Министерство наки и высшего образования Российской Федерации Филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»
в городе Алматы (АФ НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Развитие подхода к вычислению функций плотности скалярного поля в приближении неплоского потенциала

Научный руководитель ________ Кириллов А.А.

Студент ________ Жамбыл Д.К.

Алматы 2025

Содержание

1 Введение

Современная космологическая теория описывает множество явлений и процессов во всей Вселенной, но все еще остаются многочисленные наблюдательные данные, которые требуют объяснения и не могут быть объяснены в рамках современной теории. Одной из таких проблем является проблема темной материи или скрытой массы (DM).

Темная материя — это неизвестная форма материи, которая может собираться в кластеры, т.е. взаимодействует только гравитационно и то слабо, ее доля плотности энергии в современной Вселенной составляет $\Omega_{DM} \approx 25\%$ [1] что очень много! мы живем во Вселенной состоящий неизвестно из чего.

Пока мало что известно о природе темной материи, проводится множество исследований и выдвигаются различные гипотезы для объяснения ее природы. Одной из таких гипотез в объяснении природы темной материи являются первичные черные дыры (PBH).

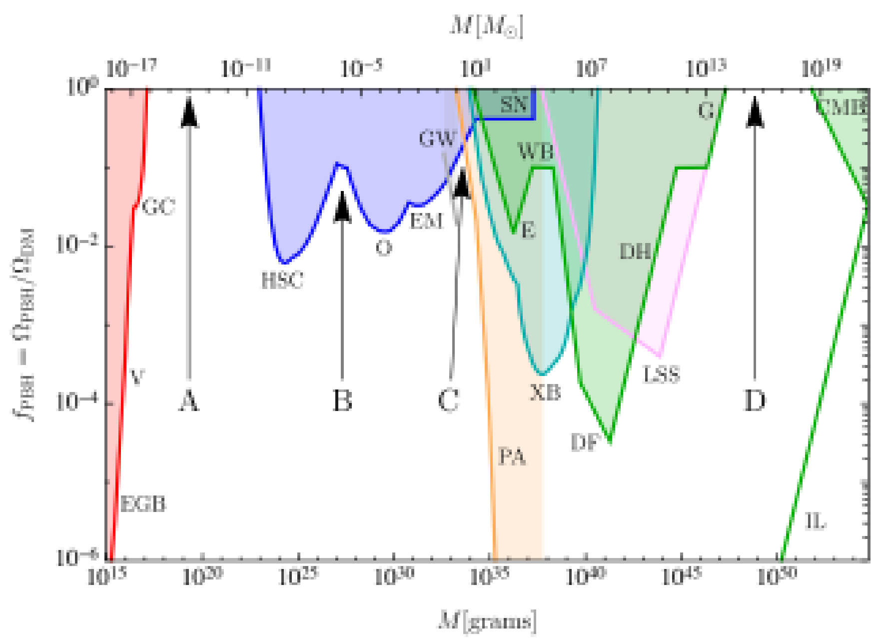

Рис. 1: Ограничения для PBH

Идея гипотезы заключается в том, что на ранней стадии Вселенной за счет квантовых флуктуаций поля образовались неоднородности, которые при коллапсе формировали черные дыры (первичные) разных масс. Легкие черные дыры испарялись за счет излучения Хокинга, а более массивные черные дыры, наоборот, могли набирать массу за счет аккреции. Однако на роль темной материи могут претендовать только черные дыры в определенных пределах масс (см. рис. 1) [4], на котором видно, что существуют ограничения по наблюдательным данным.

Нас больше всего интересует область A, так как в этой области масс содержатся микроскопические черные дыры. Есть также область D, но массы в данной области слишком велики, и возникает вопрос, могла ли первичная черная дыра набрать такую массу за счет аккреции.

В работе [2] в рамках гипотезы о PBH, указанной выше, рассматривается общий подход к расчёту спектра масс PBH для потенциала общего вида, в данной работе, учитывается также классическое движение скалярного поля, помимо квантовых флуктуации. Основываясь на этом, мы проверяем подход, описанный в указанной работе, с использованием подхода Фоккера–Планка.

