

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ
КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С
ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЁМНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Научный руководитель
(проф., д.ф-м.н.)

_____ М. Ю. Хлопов

Студент

_____ И. В. Грачев

Москва 2025

Содержание

Введение	3
Практическая часть	7
Термодинамическая параметризация тёмной энергии	7
Модели динамической темной энергии	7
Статистический анализ	8
Заключение	14
Список литературы	15

ВВЕДЕНИЕ

Ключевым следствием наблюдений в космологии является то, что все объекты во Вселенной удаляются от нас, причем чем дальше они находятся, тем быстрее происходит их удаление. Эти скорости удаления измеряются с помощью красного смещения, что является результатом эффекта Доплера. Галактики имеют набор линий поглощения и излучения, наблюдаемые в их спектрах, а их характерные частоты известны. Однако из-за эффекта Доплера при удалении галактик, эти линии смещаются в красную сторону спектра. Вводится параметр красного смещения, определяемый как:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1)$$

где λ_{obs} и λ_{em} - длина волны излучения в точке наблюдения и в точке испускания соответственно. Важнейшим следствием этих наблюдений стал закон Хаббла, утверждающий, что скорость удаления объектов пропорциональна расстоянию между ними:

$$\vec{v} = H\vec{r}, \quad (2)$$

где H - параметр Хаббла. Важной является также метрика пространства-времени, которая описывает интервал между точками в пространстве-времени. Она важна для правильной интерпретации геометрии Вселенной и построения правильных космологических моделей. Интервал записывается как:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3)$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрика, индексы μ и ν пробегают значения от 0 до 3, а расстояния записаны дифференциально малыми, поскольку в общем случае искривленного пространства-времени имеет смысл говорить лишь о расстояниях между ближайшими точками. Однако, исходя из космологического принципа, утверждающего, что в данный момент времени Вселенная однородна и изотропна, требуется, чтобы пространственная часть метрики имела постоянную кривизну. Тогда мы приходим к метрике Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор Вселенной. Решая уравнение Эйнштейна для метрики:

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\nu, \quad (5)$$

где T^μ_ν - тензор момента импульса для всей рассматриваемой материи, R^μ_ν и R - тензор и скаляр Риччи соответственно, мы получаем уравнение Фридмана при решении временной части уравнений Эйнштейна:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (6)$$

где ρ - плотность. И также получаем уравнение ускорения:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -8\pi G\frac{p}{c^2}, \quad (7)$$

где p - давление. или в другом виде:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (8)$$

Также можно получить уравнение непрерывности:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (9)$$

Решая уравнение непрерывности для вещества, принимая $p=0$, получаем:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad (10)$$

Тогда

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^3} \quad (11)$$

Для излучения: $p = \rho c^2/3$ и из уравнения непрерывности для вещества:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad (12)$$

Проеделав аналогичные шаги, как для вещества, получаем:

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^4} \quad (13)$$

Далее принимаем $c=1$ Исходя из закона Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (14)$$

Тогда

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (15)$$

Введем параметр критической плотности, при которой геометрия Вселенной становилось бы плоской ($k=0$):

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (16)$$

Далее вводится безразмерный параметр плотности:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (17)$$

Уравнениям Эйнштейна удовлетворяет также решение с добавлением дополнительного члена Λ - космологической постоянной, которую связывают с тёмной энергией:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (18)$$

И аналогично параметру плотности вводится параметр плотности тёмной энергии:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (19)$$

Тогда из уравнения Фридмана:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (20)$$

А в случае плоской геометрии Вселенной:

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \quad (21)$$

Обозначив $H(t = 0) = H_0$, введя $E(a) = \frac{H(a)}{H_0}$ - безразмерный параметр Хаббла, учитывая уравнения (11), (13), получаем для стандартной космологической Λ CDM модели:

$$E(a)^2 = \Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_\Lambda \quad (22)$$

Разложим в ряд масштабный фактор относительно некоторого времени :

$$a(t') = a(t) + \dot{a}(t)[t' - t] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t)[t' - t]^2 + \dots \quad (23)$$

Поделив на $a(t)$, получим:

$$\frac{a(t')}{a(t)} = 1 + H(t)[t' - t] - \frac{q}{2}H^2(t)[t' - t]^2 + \dots, \quad (24)$$

