

Вычисление интегралов Фейнмана в интегрируемых квантовых теориях поля

Слущкая Ольга Юрьевна

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Научный руководитель PhD, к.ф.-м.н., доц. Алфимов М.Н.

Отчет о научно-исследовательской работе
Москва, 19 января 2026 г.

Проблема: Расчёты в таких теориях как КХД крайне сложны из-за неинтегрируемости теории.

Подход: Изучение **интегрируемых моделей КТП** как полигона для разработки вычислительных методов.

Объект изучения: Бозонная модель Тирринга в пространстве Минковского.

Цель работы: провести всестороннюю проверку гипотезы об интегрируемости бозонной модели Тирринга с четвертичным взаимодействием в старших порядках теории возмущений и доказать (опровергнуть) дуальность данной модели комплексной модели синус-Гордона.

Литература: M. Alfimov, A. Kurakin, «On bosonic Thirring model in Minkowski signature», *Nucl. Phys. B* 998, 116418 (2024).

- Двухпетлевой анализ модели Тирринга
- Проверка интегрируемости за пределами однопетлевого приближения
- Новые методы вычисления sunset-интегралов
- Проверка гипотезы о дуальности моделей

Свободный лагранжиан записывается в матричной форме:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{2}\Phi^T \hat{K} \Phi, \quad \Phi = (\beta_+ \quad \beta_- \quad \bar{\gamma} \quad \gamma)^T$$

где $\hat{K}$ — матрица кинетического оператора.

Матрица пропагаторов находится как обратная к $\hat{K}$ в импульсном представлении:

$$D(k) = -i\tilde{K}^{-1}(k)$$

Явный вид пропагаторов:

$$\langle \tilde{\beta}_+(k) \tilde{\beta}_-(-k) \rangle = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

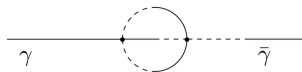
$$\langle \tilde{\tilde{\gamma}}(k) \tilde{\beta}_+(-k) \rangle = \frac{2k^-}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\langle \tilde{\tilde{\gamma}}(k) \tilde{\gamma}(-k) \rangle = \frac{im}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

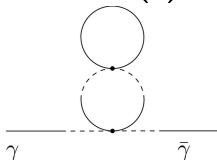
$$\langle \tilde{\gamma}(k) \tilde{\beta}_-(-k) \rangle = \frac{2k^+}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Типы двухпетлевых диаграмм

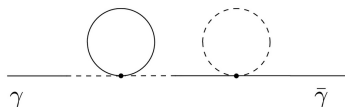
«Закатные» (Sunset)
(a)



Связанные
петли (b)



Разделенные петли (c)



Характеристики диаграмм

- **Sunset:** $J_0(k^2)$, $J_1^\pm(k)$, $J_2^{\pm\mp}(k^2)$, $J_3^{\pm\mp\pm}(k)$
- **Связанные петли:** $I_1(0)$, $I_2^{+-}(0)$
- **Разделенные петли:** Сводятся к $I_1 \times I_1$

Интегралы для двухточечной функции:

$$J_0(k^2) = -im^3(3m^2 A(k^2) + B(k^2))$$

$$J_1^\pm(k) = -\frac{2i}{3} \frac{k^\pm}{m} J_0(k^2)$$

$$J_2^{+-}(k^2) = -\frac{k^2 - 3m^2}{6m^2} J_0(k^2) + \frac{i}{2m} I_1^2$$

Контрчлены:

- $\delta_m^{(1)}$ устраняет расходимости из диаграмм (b) и (c)
- $\delta_m^{(2)}$ необходим для диаграмм (a)

$$\delta_m^{(2)} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon}(\dots) \right)$$

Ключевая сложность: Вычисление sunset-интегралов, особенно типа J_3 , содержащих произведения свето-конусных компонент импульсов:

$$J_3^{\pm\pm\mp}(k) = \int \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^4} \frac{8p_1^\pm p_2^\pm (k - p_1 - p_2)^\mp}{(p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)((k - p_1 - p_2)^2 - m^2)}$$

Предлагаемая идея:

Представить числители sunset-интегралов в виде **скалярных произведений** $(p_i \cdot p_j)$ и преобразовать их до сокращения со знаменателями, что может привести к упрощению и **устранению части расходимостей**.

Цель: Разработать эффективный метод вычисления J_3 и других сложных sunset-интегралов для получения конечной двухпетлевой амплитуды.