Но прежде нужно оговорить важное положение, благодаря которому всё выше сказанное является справедливым.

2 Медленное скатывание поля

Высказанные идеи и гипотезы происходят из так называемого периода раздувания Вселенной (инфляции), когда Вселенная расширялась экспоненциально.

Инфляция очень удобная теория, которая решает проблемы горячей Вселенной, такие как проблема плоскостности, неоднородности и др. [7].

Во времена инфляции в поле возникают квантовые флуктуации, и оно будет стремиться скатиться в потенциальную яму (см. рис. 2), где ϕ_1 — ложный минимум. Во время этого скатывания в поле

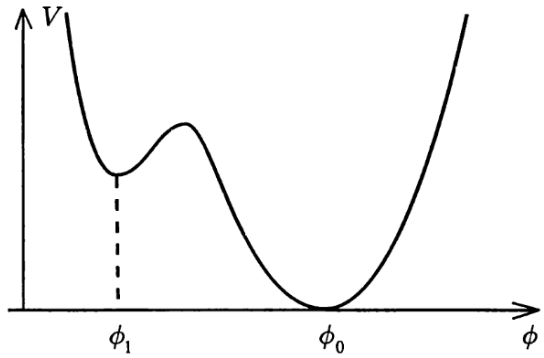

Рис. 2: Скалярный потенциал с ложным вакумом

могут возникать квантовая и классическая части движения [2]. Также в этой работе вычисляется вероятность обнаружения поля во время инфляции; ключевым является именно учет классической части движения поля.Важность работы, отмеченной выше, и данной работы заключается в универсальном подходе к расчёту спектра масс черных дыр, необходимого для развития целого ряда исследований и теории по PBH. Благодаря разрабатываемому методу можно без больших трудностей рассчитывать вероятности обнаружения поля в разные моменты времени. В данной работе покажем, что результаты, полученные в указанной выше работе, правильные и сходятся с уже известными результатами.

3 Уравения квантовых флуктуации и классического движения поля

Рассмотрим действие со скалярным полем ϕ, массой m. (Расчеты ведутся в системе единиц $\hbar = k_B = c = 1$)

$$S = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \left[R + (\partial\Phi)^2 - m^2\Phi^2\right] \qquad (1)$$

где, R - Скалярная кривизна, M_{pl}^2 - масса планка

Уравнение для потенциала, в пространстве де-Ситтера, имеет вид [2], [1]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{3H}\left[e^{-2Ht}\Delta\Phi-\frac{\partial V(\Phi)}{\partial\Phi}\right]=y(t) \tag{2}$$

$$y(x,t)\equiv\left(-\frac{1}{3H}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{3H}e^{-2Ht}\,\Delta\right)Q(x,t).$$

где $Q(x,t)$, быстрая часть разложения Фурье-поля, подробнее можно посмотреть в [3] Как было сказано в введении, движение поля рассматривается как сумма двух составляющих, классического поля и кватового.

$$\Phi=\Phi_{cl}+\phi$$

Подставляя её в уравнения (2), получим соответственно уравнения движения для классического и квантового поля. Покажем это.

$$\frac{\partial(\Phi_{\rm cl}+\phi)}{\partial t}-\frac{1}{3H}\left[e^{-2Ht}\,\Delta(\Phi_{\rm cl}+\phi)-\frac{\partial V(\Phi_{\rm cl}+\phi)}{\partial(\Phi_{\rm cl}+\phi)}\right]=y(x,t)$$

$$\frac{\partial\Phi_{\rm cl}}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{3H}\left[e^{-2Ht}\big(\Delta\Phi_{\rm cl}+\Delta\phi\big)-\left.\frac{\partial V}{\partial\Phi_{cl}}\right|_{\Phi=\Phi_{\rm cl}}-\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\Phi_{cl}^2}\right|_{\Phi=\Phi_{\rm cl}}\phi\right]=y(x,t)$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial\Phi_{\rm cl}}{\partial t}-\frac{1}{3H}\left[e^{-2Ht}\Delta\Phi_{\rm cl}-\frac{\partial V(\Phi_{\rm cl})}{\partial\Phi_{\rm cl}}\right]=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{3H}\left[e^{-2Ht}\Delta\phi-V''(\Phi_{\rm cl})\phi\right]=y(\mathbf{x},t) \tag{4}$$

