

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Кафедра физики элементарных частиц (№40)

Отчет по НИРС на тему:

**Выделение одиночных мюонов, регистрируемых
атмосферным черенковским телескопом TAIGA-IACT**

Место выполнения: МГУ имени М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени
Д.В. Скобельцына, Лаборатория наземной гамма-астрономии

Студент М24-114: Горбунов Д.С.

Руководитель работы: Волчугов П.А. (младший научный сотрудник)

Москва – 2026 г.

Оглавление

| | |
|--|----|
| 1. Введение..... | 4 |
| 1.1. Цель и задачи..... | 4 |
| 1.2. Космические лучи..... | 5 |
| 1.3. Гамма-обсерватория TAIGA..... | 6 |
| 1.4. TAIGA-IACT..... | 7 |
| 2. Черенковское излучение..... | 8 |
| 2.1. Эффект Вавилова-Черенкова..... | 8 |
| 2.2 Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов..... | 8 |
| 3. Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец..... | 9 |
| 4. Оценка углового размера пикселя в фокальной плоскости..... | 10 |
| 5. Выделение событий от одиночных мюонов..... | 11 |
| 5.1. Критерии отбора событий..... | 11 |
| 5.2. Критерий величины радиуса черенковского кольца..... | 12 |
| 5.3. Критерий длины дуги кольца..... | 13 |
| 5.4. Распределение радиусов черенковских колец..... | 14 |
| 5.5. Распределение интенсивности в черенковском кольце..... | 16 |
| 5.6. Расчёт граничных азимутальных углов пикселя..... | 19 |
| 5.7. Расчёт длины хорды в плоскости отражателя..... | 23 |
| 5.8. Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель..... | 27 |

| | |
|--|----|
| 5.9. Расчёт прицельного параметра и квантовой эффективности отдельного события..... | 31 |
| 5.10. Распределение квантовой эффективности..... | 33 |
| Заключение..... | 36 |
| Список использованной литературы..... | 37 |
| Приложение..... | 38 |

1. Введение

1.1. Цель и задачи работы

Цель работы:

Определить интегральную квантовую чувствительность телескопа TAIGA-IACT.

Основные задачи:

- 1) Оценить ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени;
- 2) Разработать алгоритм выделения изображений от одиночных мюонов, регистрируемых телескопом TAIGA-IACT;
- 3) Разработать математическую модель распределения интенсивности черенковского излучения по дуге кольца;
- 4) Провести мюонную калибровку на основании отобранных мюонных колец для моделируемых и экспериментальных событий.

Актуальность:

Наземная гамма-астрономия использует для регистрации гамма-квантов косвенный метод - черенковское излучение ШАЛ (широких атмосферных ливней). Атмосферные черенковские телескопы (АЧТ) способны измерять потоки фотоэлектронов от черенковского излучения, но не фотонов. Таким образом, чтобы достоверно измерить энергию первичных частиц, необходимо знать точную связь числа черенковских фотонов с числом зарегистрированных фотоэлектронов. Одиночные мюоны, регистрируемые АЧТ, позволяют установить эту связь благодаря возможности надёжного теоретического расчёта числа испущенных фотонов и числа зарегистрированных и таким образом оценить искомую пропускную способность, то есть интегральную квантовую эффективность телескопа.

1.2. Космические лучи

Космическими лучами называют элементарные частицы, фотоны и ядра атомов, движущиеся с высокими энергиями в космическом пространстве. Центральным вопросом физики космических лучей является объяснение наблюдаемого возле Земли потока космических лучей.

Физика космических лучей также изучает:

- механизмы, приводящие к возникновению и ускорению космических лучей;
- частицы космических лучей, их природу и свойства;
- явления, вызванные частицами космических лучей в космическом пространстве, атмосфере Земли и планет, такие как ШАЛ (широкие атмосферные ливни).

Изучение потоков высокоэнергетичных заряженных и нейтральных космических частиц, попадающих на границу атмосферы Земли, является важнейшей экспериментальной задачей.

Космические лучи могут возникать:

- вне нашей Галактики;
- в нашей Галактике;
- на Солнце;
- в межпланетном пространстве.

Первичными принято называть внегалактические, галактические и солнечные космические лучи.

Вторичными космическими лучами принято называть потоки частиц, возникающих под действием первичных космических лучей в атмосфере Земли и регистрирующихся на поверхности Земли.

Космические лучи являются составляющей естественной радиации на поверхности Земли и в атмосфере. Диапазон энергий частиц в космических лучах велик — от 10^6 эВ до $5 \cdot 10^{21}$ эВ. По количеству частиц космические лучи на 92 % состоят из протонов, на 6 % — из ядер гелия, около 1 % составляют более тяжёлые элементы, и около 1 % приходится на электроны.

Для их регистрации с одной стороны применяются прямые методы, такие как баллонные эксперименты в верхних слоях атмосферы и на орбите Земли. Преимуществом таких методов является возможность точного определения заряда приходящих частиц, а недостатком — малая площадь регистрации. Таким образом, чтобы набрать существенную статистику для высокоэнергетических космических лучей требуется значительное время, так как интенсивность их потока значительно ниже, чем у низкоэнергетичных. Кроме того, заряженные частицы подвержены влиянию магнитных полей в космическом пространстве, из-за чего теряется информация о положении их источника.

С другой стороны применяются косвенные методы, связанные с измерением параметров широких атмосферных ливней (ШАЛ), вызываемых их ядрами и высокоэнергетическими гамма-квантами. Такие измерения можно проводить и на поверхности Земли, что за счёт увеличения площади регистрации даёт возможность уменьшить время измерения. Кроме того, гамма-кванты не подвержены действию магнитного поля и позволяют достаточно точно определить положение источника космических лучей.

1.3. Астрофизический комплекс TAIGA

Гамма-обсерватория TAIGA (Tunka Advanced Instrument for cosmic rays and Gamma Astronomy)¹ нацелена на решение актуальных вопросов гамма-астрономии и физики космических лучей путём измерения параметров широких атмосферных ливней, вызванных взаимодействием высокоэнергетичных частиц этих лучей с атмосферой. Измеряя различные параметры, можно восстановить направление прихода, заряд и энергию

частиц. Одна из решаемых задач – ответить на вопрос о происхождении космических лучей в диапазоне от 10^{14} до 10^{18} эВ. Комплекс состоит из установок Tunka-133, Tunka-Grande, TAIGA-HiSCORE, TAIGA-MUON, TAIGA-IACT.

1.4. Установка TAIGA-IACT

Телескоп TAIGA-IACT² обладает сферическим отражателем диаметром 2,15 м и фокусным расстоянием 4,75 м. Регистрирующая камера телескопа имеет 22 кластера ФЭУ, почти каждый из которых содержит 28 фотоумножителей (всего порядка 600 фотоумножителей). Каждый пиксель имеет диаметр 3 см и обзореваает $0,36^\circ$ небесной сферой. Угловой радиус поля зрения телескопа составляет $4,8^\circ$.



Рисунок 1. Фотография первых двух телескопов установки TAIGA-IACT

2. Черенковское излучение

2.1. Эффект Вавилова-Черенкова

Эффект Вавилова-Черенкова заключается в свечении, вызываемом в прозрачной среде заряженной частицей, движущейся со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде.

Детекторы, регистрирующие черенковское излучение, широко используются в физике высоких энергий для регистрации релятивистских частиц и определения их скорости и направления движения. Зная скорость и массу частицы, можно найти её кинетическую энергию.

2.2. Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов

Чтобы отбирать и анализировать события от одиночных мюонов важно, чтобы черенковский угол не зависел от их энергии, что наблюдается при высоких энергиях.

На высоте гамма-обсерватории TAIGA $h = 700$ м показатель преломления атмосферы составляет $n = 1,0002614$. При данном показателе преломления максимально возможный черенковский угол составляет $\theta_{\text{пред}} = 1,31^\circ$. С учётом допустимого отклонения, выбранного равным $p = 5\%$, минимальный черенковский угол, при котором зависимостью от энергии можно пренебречь, составляет $\theta_{\text{крит}} = 1,24^\circ$. Под таким углом будут излучать мюоны, обладающие энергией $E_{\text{крит}} = 14,4$ ГэВ. Также можно рассчитать пороговую энергию черенковского излучения для мюонов при данном показателе преломления – $E_{\text{порог}} = 4,6$ ГэВ.

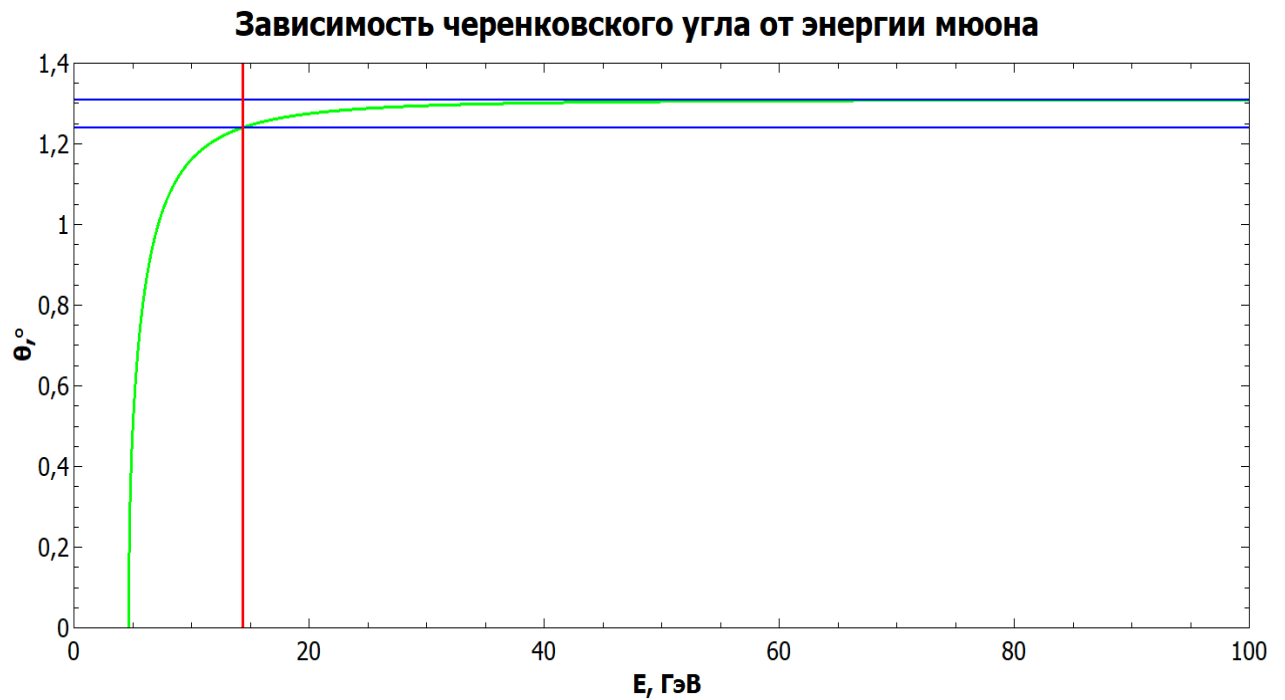


График 2. Зависимость энергии мюонов от раствора черенковского конуса

3. Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец

Для выделения событий от одиночных мюонов из фона ШАЛов и прочих шумов важно знать, какой поток одиночных мюонов проходит через зеркало телескопа в единицу времени.