Диаграмма (а)

3 скалярных пропагатора:

$$g^4 J_0 \frac{m^2 + k^2}{(k^2 - m^2)^2}$$

2 скалярных + 1 смешанный:

$$-g^4 \frac{2im}{(k^2 - m^2)^2} (k^+ J_1^- + k^- J_1^+)$$

2 смешанных + 1 скалярный:

$$-g^4 J_2^{+-} \frac{m^2 + k^2}{(k^2 - m^2)^2}$$

3 смешанных:

$$g^4 \frac{2im}{(k^2 - m^2)^2} (k^+ J_3^{-+-} + k^- J_3^{+--})$$

Суммарный вклад sunset-диаграмм

Двухточечная корреляционная функция:

$$\langle \tilde{\gamma}(k) \tilde{\gamma}(-k) \rangle = g^4 \frac{m^2 + k^2}{(k^2 - m^2)^2} (J_0 - J_2^{+-}) - \frac{2im g^4}{(k^2 - m^2)^2} (k^+ J_1^- + k^- J_1^+ - k^+ J_3^{+-} - k^- J_3^{+-})$$

С учетом симметрии:

$$= g^4 \frac{m^2 + k^2}{(k^2 - m^2)^2} (J_0 - J_2^{+-}) - \frac{4im g^4}{(k^2 - m^2)^2} k^+ (J_1^- - J_3^{+-})$$

Явная подстановка интегралов:

$$= -g^4 \frac{im}{(k^2 - m^2)^2} \iint \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} \\ \times [(m^2 + k^2)(m^2 + 4p_1^+ p_2^-) - 4k^+ (2m^2 p_1^- + 8p_1^- p_2^- (k - p_1 - p_2)^+)]$$

где $D = (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)((k - p_1 - p_2)^2 - m^2)$

Преобразование $k^+ J_3^{-+-} + k^- J_3^{+--}$

Исходное:

$$N = 8 [k^+ p_1^- p_2^- q^+ + k^- p_1^+ p_2^+ q^-], \quad q = k - p_1 - p_2$$

Разложение через скаляры и ε -тензор:

$$k^+ p_1^- = \frac{k \cdot p_1 - \varepsilon(k, p_1)}{4}, \quad p_2^- q^+ = \frac{p_2 \cdot q + \varepsilon(p_2, q)}{4}$$

$$k^- p_1^+ = \frac{k \cdot p_1 + \varepsilon(k, p_1)}{4}, \quad p_2^+ q^- = \frac{p_2 \cdot q - \varepsilon(p_2, q)}{4}$$

После преобразований:

$$N = (k \cdot p_1)(p_2 \cdot q) - \varepsilon(k, p_1)\varepsilon(p_2, q)$$

Используем тождество:

$$\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$$

Подставляем $q = k - p_1 - p_2$:

$$N = 2(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) - p_2^2(k \cdot p_1) - p_1^2(k \cdot p_2) - k^2(p_1 \cdot p_2)$$

Общее выражение:

$$\langle \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} \rangle_{\text{sunset}}^{(2)} = -g^4 \frac{im}{(k^2 - m^2)^2} \iint \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} [(m^2 + k^2)(m^2 + p_1 p_2) - 2N]$$

Подставляем N :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} \rangle_{\text{sunset}}^{(2)} &= -g^4 \frac{im}{(k^2 - m^2)^2} \iint \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} \\ &\times [(m^2 + k^2)(m^2 + p_1 \cdot p_2) - 4(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \\ &+ 2p_2^2(k \cdot p_1) + 2p_1^2(k \cdot p_2) + 2k^2(p_1 \cdot p_2)] \end{aligned}$$

Выделяем $p_i^2 - m^2$:

$$p_i^2 = (p_i^2 - m^2) + m^2$$

Итоговое выражение:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\gamma} \tilde{\gamma} \rangle_{\text{sunset}}^{(2)} &= -g^4 \frac{im}{(k^2 - m^2)^2} \iint \frac{d^2 p_1 d^2 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{D} \\ &\times [(m^2 + k^2)(m^2 + p_1 \cdot p_2) - 4(k \cdot p_1)(k \cdot p_2) \\ &+ 2m^2(k \cdot p_1 + k \cdot p_2) + 2k^2(p_1 \cdot p_2) \\ &+ 2(p_1^2 - m^2)(k \cdot p_2) + 2(p_2^2 - m^2)(k \cdot p_1)] \end{aligned}$$

В ходе проделанной работы

- Изучена бозонная модель Тирринга в пространстве Минковского: построение правил Фейнмана, вычисление однопетлевых поправки к двухточечным и четырёхточечным функциям Грина, расчет матриц рассеяния и S -матриц в первом порядке теории возмущений, вычисление двухпетлевых поправок к пропагаторам.
- Проведено преобразование числителей sunset-интегралов к скалярным произведениям импульсов. Это позволило частично сократить сложные структуры и выделить элементарные интегралы.

Спасибо за внимание!