Проводя ту же процедуру как в [2], придем к функции распределения плотности вероятности поля.

$$f(\Phi_2,t)=\frac{dP(\Phi_2,t;\Phi_1,t_1)}{d\Phi_2}=$$
$$=\sqrt{\frac{q^2}{\pi}}\exp\left[-q^2\left(\Phi_2-\Phi_{\rm cl}(t_2)-\big(\Phi_1-\Phi_{\rm cl}(t_1)\big)e^{-M(t_2)}\right)^2\right]. \tag{5}$$

$$q^2 \equiv \frac{1}{2\sigma^2 \sinh^2\big(M(t_2)\big)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2(t) e^{2M(t)}\, dt.$$

$$\sigma = \frac{H^{3/2}}{2\pi}.$$

$$\mu = \frac{m^2}{3H}$$

$$M(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \mu(t)\, dt$$

4 Приближение к классическому уравнению Фоккера–Планка

Чтобы из формулы (5) получить классические результаты для плотности вероятности, получаемые при решении уравнения Фоккера–Планка [?], необходимо сделать приближение $m^2 \ll 3H$ или $\mu \ll 1$ и $M(t) \ll 1$. Поэтому для интеграла в $q(t)$ будет справедливо следующее приближение.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2 e^{2M(t)}\, dt \simeq \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2(1+2M(t))\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2\, dt + 2\int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2 M(t)\, dt \simeq \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2\, dt$$

Здесь пренебрегли слагаемым $\int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2 M(t)\, dt$, так как оно является бесконечно малой величиной третьего порядка.

Интереснее выглядит ситуация для гиперболического синуса. Здесь необходимо будет воспользоваться формулой Коши для многократного интегрирования; вывод данной формулы можно посмотреть в [?].

$$(\sinh M(t_2))^2 = \left(M(t_2) + \frac{M^3(t_2)}{3!} + \frac{M^5(t_2)}{5!} + \frac{M^7(t_2)}{7!} + \cdots\right)^2 \simeq M^2(t_2)$$

$$M^2(t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu(t)\,dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu(t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\,\mu^2(t) = \frac{1}{(2-1)!}\int\limits_{z_1}^{z_2}(t-z)\mu^2(z)\,dz \simeq$$

$$(t-z)\int\limits_{z_1}^{z_2} \mu^2(z)\,dz$$

Очевидно, что параметр z имеет размерность времени, и нет разницы в обозначениях интеграла, поэтому справедливо следующее.

$$q^2 = \frac{1}{2\sigma^2(z-t)\int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2(t)\,dt}\int\limits_{t_1}^{t_2} \mu^2\,dt = \frac{1}{2\sigma^2(z-t)} \tag{6}$$

Подставляя полученное в уравнение (5), беря $(z-t) = T$ и явно раскрывая σ, получим классическую формулу для плотности вероятности распределения поля.

$$f(\Phi, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{H^3 t}} exp\left(-\frac{2\pi^2\Phi^2}{H^3 t}\right) \tag{7}$$

5 Заключение

В данной работе была показана справедливость результатов работы Кириллова–Рубина [2]. Были найдены корректные приближения для результатов этой работы.

В последующих исследованиях планируется развитие данного метода и использование его для объяснения природы темной материи, как было указано во введении.

6 Список Литературы

1. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. – Учреждение Российской акад. наук Ин-т ядерных исслед. РАН, 2009.

2. Alexander A. Kirillov, Sergey G. Rubin "On mass spectra of primordial black holes"arXiv:2109.02446 [astro-ph.CO]

3. M. Y. Khlopov and S. G. Rubin, Cosmological pattern of microphysics in the in ationary universe (Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 2004).

4. Bernard Carr, Florian Kuhnel "Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments"arXiv:2006.02838 [astro-ph.CO]

5. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – Наука, 1990.

6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – 1959.

7. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория //М.: КРАСАНД. – 2010.