Модификация энергетической ширины аннигиляции кваркония в кварк-антикварковом термостате в магнитном поле

Зеленев В. С., студент 3 курса ИЯФиТ НИЯУ МИФИ

Научный руководитель:
Кошелкин А. В., д.ф.-м.н., доц., проф. каф. №6 НИЯУ МИФИ

Москва, 2025

Астрофизическое введение: сверхновые III популяции

Первые звёзды Вселенной:

- Массивные звёзды $M \sim 10^2 - 10^3 M_\odot$ с низкой металличностью
- Завершают эволюцию парно-нестабильными сверхновыми или прямым коллапсом

Экстремальные условия при коллапсе:

$$T \gtrsim 10^{11}\ \text{К}, \quad \rho \gtrsim 10^{14}\ \text{г/см}^3, \quad B \sim 10^{15} - 10^{17}\ \text{Гс}$$

Фазовые переходы:

- Переход адронная материя $\to$ кварк-глюонная плазма
- Критическая плотность: $\rho_c \sim 2 - 3\rho_0$ ($\rho_0 \approx 0.16$ нукл/фм^3)

Наблюдательные проявления:

- Гамма-всплески (GRB), быстрые радиовсплески (FRB), нейтрино высоких энергий

Постановка задачи

Цель работы:

- Модифицирование ширины аннигиляции кварк-антикварковых пар в сильном магнитном поле с учётом эффектов термостата

Приближения:

- Квазистационарное однородное магнитное поле ($\tau \ll \tau_B \lesssim \tau_{ff}$)
- Основной уровень Ландау ($n = 0$)
- Приближение короткодействующего эффективного взаимодействия
- Лёгкие кварки (u, d, s), $T \gtrsim 100 - 300$ МэВ

Основные уравнения динамики пары

Кварконий в однородном магнитном поле:

$$\mathrm{B} = B\mathrm{e}_z$$

Потенциал Корнелла:

$$U(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r + C_s$$

Уравнение Дирака в центре масс пары с учётом спина (из отчёта, ур. 4):

$$\left(\Delta + 2U(r)E_w - U^2(r) + \frac{ie_q}{2}(\mathrm{B}\times\mathrm{r})\nabla \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}e_q^2 B_r^2 r_\perp^2\right)\psi_S(\mathrm{r}) + (e_q B)\Psi_{(1-S)}(\mathrm{r}) = (m_w^2 - E_w^2)\psi_S(\mathrm{r})$$

где $S = 0, 1$ — спиновые состояния

Уровни Ландау и факторизация задачи

Спектр в магнитном поле:

$$E_n(p_z) = \sqrt{p_z^2 + m^2 + (2n + 1 + s_z)eB}$$

Волновая функция основного уровня ($n = 0$):

$$\phi_{00}(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a^2}\right)$$

где $a = (eB)^{-1/2}$ — магнитная длина
Факторизация волновой функции:

$$\psi(\mathrm{r}) = \sum_{\nu} \phi_\nu(\mathrm{r}_\perp, s_z)\chi_\nu(z)$$

В сильном поле ($\hbar\omega_c \gg E_{\text{связи}}$):

- Поперечное движение "заморожено"в основном состоянии Ландау

Усреднение потенциала Корнелла

Эффективный одномерный потенциал:

$$U_{\text{eff}}(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |\phi_{00}(\rho, \phi)|^2 U\left(\sqrt{z^2 + \rho^2}\right) \rho \, d\rho \, d\phi$$

Явный вид интеграла:

$$U_{\text{eff}}(z) = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/(2a^2)} \left[-\frac{\alpha_s}{\sqrt{z^2+\rho^2}} + \sigma\sqrt{z^2+\rho^2}\right] \rho \, d\rho$$

Приближение гармонического осциллятора для $|z| \ll a$:

$$U_{\text{eff}}(z) \approx U_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2$$

где

$$U_0 = \sigma a - \frac{\alpha_s}{a}, \quad \omega^2 = \frac{\sigma + \alpha_s/a^2}{\mu a}$$

Учёт взаимодействия с термостатом пар

Эффективный потенциал от окружающих пар:

$$V_{\text{eff}}(\mathrm{r}) = gn \int d^3 r' K(|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|)|\Psi(\mathrm{r}')|^2$$

Ультрарелятивистский предел (короткодействие):

$$K(r) \approx \delta^{(3)}(\mathrm{r}) \quad \Rightarrow \quad V_{\text{eff}}(\mathrm{r}) \approx gn|\Psi(\mathrm{r})|^2$$

Уравнение Гросса-Питаевского:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2 + gn|\psi(z)|^2\right]\psi(z) = E\psi(z)$$

