

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МИФИ» (НИЯУ МИФИ)

УДК 539.1

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

**РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПОТЕЗ ОПИСАНИЯ СОБЫТИЙ  
ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПЧД**

Научный руководитель

\_\_\_\_\_ Белоцкий К.М.

Студент

\_\_\_\_\_ Мучкинова Б.Ю.

Москва 2026

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>3 Цель</b>	<b>5</b>
<b>4 Дифференциальная частота</b>	<b>7</b>
<b>5 Видимая скорость и эффективность</b>	<b>9</b>
5.1 Ожидаемое число событий . . . . .	9
5.2 Расчет вероятностей гипотез . . . . .	9
<b>6 Результаты и интерпретация</b>	<b>11</b>

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие LIGO/Virgo гравитационных волн от слияний десятков черных дыр солнечной массы привело к повышенному интересу к первичным черным дырам (ПЧД) как кандидатам в скрытую массу. ПЧД — это черные дыры, которые образуются в ранней Вселенной. Наиболее часто изучаемым механизмом образования является коллапс больших возмущений плотности, вызванных инфляцией. ПЧД могут формировать скопления. Это может происходить за счет случайного (пуассоновского) пространственного распределения одиночных ПЧД или за счет специфики самого механизма их рождения (например, коллапс доменных стенок, образованных в результате фазовых переходов на стадии инфляции) [1–9].

Одним из наблюдательных проявлений ЧД может являться эффект гравитационного микролинзирования удаленных светил (звезд, квазаров и др.). Звездное микролинзирование — это временное усиление светимости, которое возникает, когда компактный объект (линза) проходит близко к лучу зрения звезды. Различные обзоры микролинзирования наложили жесткие ограничения на количество компактных объектов в гало Млечного Пути.

При исследовании гравитационных линз часто оказывается достаточным рассмотрение эффекта в приближение тонкой линзы. Это сильно упрощает вычисления, и оправдано тем, что характерные масштабы (расстояние от наблюдателя до источника и линзы) много больше, чем характерный размер линзы (т.е. области, где преимущественно происходит отклонение лучей света).

Кластеры ПЧД могут формироваться в ранней Вселенной в результате различных механизмов, включая:

- Коллапс крупномасштабных возмущений плотности
- Фазовые переходы в инфляционный период
- Распад космологических топологических дефектов

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Конечной целью исследования является пересмотр результатов экспериментов MACHO, OGLE и др, в рамках представления о кластерной структуре первичных черных дыр. Мы используем термин «кластер» по отношению ПЧД во избежание путаницы с термином «скопление», преимущественно использующееся для звезд. ПЧД массы  $m$  могут быть собраны в кластеры массы  $M_{\text{cl}}$ . Они могут подпадать под ограничения на одиночные ПЧД как с массами  $m$ , так и  $M_{\text{cl}}$  в зависимости от параметров (компактности) кластера и вида наблюдений (ограничений). Но также могут их и избегать! Наша общая работа нацелена на поиск таких параметров, чтобы избегать максимально и те (на  $m$ ), и те (на  $M_{\text{cl}}$ ) ограничения. Данная работа изучает возможность ослабления ограничения на  $m \approx M_{\odot}$  по микролинзированию. Работа по пересмотру ограничения на ПЧД массы  $M \approx 10^4 M_{\odot}$  ведется отдельно.

- $R = 1$  пк – радиус кластера;
- $M = 10^4 M_{\odot}$  – масса кластера;
- $r_0 = 0.1R$  – радиус ядра кластера («кора»);
- профиль плотности кластера ПЧД, который задается следующим соотношением:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{8r_0^3}, & 0 < r < r_0 \\ \frac{\rho_0}{(r + r_0)^3}, & r_0 < r < R \end{cases}.$$

- $f(m) = \delta(m - M_{\odot})$ ,  $m^{-2}$ , PDF<sub>log-normal</sub> – распределение ПЧД в кластере по массам.

Угол Хвольсона-Эйнштейна определен как

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (2.1)$$

где  $D_d$ ,  $D_s$ ,  $D_{ds}$  - расстояния между наблюдателем, линзой и источником.

### 3. ЦЕЛЬ

Целью работы являлась проверка трех гипотезы о составе темного гало Млечного Пути.