На основании справочных данных³ был получен поток одиночных мюонов в единицу времени в единицу телесного угла на единичную площадку для найденной ранее минимально допустимой энергии:

$$\text{Для } E > E_1 = 12,51 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 = 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

$$\text{Для } E > E_2 = 16,68 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 = 3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

Так как для нашей энергии нет явного значения потока, то произведём линейную интерполяцию:

$$\text{Для } E > E_{\text{крит}} = 14,4 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_{\mu}}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

Тогда ожидаемое количество мюонных колец можно найти, проинтегрировав полученное значение по площади зеркала и телесному углу:

$$\frac{dN_{\mu}}{dt} = \left(\frac{dN_{\mu}}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} (1 - \cos \theta_{\text{пред}}) 2\pi^2 R^2 = 0,110 \frac{\text{мюон}}{\text{с}} = 6,60 \frac{\text{мюон}}{\text{мин}} = 396 \frac{\text{мюон}}{\text{час}}$$

4. Оценка углового размера пикселя в фокальной плоскости

Для расчёта потока черенковских фотонов, попадающих в конкретный пиксель, необходимо знать его угловую величину. Для этого рассмотрим оптическую схему сферического зеркала.

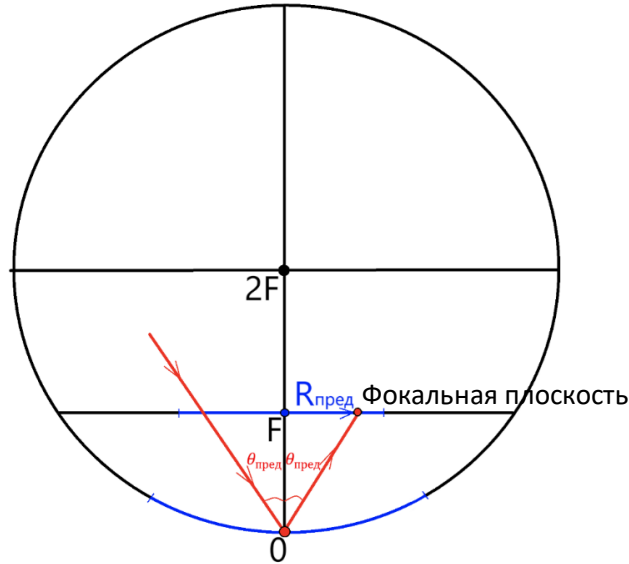


Рисунок. 3. Радиус черенковского кольца в фокальной плоскости телескопа

Фокусное расстояние телескопа:

$$F = 4,75 \text{ м} = 475 \text{ см}$$

Радиус черенковского кольца в фокальной плоскости телескопа:

$$\text{tg } \theta_{\text{пред}} = \frac{R_{\text{пред}}}{F} \Leftrightarrow R_{\text{пред}} = F \text{ tg } \theta_{\text{пред}} = 475 \text{ см} * \text{tg } 1,31^\circ = 10,86 \text{ см}$$

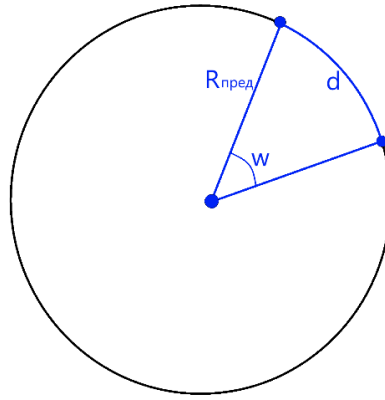


Рисунок 4. Линейный и угловой размеры пикселя в фокальной плоскости

Линейный размер пикселя:

$$d = 3 \text{ см}$$

Угловой радиус поля зрения телескопа:

$$i_{\text{пред}} = 4,8^\circ$$

Так как угол $i_{\text{пред}}$ относительно мал, то в первом приближении будем считать, что все мюоны падают перпендикулярно поверхности зеркала, а значит все пиксели будут находиться на расстоянии $R_{\text{пред}}$ от центра фокальной плоскости. Тогда угловой размер пикселя:

$$\frac{\omega}{360^\circ} = \frac{d}{2\pi R_{\text{пред}}} \Leftrightarrow \omega = 360^\circ \frac{d}{2\pi R_{\text{пред}}} = 360^\circ \frac{3 \text{ см}}{2 * 3,14 * 10,86 \text{ см}} = 15,83^\circ$$

5. Выделение событий от одиночных мюонов

5.1. Критерии отбора событий

Проекцией черенковского конуса на плоскость зеркала при малом угле падения мюона i будет круг, который после прохождения сферического зеркала преобразуется в кольцо в фокальной плоскости телескопа. При этом азимутальные углы падения относительно центра кольца после прохождения зеркала остаются неизменными. Исходя из этого, следует, что число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца в фокальной

плоскости, будет пропорционально площади соответствующего сегмента зеркала, которую покрыл конус черенковского излучения.

Как было показано ранее, радиус черенковского кольца, начиная с энергии $E_{\text{крит}} = 14,4$ ГэВ мы будем считать постоянным и равным $R_{\text{пред}} = 10,86$ см.

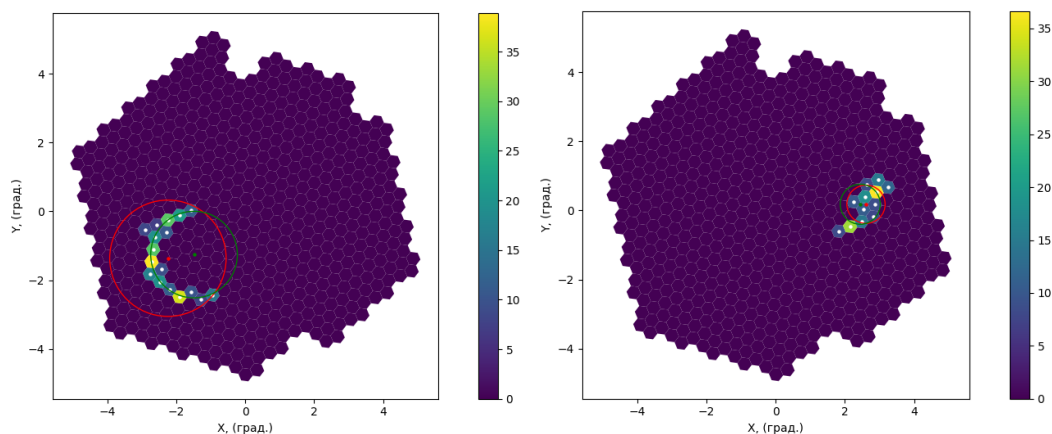
Однако на практике, детектируется и множество других событий, вызванных ШАЛ и шумовыми событиями, которые в отличие от черенковских колец мюонов не обладают радиусом, однако алгоритм тем не менее присваивает им его. Для отбора корректных событий используется два критерия:

- **Критерий величины радиуса** – допускается отклонение от теоретического значения в $R_0 = 2$ см;
- **Критерий длины дуги** – она должна быть больше 180° .

5.2. Критерий величины радиуса черенковского кольца

Для определения радиуса колец используется два метода:

- **Грубый метод** – путём усреднения координат пикселей находится центр кольца и затем путём усреднения расстояний от пикселей до этого центра находится радиус кольца R и относительное отклонение пикселей δ_R ;
- **Преобразование Хафа⁴** – фазовое пространство координат пикселей разбивается на прямоугольные области, в каждой из которых считается радиус черенковского кольца R_H . Прямоугольник, обладающий наименьшим относительным отклонением δ_H – считается центром кольца. Данный метод требует значительно больших вычислительных возможностей по сравнению с грубым, однако является гораздо более эффективным.



Событие №6037:

$$R = 14,0 \text{ см} (\delta_R = 37\%)$$

$$R_H = 10,4 \text{ см} > 10,86 \text{ см} - 2 \text{ см} (\delta_H = 8\%)$$

критерий выполнен

Событие №4491:

$$R = 4,6 \text{ см} (\delta_R = 61\%)$$

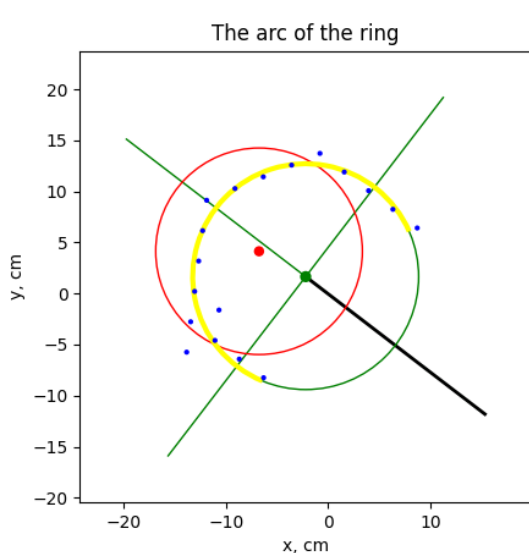
$$R_H = 4,8 \text{ см} < 10,86 \text{ см} - 2 \text{ см} (\delta_H = 41\%)$$

критерий НЕ выполнен

*Рисунок 5. Примеры использования критерия величины
радиуса черенковского кольца*

5.3. Критерий длины дуги кольца

Из геометрических соображений (см. приложение) длина дуги черенковского кольца должна быть больше 180° . В рамках реализованного в работе алгоритма вычисляются попарные расстояния между соседними пикселями, и наибольшее из них считается разрывов, а, соответственно, оставшаяся часть – дугой черенковского кольца.