где введен параметр замедления:

$$q(t) \equiv q = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{H^2(t)} = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (25)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Термодинамическая параметризация тёмной энергии

В статье [1] была получена космологическая модель, исходя из термодинамических свойств Вселенной. Обезразмеренный параметр Хаббла, полученный в данной модели:

$$E(z)^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})(1+z+q_{de,0}z)^2, \quad (26)$$

где $q_{de,0}$ - современное значение параметра замедления тёмной энергии. Заметим, что данный результат приводит к стандартной ΛCDM модели при $q_{de,0} = -1$

Модели динамической темной энергии

Были рассмотрены две модели динамической тёмной энергии: ВА (Barboza-Alcaniz) и GEDE (Generalized Emergent Dark Energy) модели. Безразмерный параметр Хаббла для этих моделей имеет вид:

$$E(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda f_{DE}(z) \quad (27)$$

В статьях [2] и [3] были получены выражения для функции плотности тёмной энергии $f_{DE}(z) = \frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_{DE,0}(z)}$: Для ВА:

$$f_{DE}(z) = (1+z)^{3(1+\omega_0)}(1+z^2)^{\frac{3\omega_a}{2}}, \quad (28)$$

которая восстанавливает ΛCDM модель при $\omega_0 = -1$, $\omega_a = 0$ и в настоящее время при $z=0$. Эта модель является обобщением ωCDM модели с постоянным уравнением состояния. Поскольку в данной модели требуется, чтобы $\omega_0 + \omega_a < 0$, поэтому тёмная энергия является подавленной при $z \gg 1$. Для GEDE:

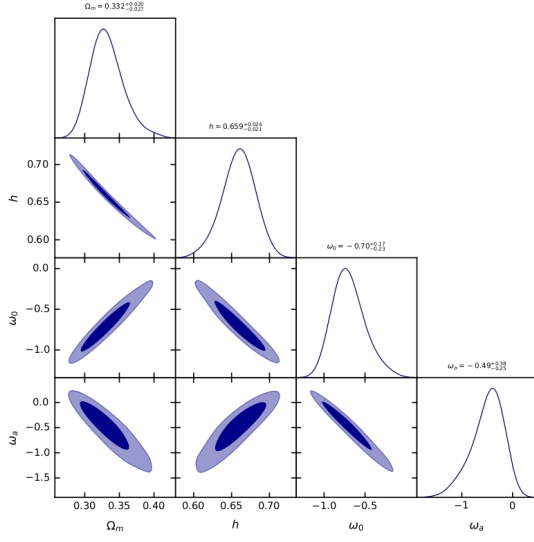
$$f_{de}(z) = \left(\frac{1 - \tanh(\Delta \log_{10}(\frac{1+z}{1+z_t}))}{1 - \tanh(\Delta \log_{10}(1+z_t))} \right), \quad (29)$$

где z_t -красное смещение в момент, когда плотность вещества и тёмной энергии были равны, $z_t=0,54$. Поэтому Δ -единственный свободный параметр, характеризующий скорость роста плотности тёмной энергии, принимает любые действительные значения.