**Гипотеза  $H_1$ : кластеры одинаковых ПЧД**

Масса каждой ПЧД фиксирована:

$$\psi_{H_1}(M) = \delta(M - M_{\text{PBH}}), \quad M_{\text{PBH}} = 1 M_\odot.$$

**Гипотеза  $H_2$ : одиночные ПЧД с логнормальным распределением масс**

В расчетах использовалось усеченное логнормальное распределение в диапазоне  $[M_{\min}, M_{\max}]$ :

$$\psi_{H_2}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{M \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln(M/M_\odot) - \mu_{\ln})^2}{2\sigma_{\ln}^2} \right], \quad M \in [M_{\min}, M_{\max}],$$

$$\mu_{\ln} = -0.58, \quad \sigma_{\ln} = 1.26, \quad M_{\min} = 0.1 M_\odot, \quad M_{\max} = 100 M_\odot.$$

**Гипотеза  $H_3$ : смешанная (кластерная + одиночная)**

$$\psi_{H_3}(M) = f_{\text{cl}} \delta(M - M_0) + (1 - f_{\text{cl}}) \psi_{H_2}(M), \quad f_{\text{cl}} = 0.5, \quad M_0 = 1 M_\odot.$$

### ГРАФИКИ ЭФФЕКТИВНОСТЕЙ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

Ниже приведены использованные кривые эффективностей детектирования  $\varepsilon_j(t_E)$  для экспериментов MACHO [10], EROS-2 [11] и OGLE-II [12]:



(a) Эффективность детектирования MACHO. (b) Эффективность детектирования EROS-2. (c) Эффективность детектирования OGLE-II.

Рисунок 3.1 — Кривые эффективностей детектирования для экспериментов MACHO, EROS-2 и OGLE-II.

В таблице 3.1 приведены параметры экспериментов.

Таблица 3.1 — Основные параметры экспериментов микролинзирования.

Эксперимент	$N_*$ (звёзд)	$T_{\text{obs}}$ (лет)	Область	Частота съёмки
MACHO	$1.1 \times 10^7$	7.5	LMC	1–2 дня $^{-1}$
EROS-2	$3.3 \times 10^7$	6.7	LMC, SMC	2–3 дня $^{-1}$
OGLE-II	$1.2 \times 10^7$	4.0	LMC, SMC	1 день $^{-1}$

В таблице 3.2 приведены события и времена Эйнштейна для трех экспериментов.

Таблица 3.2 — Длительности зарегистрированных событий микролинзирования  $t_E$  (дни).

Эксперимент	Количество событий $N_{\text{ev}}$	$t_E$ (дни)
MACHO	17	34.4, 34.2, 45.4, 75.6, 91.6, 102.9, 43.9, 66.4, 100.1, 36.8, 74.2, 72.7, 93.2, 229.3, 85.2, 85.2
EROS-2	0	—
OGLE-II	1	89.7

## 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЧАСТОТА

Дифференциальная скорость событий (на одну звезду) для гипотезы  $H$ :

$$\frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E) = \int_0^{D_S} dD_L \int dM \underbrace{n_{\text{lens}}^{(H)}(D_L, M)}_{\text{число линз}} \underbrace{\mathcal{K}(D_L, M, t_E)}_{\text{кинетика/геометрия}} \underbrace{\psi_H(M)}_{\text{массовое распределение гипотезы}}. \quad (4.1)$$

**Кинетика/геометрия (общая для всех гипотез при  $v_T = v_0 = \text{const}$ ).**

$$\mathcal{K}(D_L, M, t_E) = \left[ 2u_T R_E(D_L, M) v_0 \right] \delta_\sigma \left( t_E - \frac{R_E(D_L, M)}{v_0} \right), \quad (4.2)$$

где

$$R_E(D_L, M) = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}}. \quad (4.3)$$

Для численной устойчивости используется сглаженная дельта-функция:

$$\delta(t) \rightarrow \delta_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \sigma_{\text{frac}} t_E, \quad \sigma_{\text{frac}} = 0.05. \quad (4.4)$$

**Гипотеза  $H_1$ : кластерная (одинаковая масса ПЧД)**

**Число линз.** В гладком усреднённом описании:

$$n_{\text{lens}}^{(H_1)}(D_L, M) = \frac{\rho_{\text{NFW}}(R(D_L))}{M}. \quad (4.5)$$

Если учитывать вариации по полям/времени из-за кластеризации, вводится индикатор пересечения кластера:

$$n_{\text{lens}}^{(H_1)}(D_L, M; f, t) = n_{\text{in}} \chi_{\text{cl}}(f, t; D_L), \quad n_{\text{in}} = \frac{N_{\text{cl}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{cl}}^3}, \quad \chi_{\text{cl}} \in \{0, 1\}. \quad (4.6)$$