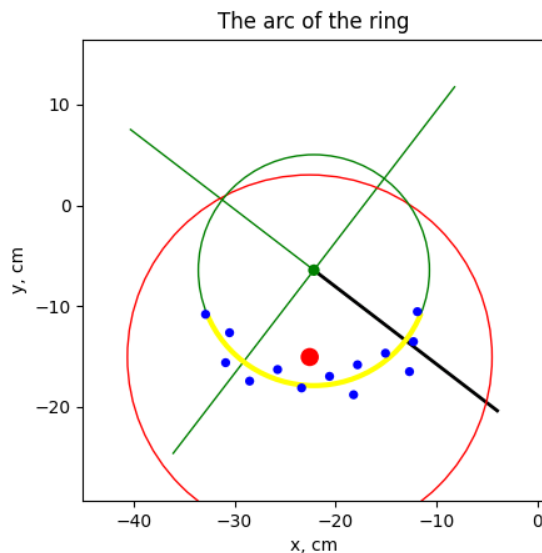
Событие №7667:

$$\omega_{c\text{start}} = 61^\circ$$

$$\omega_{c\text{finish}} = -75^\circ$$

$$\Delta\omega_{arc} = 224^\circ > 180^\circ$$

критерий выполнен



Событие №988:

$$\omega_{c\text{start}} = -120^\circ$$

$$\omega_{c\text{finish}} = 16^\circ$$

$$\Delta\omega_{arc} = 136^\circ < 180^\circ$$

критерий НЕ выполнен

*Рисунок 6. Примеры использования критерия
длины дуги черенковского кольца*

5.4. Распределение радиусов черенковских колец

Применяя рассмотренные выше критерии отбора черенковских колец к имеющей статистике, были получены соответствующие распределения их радиусов и на их основании были построены соответствующие гистограммы, анализ которых будет приведён в данной главе.

Таблица №1. Число отобранных событий для распределения по радиусу

| Число событий | Без отбора по дуге | С отбором по дуге |
|---------------|--------------------|-------------------|
| Моделирование | 100 000 | 5 199 |
| Эксперимент | 100 000 | 10 239 |

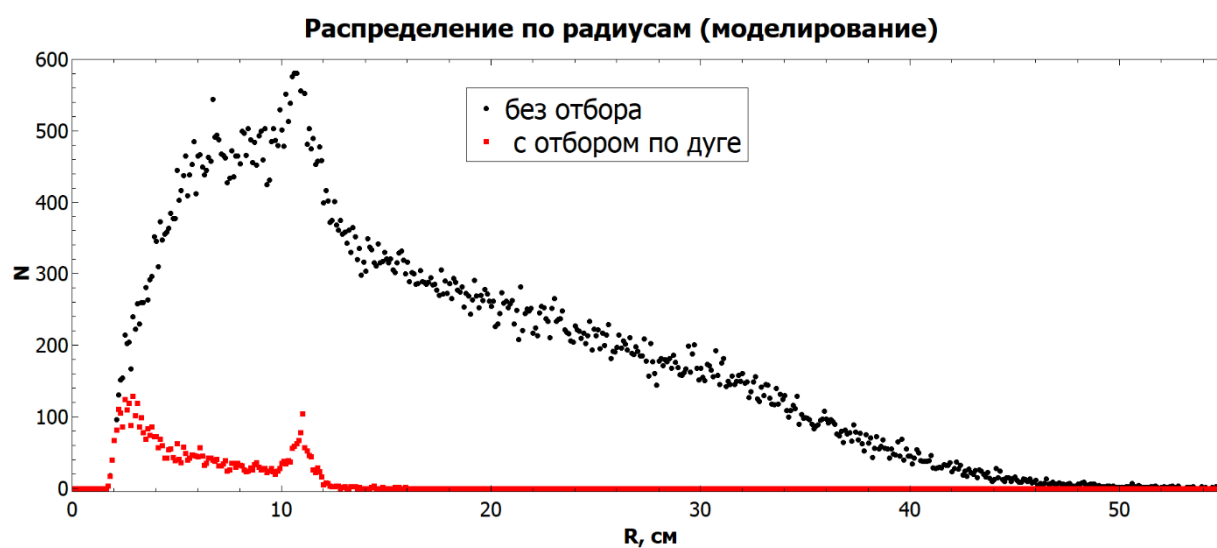


График 7. Распределение по радиусам на основе данных моделирования

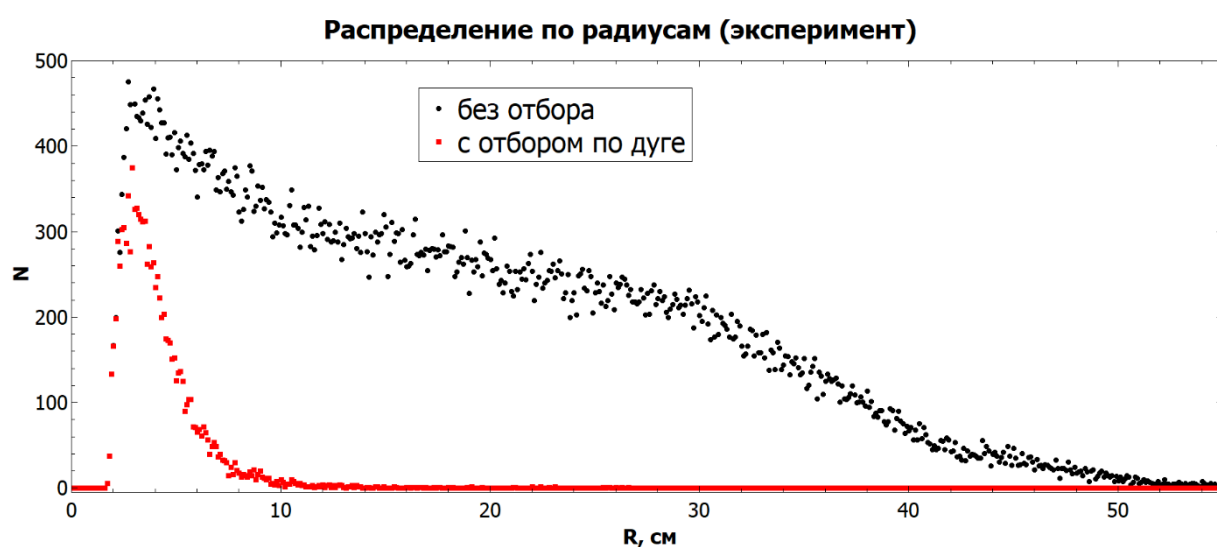


График 8. Распределение по радиусам на основе экспериментальных данных

Как видно на графиках 7-8, применение критерия длины дуги черенковского кольца позволяет выделить отдельный пик с центром в районе теоретического значения, что даёт основание отбросить события левее этого пика, как некорректные.

5.5. Распределение интенсивности в черенковском кольце

Распределение интенсивности пикселей в черенковском кольце позволяет узнать прицельный параметр события и квантовую эффективность телескопа – долю фотонов, попадающих на зеркала, которую удаётся зарегистрировать в фокальной плоскости с помощью ФЭУ. Число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца в фокальной плоскости, будет пропорционально площади соответствующего сегмента зеркала, на которую попал конус. Теперь мы можем получить это значение в явном виде.

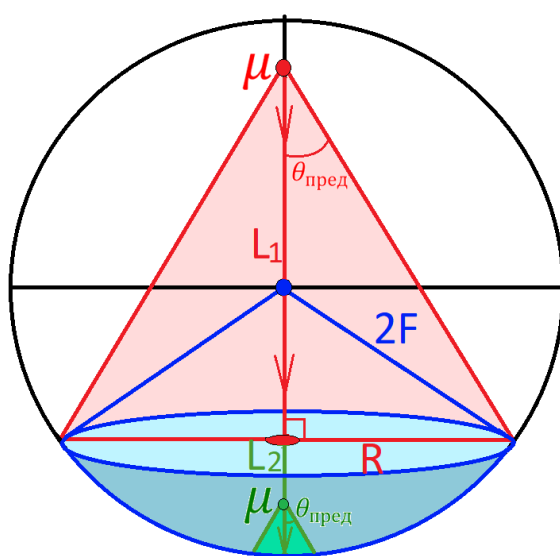


Рисунок 9. Определение общего число черенковских фотонов, падающих на зеркало телескопа

Количество фотонов в черенковском конусе, испущенных на длине L , можно определить по формуле Тамма-Франка⁵:

$$N = 2\pi\alpha L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

(фотоны в черенковском конусе распределены равномерно по телесному углу)

Выберем высоту мюона над внешней окружностью зеркала таким образом, что все испущенные им черенковские фотоны полностью покрыли собой зеркало. Рассмотрим прямоугольный треугольник с красной гипотенузой:

$$\sin \theta_{\text{пред}} = \frac{R}{L_1} \Leftrightarrow L_1 = \frac{R}{\sin \theta_{\text{пред}}} = \frac{2,15 \text{ м}}{\sin 1,31^\circ} = 94,04 \text{ м}$$

Таким образом, мы получили высоту падения мюона над внешней окружностью сферического зеркала.

Теперь рассмотрим прямоугольник с синей гипотенузой. Запишем для него теорему Пифагора:

$$(2F - L_2)^2 + R^2 = (2F)^2$$

Из неё легко найти искомую часть высоты, проходимую мюоном:

$$L_2 = 2F - \sqrt{4F^2 - R^2} = 2 * 4,75 \text{ м} - \sqrt{4 * 4,75^2 \text{ м}^2 - 2,15^2 \text{ м}^2} = 0,25 \text{ м}$$

Таким образом, мы получили высоту падения мюона под внешней окружностью сферического зеркала. Она хоть и будет сильно меньше соответствующей высоты над внешней окружностью ввиду того, что телесный угол всей поверхности зеркала остаётся небольшим относительно его оптического центра, однако тем не менее всё уже будет учтена в модели, что потенциально может быть использовано в аналогичных расчётах для других телескопов, обладающих иным соотношением геометрических характеристик.