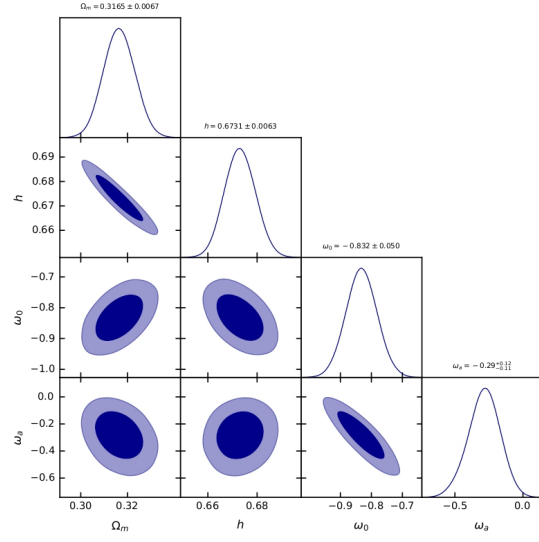
Статистический анализ

Для анализа моделей были использованы данные наблюдений сверхновых типа IA с каталога PantheonPlus ($0 < z < 2$), Union3 ($0,01 < z < 1,4$), данные наблюдений за галактиками и квазарами с DESIR2 ($0 < z < 3,5$) и данные наблюдений за кластерами галактик, слабого гравитационного линзирования с DES SN5YR ($0,2 < z < 1,2$), а также данные реликтового излучения Planck18 $z \approx 1100$. Была использована программа SimpleMC, основанная на методе Монте-Карло с цепями Маркова (MCMC). Получены апостериорные распределения параметров моделей с различными наборами данных, где тёмно-синяя область соответствует доверительному интервалу в 3σ , а светло-синяя-диапазону в 5σ :

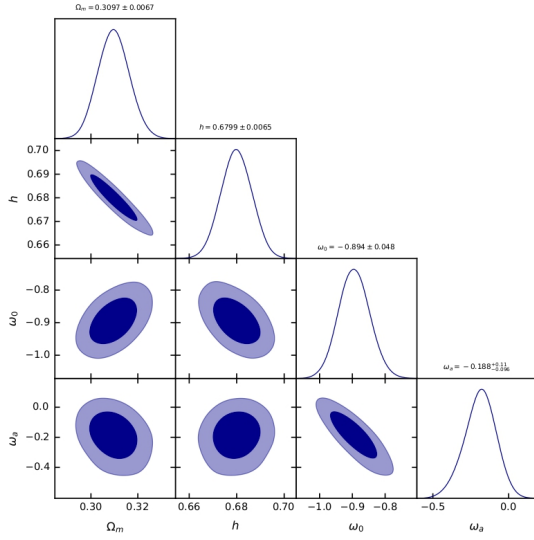
Для ВА:



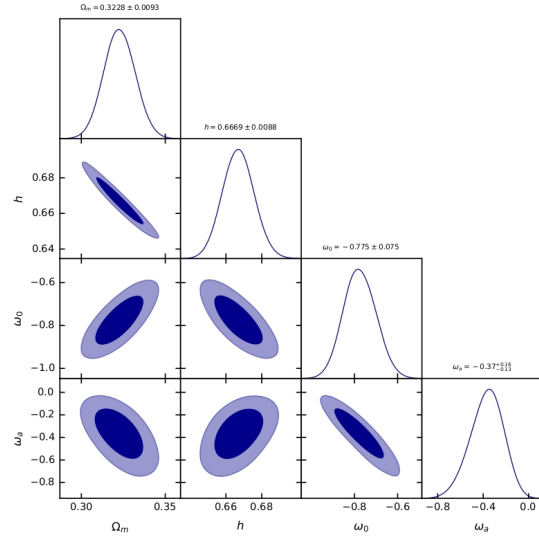
(a) BA:CMB+DESIR2



(b) BA:CMB+DESIR2+DES SN5YR



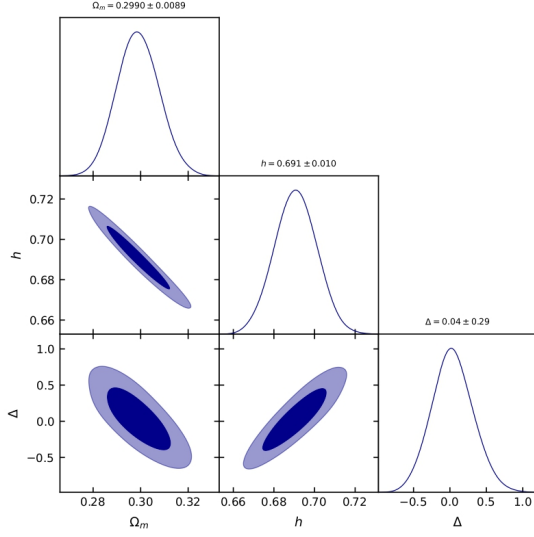
(c) BA:CMB+DESIR2+PantheonPlus



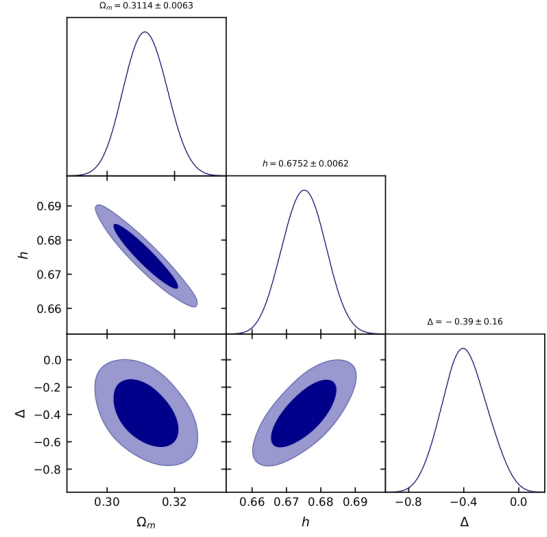
(d) BA:CMB+DESIR2+Union3

Рисунок 1 — Апостериорные распределения параметров модели ВА

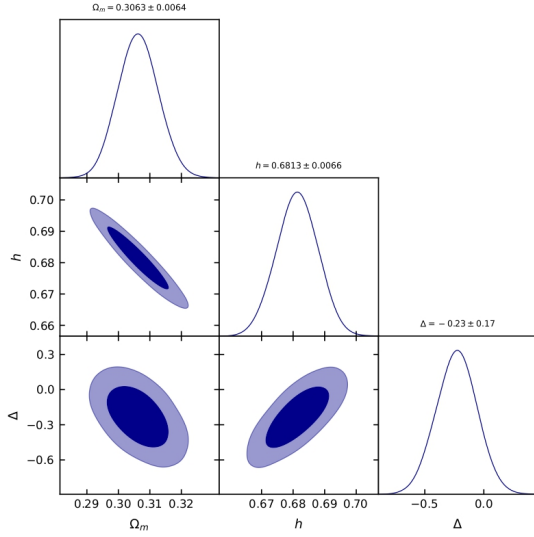
Для GEDE:



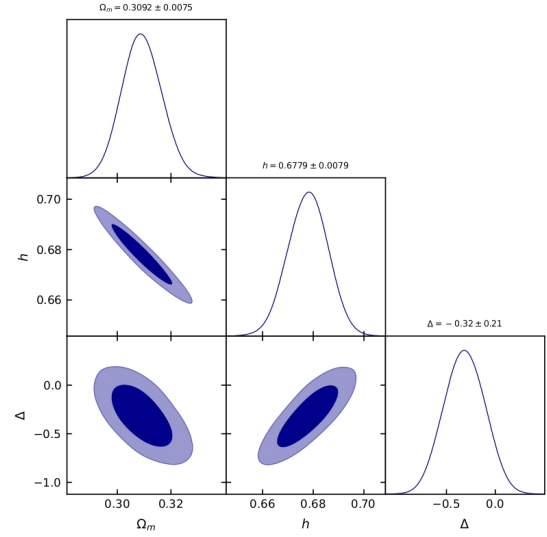
(a) GEDE:CMB+DESIR2



(b) GEDE:CMB+DESIR2+DES SN5YR



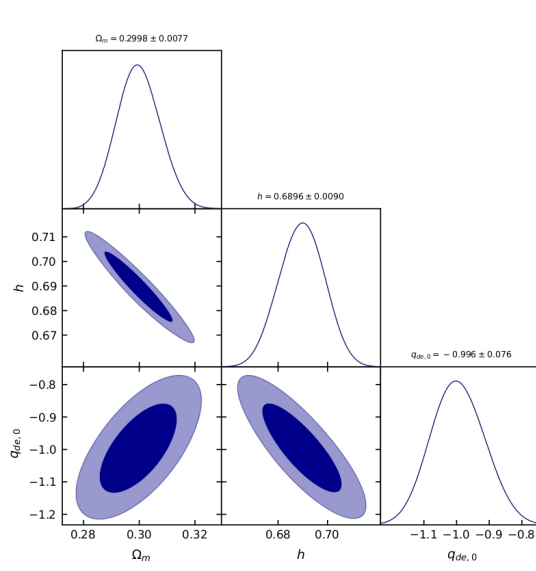
(c) GEDE:CMB+DESIR2+PantheonPlus



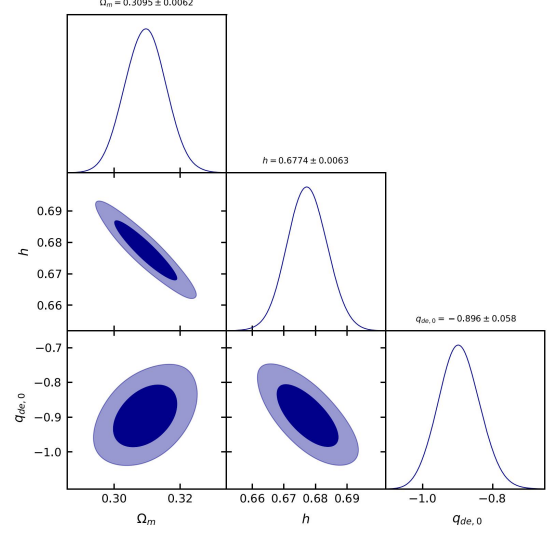
(d) GEDE:CMB+DESIR2+Union3

Рисунок 2 — Апостериорные распределения параметров модели GEDE

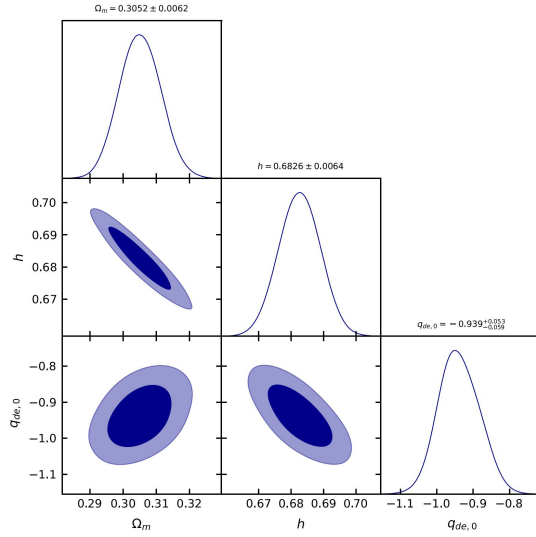
Получены апостериорные распределения параметров модели термодинамической параметризации:



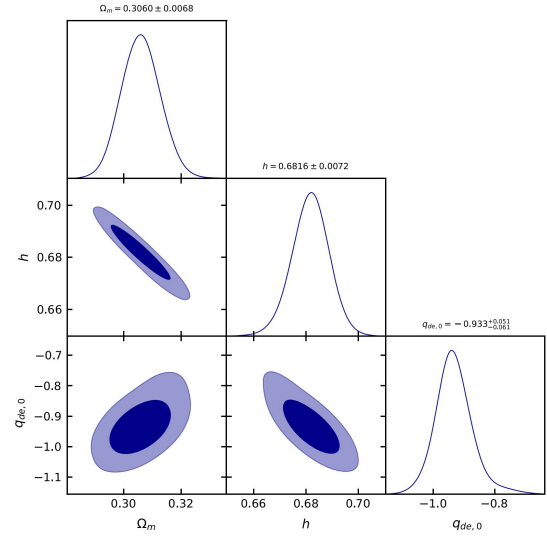
(a) ThermDE:CMB+DESIDR2



(b) ThermDE:CMB+DESIDR2+DES
SN5YR



(c) ThermDE:CMB+DESIDR2+PantheonPlus



(d) ThermDE:CMB+DESIDR2+Union3

Рисунок 3 — Апостериорные распределения параметров модели термодинамической параметризации