**Массовое распределение.**

$$\psi_{H_1}(M) = \delta(M - M_{\text{PBH}}), \quad M_{\text{PBH}} = 1 M_\odot. \quad (4.7)$$

**Гипотеза  $H_2$ : одиночные ПЧД (логнормальное распределение масс + NFW)**

**Число линз.**

$$n_{\text{lens}}^{(H_2)}(D_L, M) = \frac{\rho_{\text{NFW}}(R(D_L))}{M}. \quad (4.8)$$

**Массовое распределение.**

$$\psi_{H_2}(M) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{1}{M \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln(M/M_\odot) - \mu_{\ln})^2}{2\sigma_{\ln}^2} \right], \quad M \in [M_{\min}, M_{\max}], \quad (4.9)$$

$$\mu_{\ln} = -0.58, \quad \sigma_{\ln} = 1.26, \quad M_{\min} = 0.1 M_\odot, \quad M_{\max} = 100 M_\odot, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{N} = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \frac{1}{M \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln(M/M_\odot) - \mu_{\ln})^2}{2\sigma_{\ln}^2} \right] dM. \quad (4.11)$$

**Гипотеза  $H_3$ : смесь (кластерная + одиночная)** Гипотеза  $H_3$  задаётся как сумма двух компонент с долей кластерной части  $f_{\text{cl}}$ :

$$\frac{d\Gamma_{H_3}}{dt_E}(t_E; f, t) = f_{\text{cl}} \frac{d\Gamma_{H_1}}{dt_E}(t_E; f, t) + (1 - f_{\text{cl}}) \frac{d\Gamma_{H_2}}{dt_E}(t_E), \quad f_{\text{cl}} = 0.5. \quad (4.12)$$

## 5. ВИДИМАЯ СКОРОСТЬ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Гипотеза  $H$  задаёт, как часто и с какими длительностями  $t_E$  должны происходить события микролинзирования. Однако эксперимент видит не все события: вероятность обнаружить событие длительности  $t_E$  задаётся функцией эффективности детектирования  $\varepsilon_j(t_E)$ .

Поэтому вводим *видимую* (учтённую с эффективностью) скорость событий в обзоре  $j$ :

$$\Gamma_{j,H}^{\text{vis}} = \int \varepsilon_j(t_E) \frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E) dt_E.$$

Удобно разделить дифференциальную скорость на полное число событий  $C_H$  и получить форму распределения по длительностям событий  $\phi_H(t_E)$ :

$$\phi_H(t_E) = \frac{1}{C_H} \frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E), \quad C_H = \int \frac{d\Gamma_H}{dt_E}(t_E) dt_E,$$

тогда

$$\Gamma_{j,H}^{\text{vis}} = C_H A_{j,H}, \quad A_{j,H} = \int \varepsilon_j(t_E) \phi_H(t_E) dt_E.$$

Здесь  $A_{j,H}$  можно понимать как *среднюю эффективность* обзора  $j$ , усреднённую по тем длительностям  $t_E$ , которые предсказывает гипотеза  $H$ : то есть это доля событий, которые реально будут обнаружены экспериментом, если верна гипотеза  $H$ .

### 5.1. ОЖИДАЕМОЕ ЧИСЛО СОБЫТИЙ

Ожидаемое число событий в обзоре  $j$  при гипотезе  $H$  равно

$$\mu_{j,H} = N_{*,j} T_j \Gamma_{j,H}^{\text{vis}}$$

Смысл прост: мы берём, сколько звёзд наблюдали ( $N_{*,j}$ ), как долго наблюдали ( $T_j$ ), и умножаем на видимую скорость событий на одну звезду.

### 5.2. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПОТЕЗ

Пусть  $\lambda_j$  — истинная (но неизвестная) нормировка видимой скорости событий в обзоре  $j$  (простыми словами, сколько событий должно быть в об-

зоре, если эффективность детектирования равна 1). Тогда распределение по счётчику имеет вид

$$P(N_j \mid \lambda_j, H) = \text{Poisson}(\lambda_j A_{j,H}).$$

Чтобы не фиксировать  $\lambda_j$ , задаём для неё априорное распределение (гамма-априор,  $\lambda_j \sim \Gamma(a, b)$ ,  $a = b = 1$ ) и усредняем по  $\lambda_j$ , получая вклад по счётчику:

$$Z_{j,H}^{\text{count}} = P(N_j \mid H) = \int_0^\infty P(N_j \mid \lambda_j, H) p(\lambda_j) d\lambda_j.$$

Физически  $Z_{j,H}^{\text{count}}$  показывает, насколько хорошо гипотеза  $H$  объясняет *само количество событий*  $N_j$  с учётом неопределённости в нормировке.

