337-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)91337-1).
8. Improved predictions of reactor antineutrino spectra / T. A. Mueller [et al.] // Physical Review C. — 2011. — May. — Vol. 83, no. 5. — ISSN 1089-490X. — DOI: [10.1103/physrevc.83.054615](https://doi.org/10.1103/physrevc.83.054615).
9. Huber P. Determination of antineutrino spectra from nuclear reactors // Physical Review C. — 2011. — Aug. — Vol. 84, no. 2. — ISSN 1089-490X. — DOI: [10.1103/physrevc.84.024617](https://doi.org/10.1103/physrevc.84.024617).
10. Д. В. Попов М. Д. Скорохватов. Модель конверсии бета-спектров продуктов деления изотопов урана и плутония в спектры антинейтрино // Письма в ЭЧАЯ. — 2023. — Т. 20, №1(246). — С. 5—16.
11. A comprehensive revision of the summation method for the prediction of reactor antineutrino fluxes and spectra / L. Perissé [et al.]. — 2023. — DOI: [10.48550/ARXIV.2304.14992](https://arxiv.org/abs/2304.14992).
12. Kopeikin V. I. Flux and spectrum of reactor antineutrinos // Physics of Atomic Nuclei. — 2012. — Февр. — Т. 75, № 2. — С. 143–152. — ISSN 1562-692X. — DOI: [10.1134/s1063778812020123](https://doi.org/10.1134/s1063778812020123).
13. Updated Summation Model: An Improved Agreement with the Daya Bay Antineutrino Fluxes / M. Estienne [и др.] // Physical Review Letters. — 2019. — Июль. — Т. 123, № 2. — ISSN 1079-7114. — DOI: [10.1103/physrevlett.123.022502](https://doi.org/10.1103/physrevlett.123.022502).
14. Б. С. Джелепов Л. Н. Зырянова. Влияние электрического поля атома на Бета-распад // АН СССР. — 1956.
15. В. Г. Александрин С. В. Родичев. Бета- и антинейтринное излучение радиоактивных ядер : Справочник // Энергоатомиздат. — 1989.

16. Hayes A. C., Vogel P. Reactor Neutrino Spectra // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2016. — Oct. — Vol. 66, no. 1. — P. 219–244. — ISSN 1545-4134. — DOI: [10.1146/annurev-nucl-102115-044826](https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044826).
17. Mougeot X., Bé M.-M., Bisch C. Calculation of beta spectral shapes // Radioprotection. — 2014. — Sept. — Vol. 49, no. 4. — P. 269–273. — ISSN 1769-700X. — DOI: [10.1051/radiopro/2014017](https://doi.org/10.1051/radiopro/2014017).
18. Фаянс С. А. Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ при низких энергиях // Ядерная физика. — 1985. — Т. 42. — С. 929—940.
19. Strumia A., Vissani F. Precise quasielastic neutrino/nucleon cross-section // Physics Letters B. — 2003. — July. — Vol. 564, no. 1/2. — P. 42–54. — ISSN 0370-2693. — DOI: [10.1016/s0370-2693\(03\)00616-6](https://doi.org/10.1016/s0370-2693(03)00616-6).
20. Measurement of reactor antineutrino flux and spectrum at RENO / S. G. Yoon [et al.] // Physical Review D. — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 11. — ISSN 2470-0029. — DOI: [10.1103/physrevd.104.1111301](https://doi.org/10.1103/physrevd.104.1111301).
21. Joint Determination of Reactor Antineutrino Spectra from ^{235}U and ^{239}Pu Fission by Daya Bay and PROSPECT / F. P. An [et al.] // Physical Review Letters. — 2022. — Feb. — Vol. 128, no. 8. — ISSN 1079-7114. — DOI: [10.1103/physrevlett.128.081801](https://doi.org/10.1103/physrevlett.128.081801).
22. Wilkinson D. Evaluation of beta-decay // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1990. — May. — Vol. 290, no. 2/3. — P. 509–515. — ISSN 0168-9002. — DOI: [10.1016/0168-9002\(90\)90570-v](https://doi.org/10.1016/0168-9002(90)90570-v).
23. High precision analytical description of the allowed β spectrum shape / L. Hayen [et al.] // Reviews of Modern Physics. — 2018. — Mar. — Vol. 90, no. 1. — ISSN 1539-0756. — DOI: [10.1103/revmodphys.90.015008](https://doi.org/10.1103/revmodphys.90.015008).

24. *Sirlin A.* General Properties of the Electromagnetic Corrections to the Beta Decay of a Physical Nucleon // *Physical Review*. — 1967. — Dec. — Vol. 164, no. 5. — P. 1767–1775. — ISSN 0031-899X. — DOI: [10.1103/physrev.164.1767](https://doi.org/10.1103/physrev.164.1767).
25. *Sirlin A., Ferroglio A.* Radiative corrections in precision electroweak physics: A historical perspective // *Reviews of Modern Physics*. — 2013. — Feb. — Vol. 85, no. 1. — P. 263–297. — ISSN 1539-0756. — DOI: [10.1103/revmodphys.85.263](https://doi.org/10.1103/revmodphys.85.263).
26. *Sirlin A.* Radiative correction to the $\bar{\nu}(\nu)$ spectrum in β decay // *Physical Review D*. — 2011. — July. — Vol. 84, no. 1. — ISSN 1550-2368. — DOI: [10.1103/physrevd.84.014021](https://doi.org/10.1103/physrevd.84.014021).
27. *Behrens H. O., Bühring W.* Electron radial wave functions and nuclear beta-decay //. — 1982.
28. *Li Y.-F., Zhang D.* New realization of the conversion calculation for reactor antineutrino fluxes // *Physical Review D*. — 2019. — Sept. — Vol. 100, no. 5. — ISSN 2470-0029. — DOI: [10.1103/physrevd.100.053005](https://doi.org/10.1103/physrevd.100.053005).
29. *Wilkinson D.* Methodology for superallowed Fermi beta-decay Part. I. Preliminaries and data // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 1993. — Oct. — Vol. 335, no. 1/2. — P. 172–181. — ISSN 0168-9002. — DOI: [10.1016/0168-9002\(93\)90270-r](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90270-r).
30. *Clark C.* Atomic Reference Data for Electronic Structural Calculations, NIST Standard Reference Database 141. — 1997. — DOI: [10.18434/T4ZP4F](https://doi.org/10.18434/T4ZP4F).
31. *Štefánik D., Dvornický R., Šimkovic F.* Reactor antineutrino spectra and forbidden beta decays // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1892. — Author(s), 2017. — P. 020022. — DOI: [10.1063/1.5007647](https://doi.org/10.1063/1.5007647).

32. *Doi M., Kotani T., Takasugi E.* Double Beta Decay and Majorana Neutrino // Progress of Theoretical Physics Supplement. — 1985. — Vol. 83. — P. 1–175. — ISSN 0375-9687. — DOI: [10.1143/ptps.83.1](https://doi.org/10.1143/ptps.83.1).