где $\Psi(\mathrm{r}) = \psi(z)\psi_{00}(\mathrm{r}_\perp)$

- Нелинейный член $gn|\psi(z)|^2$ — самосогласованное поле от окружающих пар — приводит к доп. конфайнменту системы

Решение нелинейного уравнения

Вариационный метод с гауссовой пробной функцией:

$$\psi(z) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta^2 z^2}{2}\right)$$

Средняя энергия:

$$\langle E \rangle = \frac{\beta^2}{4\mu} + \frac{\mu\omega^2}{4\beta^2} + \frac{gn\beta}{\sqrt{2\pi}}$$

Условие минимизации:

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \frac{\beta}{2\mu} - \frac{\mu\omega^2}{2\beta^3} + \frac{gn}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Решение:

$$\beta^2 = \beta_0^2 + \delta, \quad \delta \approx \frac{2\mu g n \beta_0}{\sqrt{2\pi}}$$

где $\beta_0^2 = \mu\omega$ (без термостата), с термостатом — уменьшение продольного размера (β увеличивается)

Квадрат модуля волновой функции в точке аннигиляции

Ключевая величина для ширины аннигиляции:

$$|\Psi(0)|^2 = |\psi(0)|^2 |\psi_{00}(0)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi a^2}$$

С учётом термостата:

$$|\Psi(0)|^2 = |\Psi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{\delta}{2\beta_0^2}\right)$$

Упрощённое выражение (сильное поле, малая a):

$$\boxed{|\Psi(0)|^2 \approx |\Psi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{gn}{\sigma a}\right)^{1/2}}$$

Ширина аннигиляции изолированной пары

Ширина в магнитном поле [Koshelkin, 2024, 2025]:

$$\Gamma_0(B) \simeq \frac{|\Psi_0(0)|^2}{M^2}$$

Асимптотика в сильном поле ($e_q B \gg m_q^2$):

$$\Gamma_0(B) \sim \frac{\sigma^{3/2}}{m_q^2}\sqrt{e_q B}$$

Учёт движения пары:

$$\Gamma(P) \sim \frac{E_P}{M^3}|\Psi(0)|^2_{\text{rest}}, \quad E_P = \sqrt{P^2 + M^2}$$

В ультрарелятивистском пределе: $\gamma \gg 1 \rightarrow$ доп. усиление аннигиляции

Термодинамическое усреднение

Распределение Бозе-Эйнштейна для пар:

$$f(P) = \frac{1}{\exp(P/kT) - 1}$$

Средняя ширина:

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\int_0^\infty \Gamma(P) f(P) 4\pi P^2 dP}{\int_0^\infty f(P) 4\pi P^2 dP}$$

Плотность пар:

$$n = \frac{g_s \zeta(3)}{\pi^2} (kT)^3$$

Температурная зависимость $|\Psi(0)|^2$:

$$|\Psi(0)|^2_{\text{rest}} \approx |\Psi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{g\zeta(3)}{\pi^2 \sigma a} (kT)^3\right)^{1/2}$$

Температурная зависимость ширины аннигиляции

Общее выражение:

$$\boxed{\langle\Gamma\rangle = \Gamma_0(B)\left(1+\frac{g\zeta(3)}{\pi^2\sigma a}(kT)^3\right)^{1/2}\frac{\pi^4}{30\zeta(3)}\frac{kT}{M^3}}$$

Высокотемпературная асимптотика ($(kT)^3 \gg \pi^2\sigma a/g\zeta(3)$):

$$\boxed{\langle\Gamma\rangle \approx C(B)\cdot(kT)^{5/2}}$$

где $C(B) \propto B^{1/4}$

- Степенная зависимость $\langle\Gamma\rangle \propto T^{5/2}$, небольшой градиент которой уже провоцирует значимое усиление аннигиляции при высоких температурах, что может давать существенный вклад в энерговыделение первых сверхновых.

Основные результаты и выводы

Результаты:

1. Построена упрощённая модель аннигиляции кварк-антикварковых пар в сильном магнитном поле с учётом термостата
2. Получено аналитическое выражение для усреднённой ширины аннигиляции
3. Проанализирована $\langle \Gamma \rangle \propto T^{5/2}$ в высокотемпературном пределе

Приложения:

- Коллективные эффекты в кварковой фазе вспышек первых сверхновых существенно усиливают аннигиляцию, что может объяснить некоторые высокоэнергетические транзиенты

Перспективы:

- Построение упрощённой модели переноса продуктов аннигиляции в оболочках сверхновых (на временах с квазистационарным приближением)