Кроме счётчика, важна и *форма* распределения длительностей событий. Она даёт множитель

$$L_{j,H}^{\text{shape}} = \prod_{i \in D_j} \frac{\varepsilon_j(t_{E,i}) \phi_H(t_{E,i})}{A_{j,H}},$$

который измеряет, насколько хорошо предсказанная форма  $\phi_H(t_E)$  согласуется с наблюдаемыми длительностями  $\{t_{E,i}\}$  (иначе говоря, вероятность задетектировать событие именно с такой длительностью  $t_E$  делить на долю событий, которые реально будут задетектированы).

Итоговая обоснованность (evidence) гипотезы:

$$Z_H = P(D \mid H) = \prod_j Z_{j,H}^{\text{count}} L_{j,H}^{\text{shape}}.$$

Если априоры гипотез равны, то апостериорные вероятности получаются нормировкой:

$$P(H_k \mid D) = \frac{Z_{H_k}}{\sum_\ell Z_{H_\ell}}$$

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

$$P(H_1 | D) = 0.00^{+0.49}_{-0.00}, \quad P(H_2 | D) = 1.00^{+0.00}_{-0.38}, \quad P(H_3 | D) = 0.00^{+0.49}_{-0.00}.$$

**Вывод.** Гипотеза  $H_2$  (одиночные ПЧД с логнормальным распределением масс) имеет наибольший evidence и устойчиво максимальную апостериорную вероятность.  $H_1$  и  $H_3$  значительно уступают по согласованности с совокупностью данных MACHO, EROS-2 и OGLE.

При этом, полученные результаты основаны на распределении только по продолжительности событий. Остается нереализованной возможность оценки вероятности гипотез, использующих сочетание временного распределения и распределению по положению на небе. Ранее был проведен предварительный анализ каждого эффекта по отдельности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] N. Afshordi, P. McDonald and D.N. Spergel, *Primordial black holes as dark matter: The Power spectrum and evaporation of early structures*, *Astrophys. J. Lett.* **594** (2003) L71 [[astro-ph/0302035](#)].
- [2] M.Y. Khlopov, R.V. Konoplich, S.G. Rubin and A.S. Sakharov, *First-order phase transitions as a source of black holes in the early universe*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 153.
- [3] S.G. Rubin, M.Y. Khlopov and A.S. Sakharov, *Primordial black holes from nonequilibrium second order phase transition*, *Grav. Cosmol.* **6** (2000) 51 [[hep-ph/0005271](#)].
- [4] S.G. Rubin, A.S. Sakharov and M.Y. Khlopov, *The Formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe*, *J. Exp. Theor. Phys.* **91** (2001) 921 [[hep-ph/0106187](#)].
- [5] M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka and S. Yokoyama, *Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 061101 [[1603.08338](#)].
- [6] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka and K.S. Thorne, *Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries*, *Astrophys. J. Lett.* **487** (1997) L139 [[astro-ph/9708060](#)].
- [7] K. Ioka, T. Chiba, T. Tanaka and T. Nakamura, *Black hole binary formation in the expanding universe: Three body problem approximation*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 063003 [[astro-ph/9807018](#)].
- [8] N. Kaiser, *On the Spatial correlations of Abell clusters*, *Astrophys. J. Lett.* **284** (1984) L9.
- [9] C. Animali and V. Vennin, *Clustering of primordial black holes from quantum diffusion during inflation*, [2402.08642](#).
- [10] MACHO collaboration, *The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations*, *Astrophys. J.* **542** (2000) 281 [[astro-ph/0001272](#)].

- [11] EROS-2 collaboration, *Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*, *Astron. Astrophys.* **469** (2007) 387 [[astro-ph/0607207](#)].
- [12] L. Wyrzykowski et al., *The OGLE View of Microlensing towards the Magellanic Clouds. III. Ruling out sub-solar MACHOs with the OGLE-III LMC data*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **413** (2011) 493 [[1012.1154](#)].