Тогда полная длина траектории мюона, фотоны с которой попадут на зеркало:

$$L = L_1 + L_2 = 94,04 \text{ м} + 0,25 \text{ м} = 94,29 \text{ м}$$

Доля площади поверхности зеркала, фотоны с которой попадут в заданный пиксель кольца в случае ненулевого прицельного параметра, может меняться следующим образом:

$$0 < \Delta\sigma < 1$$

С учётом этого мы получим количество черенковских фотонов, попадающих в заданный пиксель кольца в случае ненулевого прицельного параметра:

$$N_{\sigma} = \Delta\sigma N = 2\pi\alpha\Delta\sigma L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

Численный расчёт интеграла квантовой чувствительности фотоумножителей был произведён на основе модели⁶:

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \int_{200 \text{ нм}}^{640 \text{ нм}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = 463055 \text{ м}^{-1}$$

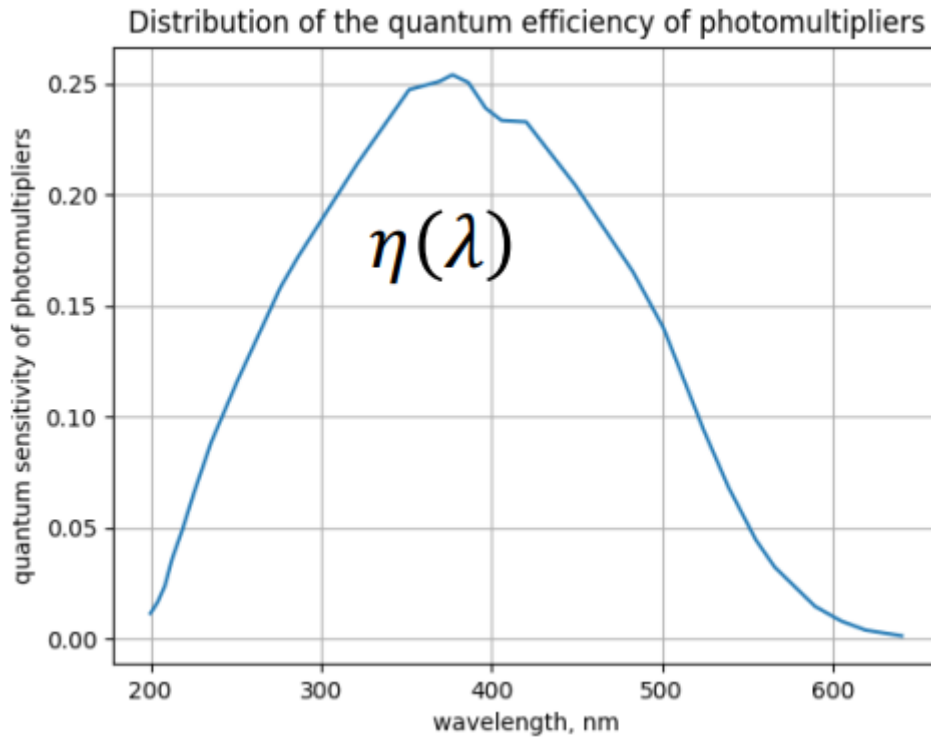


График 10. Эмпирическая зависимость квантовой чувствительности фотоумножителей от их длины волны

Интегральная эффективность регистрации фотонов связана с меняющимися во времени параметрами сбора и пропуска света всей оптической установкой, которые нельзя с достаточной степенью точности предсказать теоретически. Основная цель всей мюонной калибровки как раз и состоит в

том, чтобы получить алгоритм её определения в любой момент времени. При этом она может меняться следующим образом:

$$0 < \psi < 1$$

Таким образом, количество черенковских фотонов, детектирующихся в заданном пикселе кольца:

$$I = \psi N_{\sigma} = 2\pi\alpha\Delta\sigma\psi L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = 1046\Delta\sigma\psi = I_0\Delta\sigma\psi$$

В случае нулевого прицельного параметра распределение длин хорд гармонично по азимутальному углу:

$$\rho = 0 \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2\pi} \Rightarrow I = \alpha\Delta\omega_{\text{пред}}\psi L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = 46\psi = I_{\text{пред}}\psi$$

Таким образом, в случае нулевого прицельного от одного мюона на один пиксель в среднем будет приходиться 46 фотонов.

5.6. Расчёт граничных азимутальных углов пикселя

Так как угловое распределение пикселей черенковского кольца в фокальной плоскости равномерно, то и угловое распределение соответствующих им сегментов зеркала тоже будет равномерным по азимутальному углу. Это даёт нам возможность рассчитать граничные азимутальные углы пикселя, в который попал фотон.

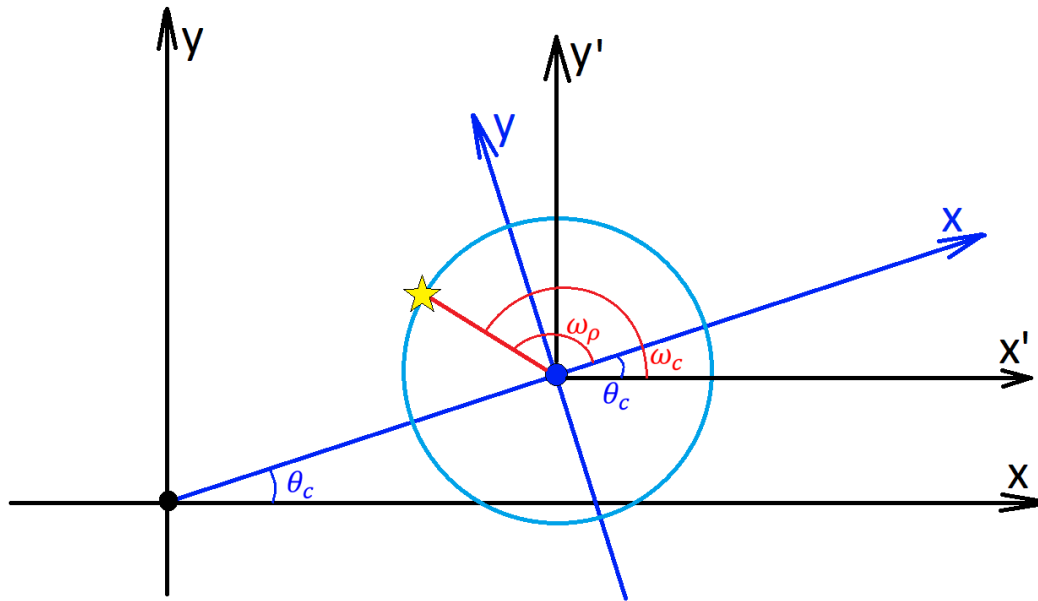


Рисунок 11. Связь азимутальных углов пикселя в фокальной плоскости

Как было показано ранее, координаты центра кольца в камере можно получить из преобразования Хафа:

$$(x_c, y_c)$$

Тогда азимутальный угол центра кольца в камере телескопа (x, y) :

$$\theta_c = \arg(x_c, y_c)$$

Азимутальный угол пикселя в «смещённой» камере телескопа (x', y') :

$$\omega_c = \arg(x_0 - x_c, y_0 - y_c)$$

Тогда азимутальный угол этого пикселя в мюонной системе координат (x'', y'') :

$$\omega_\rho = \omega_c - \theta_c$$

При дальнейших расчётах будет использоваться прицельный параметр мюона ρ

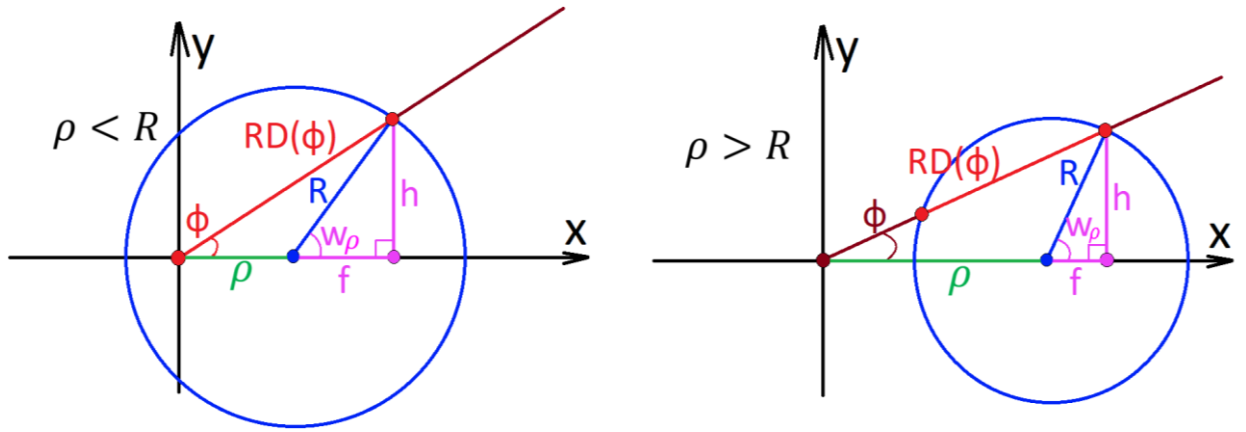


Рисунок 12. Расчёт граничных азимутальных углов пикселя

Рассчитаем граничные азимутальные углы этого пикселя в мюонной системе координат, используя геометрическую конфигурацию установки (см. приложение).

$$\varphi_{\pm} = \arg \left(\frac{\rho}{R} + \cos \left(\omega_{\rho} \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right), \sin \left(\omega_{\rho} \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) \right)$$

Тогда угловой размер пикселя в мюонной системе координат будет разностью двух граничных азимутальных углов:

$$\Delta\varphi = \varphi_{+} - \varphi_{-}$$

При этом также можно вычислить средний азимутальный угол пикселя в мюонной системе координат:

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_{+} + \varphi_{-}}{2}$$

Рассмотрим основные свойства граничных азимутальных углов:

- В случае нулевого прицельного параметра распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат будет равномерно:

$$\rho = 0 \Rightarrow \varphi_{\pm} = \omega_{\rho} \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \Delta\omega_{\text{пред}} \cap \bar{\varphi} = \omega_{\rho}$$

- В случае граничного прицельного параметра распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат также будет равномерно:

$$\rho = R \Rightarrow \varphi_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\omega_{\rho} \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \cap \bar{\varphi} = \frac{\omega_{\rho}}{2}$$

- В случае бесконечного прицельного параметра азимутальные углы пикселя в мюонной системе координат становятся бесконечно малыми:

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_{\pm} \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\varphi \rightarrow 0 \cap \bar{\varphi} \rightarrow 0$$

Рассмотрим поведение зависимости азимутального угла пикселя в мюонной системе координат от его азимутального угла в центральной системе координат при различных значениях прицельного параметра:

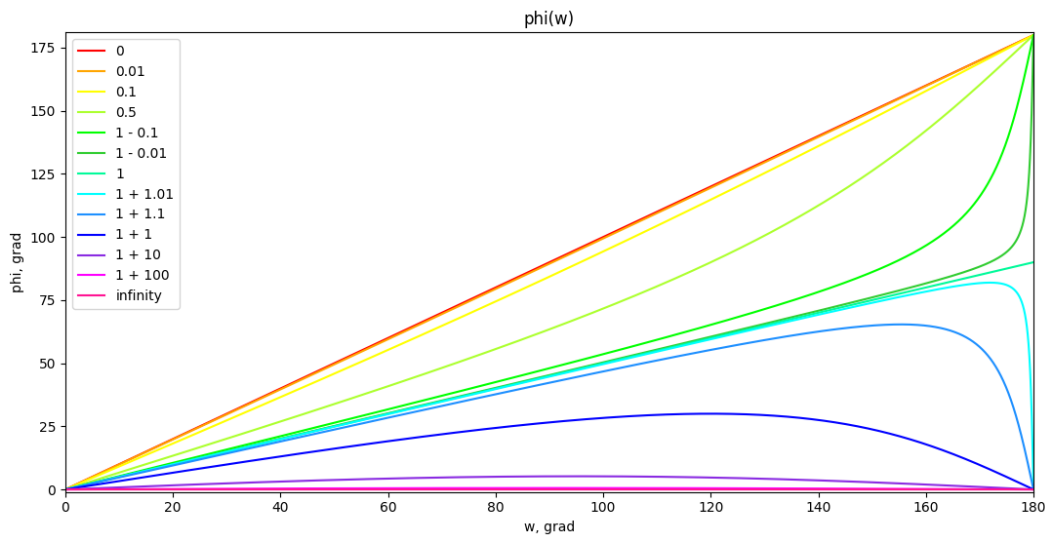


График 13. Зависимость азимутального угла пикселя в мюонной системе координат от его азимутального угла в центральной системе координат

На графике можно наблюдать постепенное отклонение зависимости азимутальных углов от равномерной при нулевом прицельном параметре до нулевой по мере удаления мюона на бесконечность от центра зеркала. При граничном значении прицельного параметра происходит качественная трансформация графика, в результате которой у функции возникает максимум, соответствующий касательному попаданию траектории мюона на зеркало.

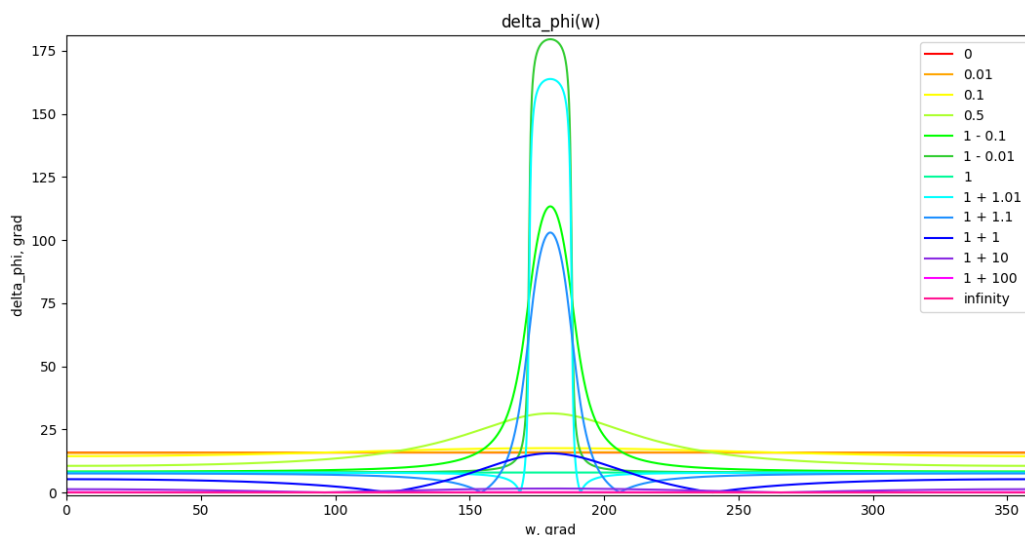


График 14. Зависимость углового размера пикселя в мюонной системе координат от его азимутального угла в центральной системе координат

На графике можно наблюдать постепенное отклонение зависимости размера пикселя от азимутального угла от константы при нулевом прицельном параметре до нулевой по мере удаления мюона на бесконечность от центра зеркала. Вблизи граничного прицельного параметра наблюдается резкий скачок функции в точке обратного направления, вызванный тем, что граница зеркала находится вблизи точки падения мюона.

5.7. Расчёт длины хорды в плоскости отражателя

Как было сказано выше, число черенковских фотонов, попавших в конкретный пиксель кольца в фокальной плоскости, будет пропорционально площади соответствующего сегмента зеркала, на которую попал конус. Эта площадь напрямую зависит от проекции длины траектории мюона на поверхность зеркала, которая образует на его окружности хорду. Далее будет найдена зависимость длины этой хорды от азимутального угла в мюонной системе координат.

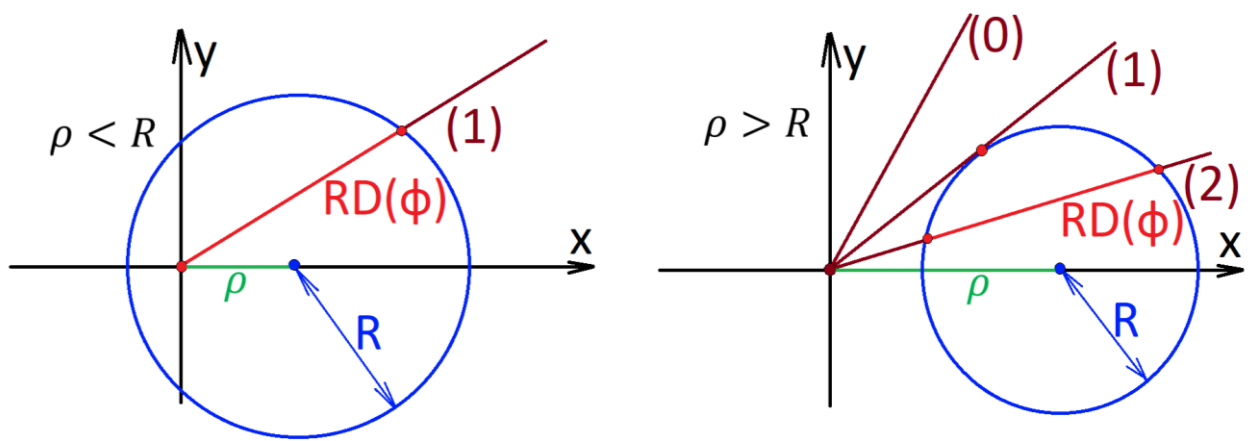


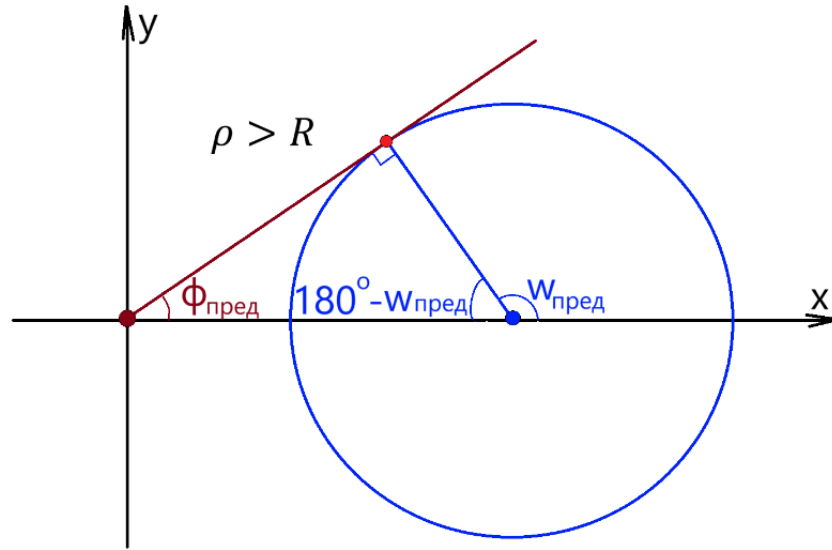
Рисунок 15. Построение хорды в плоскости отражателя, вдоль которой собирается черенковское излучение для заданного азимутального угла

Прицельным параметром называется расстояние, на которое отклоняется мюон от центра зеркала при прохождении через него. Соответственно и центр сечения черенковского конуса будет смещен относительно центра зеркала на это же расстояние. В данном эксперименте интерес представляют два случая, когда прицельный параметр больше радиуса зеркала и когда он меньше него:

$$\begin{cases} \rho < R, \text{ центр сечения конуса лежит внутри зеркала (внутренний случай)} \\ \rho > R, \text{ центр сечения конуса лежит вне зеркала (внешний случай)} \end{cases}$$

В первом случае проекция траектории мюона всегда будет пересекать окружность зеркала только один раз, в то время как во втором случае помимо этого возможно, как две точки пересечения, так и полное их отсутствие.

Одна же точка пересечения будет наблюдаться в предельном случае, когда траектория мюона проходит по касательной к окружности зеркала. Этот случай рассмотрим отдельно:



*Рисунок 16. Предельный случай прохождения мюона
относительно зеркала телескопа*

В предельном случае азимутальный угол пикселя в центральной и мюонной системах координат связан простым соотношением:

$$\varphi_{\text{пред}} + (180^\circ - \omega_{\text{пред}}) = 90^\circ \Leftrightarrow \varphi_{\text{пред}} = \omega_{\text{пред}} - 90^\circ$$

Используя уравнение окружности сечения черенковского конуса в плоскости отражателя в центральной системе координат, ориентированной на место падения мюона $(\rho, 0)$, можно получить зависимость относительной длины вышеописанной хорды от азимутального угла в мюонной системе координат:

$$D(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{R_{\text{mir}}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi}, \rho < R_{\text{mir}} \\ 2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{\text{mir}} \end{cases}$$

Для удобства анализа этой функции, все её значения нормированы на радиус зеркала телескопа. Таким образом, она может принимать значения от 0% до 100%.