Параметр	Набор данных	Λ CDM	BA	GEDE	ThermDE
Ω_{m0}	CMB+DESIDR2	$0,3033 \pm 0,0060$	$0,3033^{+0,0020}_{-0,0027}$	$0,2990 \pm 0,0089$	$0,2998 \pm 0,0077$
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	$0,3088 \pm 0,0057$	$0,3165 \pm 0,0067$	$0,3114 \pm 0,0063$	$0,3095 \pm 0,0062$
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	$0,3061 \pm 0,0056$	$0,3097 \pm 0,0067$	$0,3063 \pm 0,0064$	$0,3052 \pm 0,0062$
	CMB+DESIDR2+Union3	$0,3061 \pm 0,0058$	$0,3228 \pm 0,0093$	$0,3092 \pm 0,0075$	$0,3060 \pm 0,0068$
h	CMB+DESIDR2	$0,6823 \pm 0,0050$	$0,659^{+0,024}_{-0,021}$	$0,691 \pm 0,010$	$0,6896 \pm 0,0090$
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	$0,6778 \pm 0,0046$	$0,6731 \pm 0,0063$	$0,6752 \pm 0,0062$	$0,6774 \pm 0,0063$
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	$0,6800 \pm 0,0045$	$0,6799 \pm 0,0065$	$0,6813 \pm 0,0066$	$0,6826 \pm 0,0064$
	CMB+DESIDR2+Union3	$0,6800 \pm 0,0048$	$0,6669 \pm 0,0088$	$0,6779 \pm 0,0079$	$0,6816 \pm 0,0072$
ω_0	CMB+DESIDR2	-1	$-0,70^{+0,17}_{-0,23}$	-	-
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	-1	$-0,832 \pm 0,050$	-	-
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	-1	$-0,894 \pm 0,048$	-	-
	CMB+DESIDR2+Union3	-1	$-0,775 \pm 0,075$	-	-
ω_a	CMB+DESIDR2	0	$-0,49^{+0,38}_{-0,25}$	-	-
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	0	$-0,29^{+0,12}_{-0,11}$	-	-
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	0	$-0,188^{+0,11}_{-0,096}$	-	-
	CMB+DESIDR2+Union3	0	$-0,37^{+0,16}_{-0,13}$	-	-
Δ	CMB+DESIDR2	0	-	$0,04 \pm 0,29$	-
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	0	-	$-0,39 \pm 0,16$	-
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	0	-	$-0,23 \pm 0,17$	-
	CMB+DESIDR2+Union3	0	-	$-0,32 \pm 0,21$	-
$q_{de,0}$	CMB+DESIDR2	-1	-	-	$-0,996 \pm 0,076$
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	-1	-	-	$-0,896 \pm 0,058$
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	-1	-	-	$-0,939^{+0,053}_{-0,059}$
	CMB+DESIDR2+Union3	-1	-	-	$-0,933^{+0,051}_{-0,061}$
$\Delta AIC_{model,\Lambda CDM}$	CMB+DESIDR2	0	-3,7801	-2,6053	-2,6898
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	0	-11,8538	-7,3632	-4,936
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	0	-4,5312	-3,7904	-2,862
	CMB+DESIDR2+Union3	0	-9,7294	-4,3728	-2,9414
$\Delta BIC_{model,\Lambda CDM}$	CMB+DESIDR2	0	7,8749	3,2242	3,1396
	CMB+DESIDR2+DES SN5YR	0	0,8072	-1,0328	1,3946
	CMB+DESIDR+PantheonPlus	0	8,1607	2,5554	3,484
	CMB+DESIDR2+Union3	0	2,7852	2,0543	3,4857

Таблица 1 — Значения параметров различных космологических моделей

В таблице также указана разность AIC рассматриваемых моделей и Λ CDM модели: $\Delta AIC_{model,\Lambda CDM} = AIC_{model} - AIC_{\Lambda CDM}$

AIC (Akaike Information Criterion)- информационный критерий Акаике, отражающий насколько хорошо модель описывает данные. $AIC = \chi^2_{min} + 2P$, где P-количество свободных параметров модели

Согласно [4]:

$|\Delta AIC| \leq 2$: Модели статистически сравнимы

$2 < |\Delta AIC| < 4$: Модель с меньшим AIC несколько лучше

$4 \leq |\Delta AIC| < 10$: Значительно меньшая поддержка модели с большим AIC

$|\Delta AIC| \geq 10$: Модель с меньшим AIC сильно предпочтительнее.