Рассмотрим основные свойства хордовой функции:

- Чётность относительно азимутального угла в мюонной системе координат:

$$D(-\varphi) = D(\varphi)$$

- В случае нулевого прицельного параметра распределение длин хорд равномерно по азимутальному углу:

$$\rho = 0 \Rightarrow D(\varphi) = 1$$

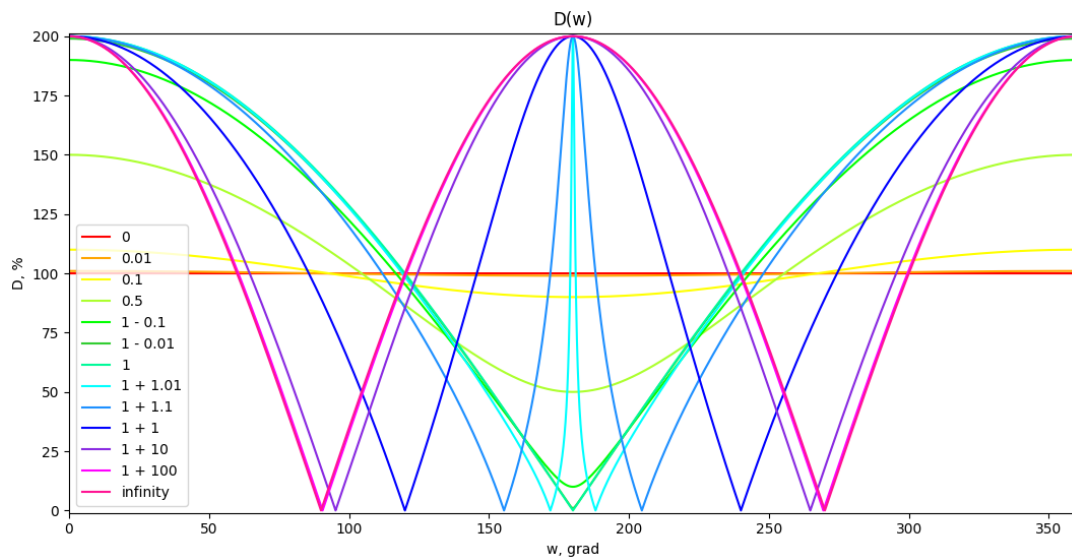
- В случае граничного прицельного параметра распределение длин хорд по азимутальному углу будет гармоническим:

$$\rho = R \Rightarrow D(\varphi) = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{\omega_\rho}{2}$$

- В случае бесконечного прицельного параметра длины хорд остаются конечными даже при бесконечно малых азимутальных углах, а распределение длин хорд по азимутальному углу при этом также оказывается гармоническим:

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow D(\varphi) = 2|\cos \omega_\rho|$$

Рассмотрим поведение зависимости длины хорды от азимутального угла в центральной системе координат при различных значениях прицельного параметра:



*График 17. Зависимость длины хорды
от азимутального угла в центральной системе координат*

На графике можно наблюдать постепенное отклонение зависимости длины хорды от азимутального угла от равномерной при нулевом прицельном параметре до гармонической по мере удаления мюона на бесконечность от центра зеркала. Вблизи граничного значения прицельного параметра наблюдается качественное изменение функции, в результате чего при больших значениях у неё наблюдается дополнительный пик вблизи точки обратного направления.

5.8. Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель

Наконец, теперь, зная граничные азимутальные углы пикселя и зависимость длины хорды от азимутального угла, можно найти площадь зеркального сегмента, собирающего свет в заданный пиксель.

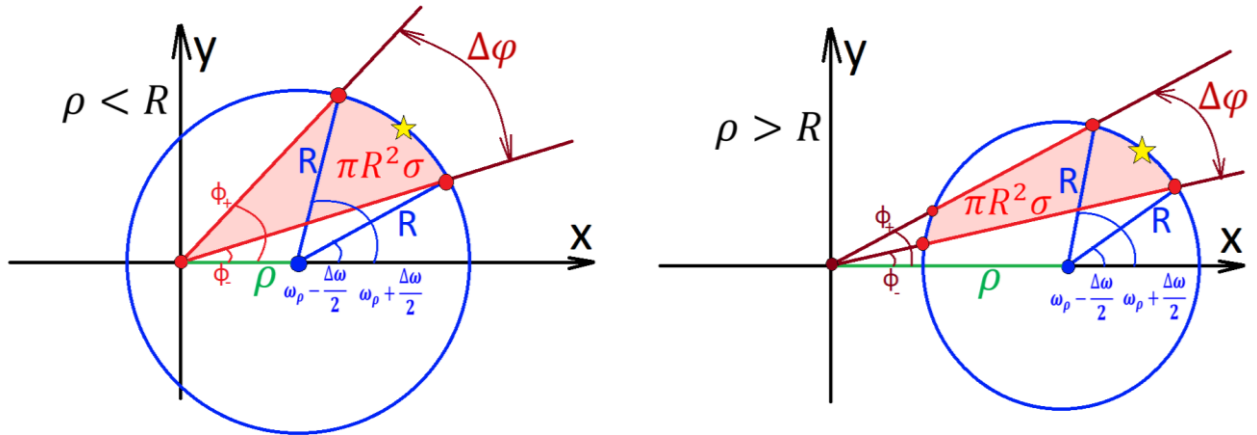


Рисунок 18. Расчёт площади сегмента пикселя, собирающего свет в заданный пиксель

Площадь сегмента зеркала, собирающего свет в диапазоне азимутальных углов от 0 до φ , можно получить, проинтегрировав хордовую функцию в указанных пределах по азимутальному углу:

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho > R \end{cases}$$

Для удобства анализа этой функции, все её значения нормированы на площадь зеркала телескопа. Таким образом, она может принимать значения от 0% до 100%.

Тогда относительная площадь сегмента зеркала, собирающего свет в пиксель, ограниченный азимутальными углами φ_- и φ_+ будет определяться разностью соответствующих значений этой функции:

$$\Delta\sigma = |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)|$$

Рассмотрим основные свойства сегментной функции:

- Нечётность относительно азимутального угла в мюонной системе координат:

$$\sigma(-\varphi) = -\sigma(\varphi)$$

- В случае нулевого прицельного параметра распределение площадей сегментов по азимутальному углу будет равномерным:

$$\rho = 0 \Rightarrow \sigma(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_\rho}{2\pi} \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2\pi}$$

- В случае граничного прицельного параметра распределение площадей сегментов по азимутальному углу будет гармоническим:

$$\rho = R \Rightarrow \sigma(\varphi) = \frac{1}{\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi}$$

$$\rho = R \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\varphi + \sin \Delta\varphi \cos 2\bar{\varphi}}{\pi} = \frac{\frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} + \sin \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \cos \omega_\rho}{\pi}$$

- В случае бесконечного прицельного параметра площадь сегментов остаётся конечной даже при бесконечно малых азимутальных углах, а распределение площадей сегментов по азимутальному углу при этом также оказывается гармоническим:

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & |\omega_\rho| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi - \omega_\rho - \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & \frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi \end{cases}$$

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_{\rho}}{\pi}$$

➤ Интегрирование по всей поверхности зеркала даёт полную площадь его круга:

$$\Delta\sigma = \begin{cases} \sigma\left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho}\right) - \sigma\left(-\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho}\right), \rho < R_{\text{mir}} \\ \sigma(\pi) - \sigma(-\pi), \rho > R_{\text{mir}} \end{cases} = \begin{cases} 2\sigma\left(\arcsin \frac{R_{\text{mir}}}{\rho}\right), \rho < R_{\text{mir}} \\ 2\sigma(\pi), \rho > R_{\text{mir}} \end{cases} = 1$$

Рассмотрим поведение зависимости длины хорды от азимутального угла в центральной системе координат при различных значениях прицельного параметра:

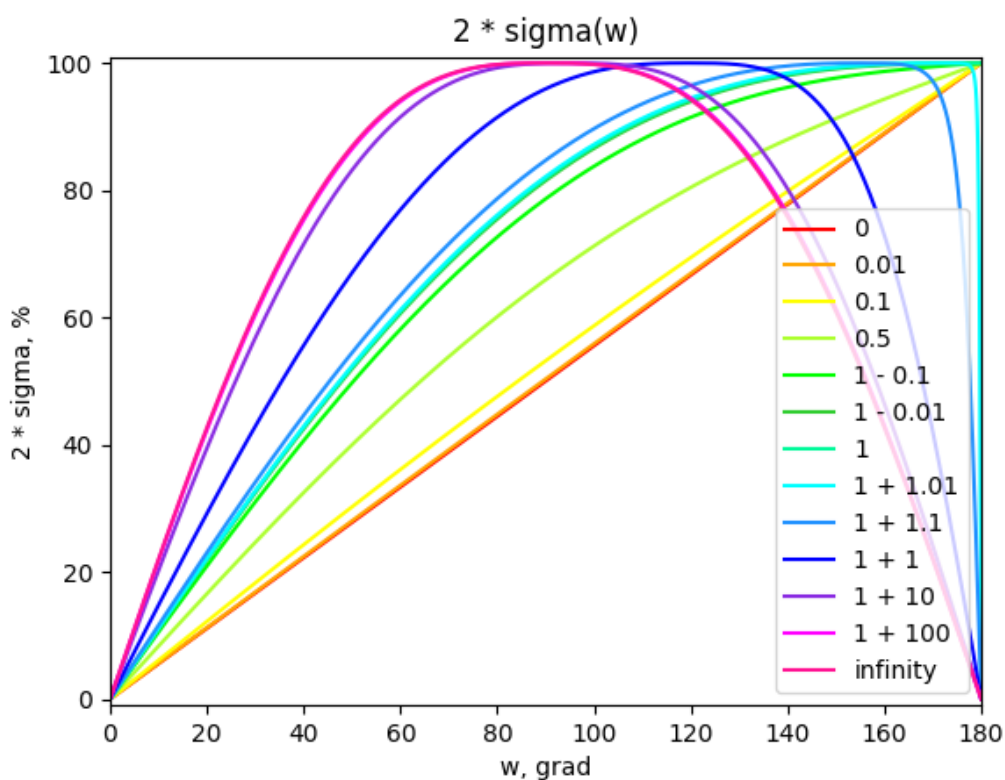


График 19. Зависимость сегментной функции от азимутального угла в центральной системе координат

На графике можно наблюдать постепенное отклонение зависимости сегментной функции от азимутального угла от равномерной при нулевом прицельном параметре до гармонической по мере удаления мюона на бесконечность от центра зеркала. При граничном значении прицельного параметра происходит качественная трансформация графика, в результате

которой у функции возникает максимум, соответствующий касательному попаданию траектории мюона на зеркало.

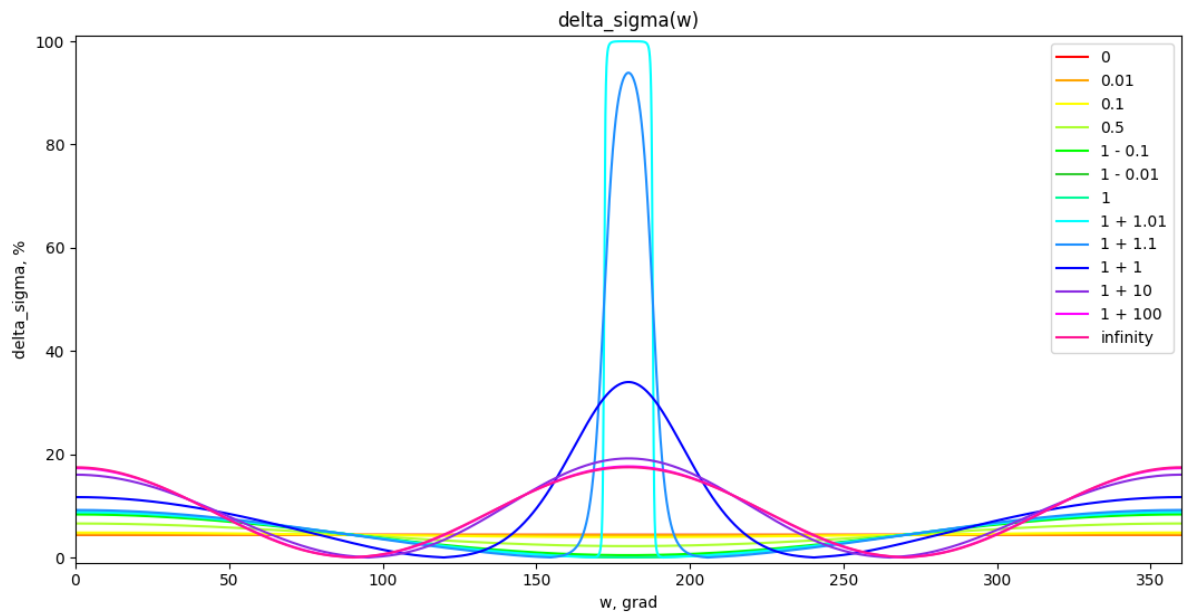


График 20. Зависимость площади сегмента, собирающей свет в заданный пиксель, от азимутального угла в центральной системе координат

На графике можно наблюдать постепенное отклонение зависимости площади сегмента, собирающего свет в заданный пиксель, от азимутального угла от равномерной при нулевом прицельном параметре до гармонической по мере удаления мюона на бесконечность от центра зеркала. Вблизи граничного значения прицельного параметра наблюдается качественное изменение функции, в результате чего при больших значениях у неё наблюдается дополнительный пик вблизи точки обратного направления. Кроме того, в самой непосредственной близости от граничного прицельного параметра этот пик превращается в плато, что связано с тем, что угловой размер пикселя в центральной системе координат имеет хоть и небольшой, но всё же конечный размер, который и виден на графике.

5.9. Расчёт прицельного параметра и квантовой эффективности отдельного события

Для определения средней квантовой эффективности телескопа, необходимо найти её значения для каждого события. Однако помимо квантовой эффективности придётся найти ещё и прицельный параметр, значение которого меняется случайным образом. Для этого используем следующий алгоритм.

Рассмотрим событие, содержащее n пикселей, имеющих амплитуда m_k , где $1 \leq k \leq n$. Будем искать значение прицельного параметра в пределах от 0 см до $\rho_{max} = 50$ см, а значение квантовой эффективности в пределах от 0% до 100%.

Разобьём фазовый прямоугольник, ограниченный пределами изменения соответствующих переменных, на d частей по каждой оси с интервалами:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_{max}}{d}, \Delta\psi = \frac{100\%}{d}$$

Найдём значения границ частей разбиения:

$$\rho_i = i\Delta\rho, \psi_j = j\Delta\psi, 0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d$$

Вычислим теоретическое значение интенсивности для каждого пикселя с помощью вышеописанной модели:

$$I_{i,j,k} = I_0 \Delta\sigma(\rho_i, \omega_k) \psi_j$$

Вычислим суммарное квадратичное отклонение интенсивности отдельных пикселей от теоретического значения:

$$(\Delta I_{i,j})^2 = \sum_{k=1}^n (m_k - I_{i,j,k})^2$$

Узел разбиения (ρ_i, ψ_j) , имеющий наименьшее суммарное квадратичное отклонение интенсивности $\Delta I_{i,j}$ будем считать оптимальным. Тогда искомые параметры:

$$\rho = \rho_i, \psi = \psi_j, \Delta I_{i,j} = \Delta I_{i,j \min}$$

На основании аппроксимации можно найти среднюю интенсивность пикселей кольца:

$$\bar{I} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k I_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

Это значение можно сравнить с усредненным значением интенсивности всех пикселей кольца:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{n}$$

Наконец, можно найти относительное среднеквадратичное отклонение, которое позволяет отобрать события с высоким соответствием распределения интенсивности в кольце сегментной функции:

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}$$

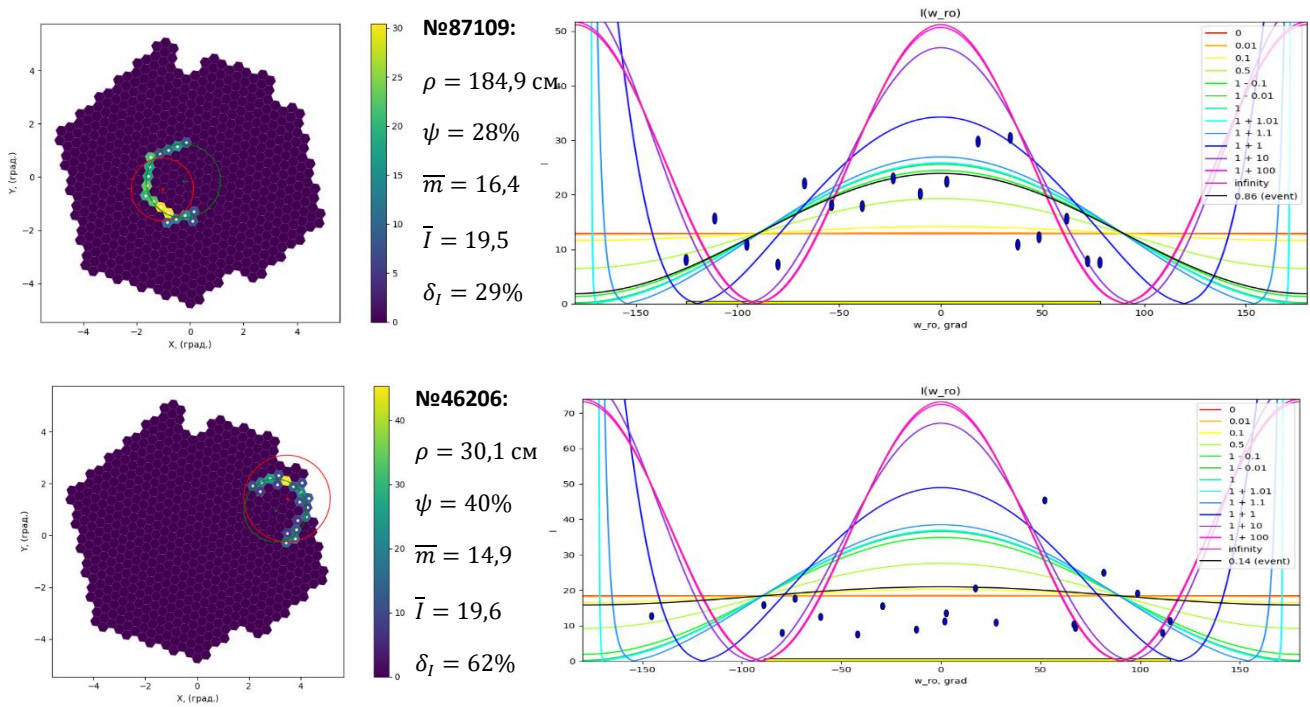


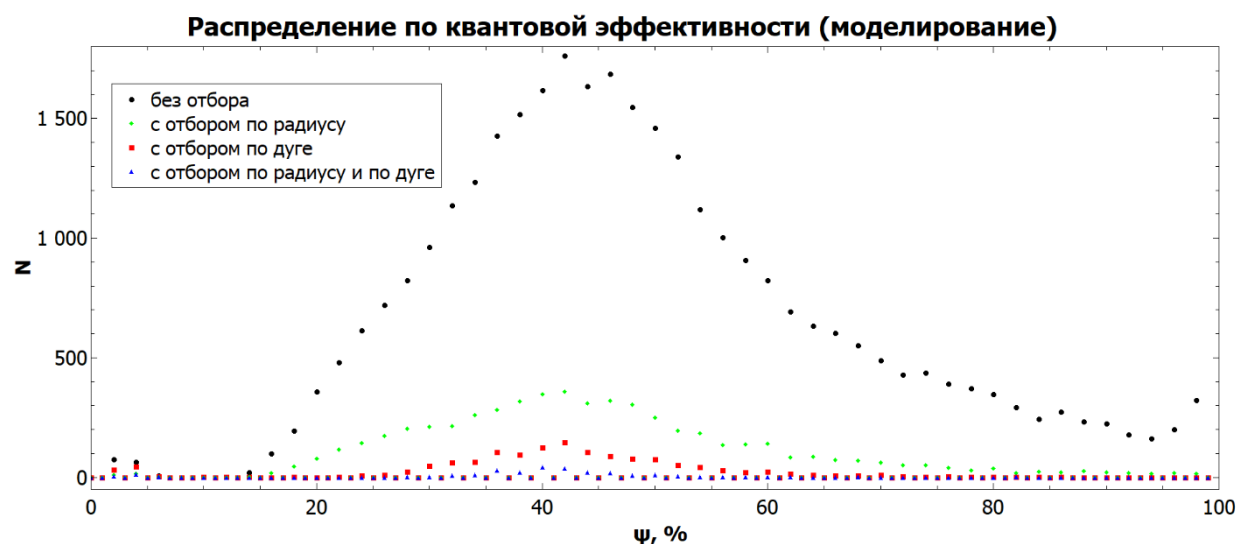
Рисунок 21. Примеры распределения интенсивности в черенковском кольце