Как видно из таблицы модель BA описывает данные лучше, чем Λ CDM модель и GEDE модель. Кроме того, видно, что параметр ω_0 для Λ CDM модели (-1) не лежит в пределах 5σ , 3σ , 2σ , 3σ для значений полученных в параметризации BA модели для наборов данных CMB+DESIDR2, CMB+DESIDR2+DES SN5YR, CMB+DESIDR2+PantheonPlus, CMB+DESIDR2+Union3 соответственно. Значение ω_a для Λ CDM модели (0) не лежит в пределах σ для значений полу-

ченых в параметризации ВА модели для всех наборов данных
Значение параметра $q_{de,0}$ для ΛCDM в пределах σ удовлетворяет значениям, полученным для термодинамической параметризации тёмной энергии, что говорит о том, что термодинамическим условиям ΛCDM модель удовлетворяет. Также в таблице указана разность BIC рассматриваемых моделей и ΛCDM модели: $\Delta BIC_{model,\Lambda CDM} = BIC_{model} - BIC_{\Lambda CDM}$
BIC (Bayesian Information Criterion)- Байесовский информационный критерий-критерий, позволяющий найти наиболее вероятную истинную модель. Сильнее штрафует за количество свободных параметров, что позволяет оценить уровень интерпретируемости модели. $BIC = \chi^2_{min} + P \ln(N)$, где P- по прежнему количество свободных параметров, N- количество точек данных (объём выборки).
Для комбинации CMB+DESIDR2 N=2514
Для CMB+DESIDR2+DES SN5YR N=4149
Для CMB+DESIDR2+PantheonPlus N=4214
Для CMB+DESIDR2+Union3 N=4569
Согласно [4]:
 $|\Delta BIC| \leq 2$: Слабые доказательства против модели с большим BIC
 $2 < |\Delta BIC| \leq 6$: Умеренные доказательства против модели с большим BIC
 $|\Delta BIC| > 6$: Сильные доказательства против модели с большим BIC
Как видно из таблицы доказательства против всех рассматриваемых моделей динамической тёмной энергии по сравнению с ΛCDM моделью с различными наборами данных либо слабые, либо умеренные. Только против ВА модели доказательства становятся сильными для комбинаций данных CMB+DESIDR2 и CMB+DESIDR2+PantheonPlus.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были исследованы несколько моделей динамической тёмной материи. По результатам статистического анализа было получено, что стандартная Λ CDM модель удовлетворяет термодинамическим условиям, однако рассмотренные модели ВА и GEDE лучше описывают наблюдательные данные, причём лучшей из трёх моделей является ВА модель с двумя новыми свободными параметрами ω_0 и ω_a . Полученные при такой параметризации значения этих параметров показывают значительные отклонения от Λ CDM модели, вплоть до 5σ . Однако согласно анализу Байесовского информационного критерия, отражающего интерпретируемость модели, обнаружены сильные доказательства против ВА модели для некоторых комбинаций данных, исходящие из большего количества свободных параметров, чем в Λ CDM модели и слабые или умеренные доказательства против GEDE модели и модели термодинамической параметризации тёмной энергии. Поэтому Λ CDM модель все еще обладает лучшей интерпретируемостью, то есть более физически мотивированна. Кроме того, данный анализ был проделан с некоторыми допущениями и пока нельзя говорить о том, что Λ CDM модель более не описывает данные с экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Capozziello, R. D’Agostino и O. Luongo. “Thermodynamic parametrization of dark energy”. В: *Physics of the Dark Universe* 36 (июнь 2022), с. 101045. ISSN: 2212-6864. DOI: 10.1016/j.dark.2022.101045. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dark.2022.101045>.
- [2] E. Barboza Jr. и J. Alcaniz. “A parametric model for dark energy”. В: *Physics Letters B* 666.5 (сент. 2008), с. 415—419. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.08.012. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2008.08.012>.
- [3] W. Yang и др. “Generalized emergent dark energy model and the Hubble constant tension”. В: *Physical Review D* 104.6 (сент. 2021). ISSN: 2470-0010. DOI: 10.1103/physrevd.104.063521. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.104.063521>.
- [4] H. JEFFREYS. “The Theory of Probability”. В: *Nature* 109.2727 (февр. 1922), с. 132—133. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/109132a0. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/109132a0>.