5.10. Распределение квантовой эффективности

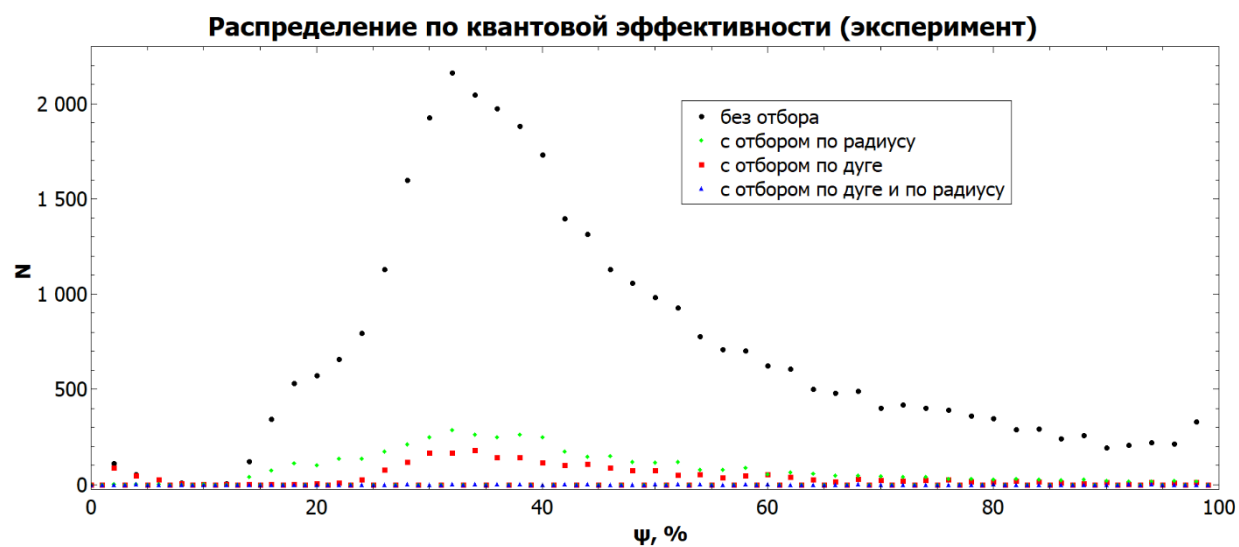
На основании набранной статистики значений квантовой эффективности были построены распределения с учётом различных критериев отбора для экспериментальных данных и для данных моделирования, представленные ниже.

Таблица №2. Число отобранных событий
для распределения по квантовой эффективности

| Число событий | Без отбора | С отбором по дуге | С отбором по радиусу | С отбором по дуге и по радиусу |
|---------------|------------|----------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| Моделирование | 31 706 | 1 352 | 5 519 | 242 |
| Эксперимент | 33 975 | 2 346 | 4 279 | 17 |



*График 22. Распределение квантовой эффективности
на основе данных моделирования*



*График 23. Распределение квантовой эффективности на основе
экспериментальных данных*

На основании аппроксимации распределения по данным моделирования были получены следующие значения квантовой эффективности:

- без отбора: $\psi = 49 \pm 18\%$;
- с отбором по дуге: $\psi = 40 \pm 13\%$;
- с отбором по радиусу: $\psi = 45 \pm 16\%$;
- с отбором по дуге и по радиусу: $\psi = 39 \pm 12\%$.

На основании аппроксимации распределения по данным моделирования были получены следующие значения квантовой эффективности:

- без отбора: $\psi = 45 \pm 19\%$;
- с отбором по дуге: $\psi = 42 \pm 19\%$;
- с отбором по радиусу: $\psi = 42 \pm 18\%$;
- с отбором по дуге и по радиусу: $\psi = 51 \pm 23\%$.

Заключение

В рамках данной работы:

- было оценено ожидаемое количество регистрируемых мюонных колец телескопом в единицу времени;
- был разработан алгоритм выделения изображений от одиночных мюонов, регистрируемых телескопом TAIGA-IACT;
- была разработана математическая модель распределения интенсивности черенковского излучения по дуге кольца;
- была проведена первая оценка интегральной квантовой чувствительности третьего телескопа установки TAIGA-IACT по данным эксперимента и моделирования.

На основании аппроксимации распределения по данным моделирования были получены следующие значения квантовой эффективности:

- без отбора: $\psi = 49 \pm 18\%$;
- с отбором по дуге: $\psi = 40 \pm 13\%$;
- с отбором по радиусу: $\psi = 45 \pm 16\%$;
- с отбором по дуге и по радиусу: $\psi = 39 \pm 12\%$.

На основании аппроксимации распределения по данным моделирования были получены следующие значения квантовой эффективности:

- без отбора: $\psi = 45 \pm 19\%$;
- с отбором по дуге: $\psi = 42 \pm 19\%$;
- с отбором по радиусу: $\psi = 42 \pm 18\%$;
- с отбором по дуге и по радиусу: $\psi = 51 \pm 23\%$.

Список использованной литературы

- 1 Kuzmichev L. A., Astapov I. I., Bezyazeev P. A. et al. TAIGA gamma observatory: Status and prospects // Physics of Atomic Nuclei. 2018. Jul. Vol. 81, no. 4. P. 497.
- 2 Kuzmichev L., Astapov I., Bezyazeev P. et al. Tunka Advanced Instrument for cosmic rays and Gamma Astronomy (TAIGA): Status, results and perspectives // EPJ Web of Conferences. 2017. Vol. 145. P. 01001.
Access mode: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714501001>.
- 3 De Pascale M. P., Morsell A., P. Picozza et al. Absolute Spectrum and Charge Ratio of Cosmic Ray Muons in the Energy Region From 0.2 GeV to 100 GeV at 600 m Above Sea Level // Journal of geophysical research, Vol. 98, no. A3, Pages 3501 – 3507, March 1, 1993.
- 4 Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. Commun. ACM, 1972, vol. 15, no. 1, pp. 11–15.
- 5 Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика, Т.1,2.-М.: Энергоатомиздат, 1996.
- 6 Philips Photo and Electron Multipliers. Т. 9. – 1987.
https://bitsavers.org/components/philips/_dataBooks/1987_T09_Philips_Photo_and_Electron_Multipliers.pdf

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые использованные свойства математических функций

Азимутальный угол точки (x, y) относительно точки (x_c, y_c) :

$$\varphi = \arg(x - x_c, y - y_c) = \begin{cases} \varphi_0, & x_k > x_c \\ \varphi_0 + 180^\circ, & x_k < x_c, y_k > y_c \\ \varphi_0 - 180^\circ, & x_k < x_c, y_k < y_c \end{cases}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y_k - y_c}{x_k - x_c}$$

Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\sin(\varphi \pm 180^\circ) = -\sin \varphi$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

Свойства обратных тригонометрических функций:

$$\arcsin \sin \varphi = \varphi, \quad -90^\circ < \varphi < 90^\circ$$

$$\arcsin(-\varphi) = -\arcsin \varphi$$

Свойства арифметического корня:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Пределы:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$$

Интегралы:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

Элемент телесного угла:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Алгоритмы аппроксимации

| Грубая формула | Преобразование Хафа | Квантовая эффективность |
|--|--|--|
| Область изменения переменных | | |
| $x_{min} < x < x_{max}$ $y_{min} < y < y_{max}$ | $x_{min} < x < x_{max}$ $y_{min} < y < y_{max}$ | $0 < \rho < R_{mirror}$ $0 < \psi < 1$ |
| Диаметр разбиения | | |
| - | $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{d}$ $\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{d}$ | $\Delta \rho = \frac{R_{mirror}}{d}$ $\Delta \psi = \frac{1}{d}$ |
| Границы частей разбиения | | |
| - | $x_i = x_{min} + i\Delta x, 0 \leq i \leq d$ $y_j = y_{min} + j\Delta y, 0 \leq j \leq d$ | $\rho_i = i\Delta \rho, 0 \leq i \leq d$ $\psi_j = j\Delta \psi, 0 \leq j \leq d$ |
| Массив среднеквадратичных отклонений | | |
| - | $(R_{i,j,k})^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_j)^2$ $R_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k R_{i,j,k}}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(\Delta R_{i,j})^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (R_{i,j,k} - R_{i,j})^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$ | $I_{i,j,k} = I_0 \Delta \sigma(\omega_k, \rho_i) \psi_j$ $(\Delta I_{i,j})^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (I_{i,j,k} - m_k)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$ |
| Минимизация среднеквадратичного отклонения | | |
| $x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(R_k)^2 = (x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2$ $R = \frac{\sum_{k=1}^n m_k R_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $(\Delta R)^2 = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (R_k - R)^2}{\sum_{k=1}^n m_k}$ | $i \cap j: \Delta R_{i,j} = \Delta R_{i,j \min} \Rightarrow \begin{cases} x_c = x_i \\ y_c = y_j \\ R_H = R_{i,j} \\ \Delta R_H = \Delta R_{i,j} \end{cases}$ | $i \cap j: \begin{cases} i \neq 0 \cap i \neq d \\ j \neq 0 \cap j \neq d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_i \\ \psi = \psi_j \\ I_k = I_{i,j,k} \\ \Delta I = \Delta I_{i,j} \end{cases}$ $\bar{I} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k I_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ $\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{n}$ |
| Относительное среднеквадратичное отклонение | | |
| $\delta_R = \frac{\Delta R}{R}$ | $\delta_H = \frac{\Delta R_H}{R_H}$ | $\delta_I = \frac{\Delta I}{\bar{I}}$ |

Оценка предельно допустимой для анализа энергии мюонов

Чтобы отбирать и анализировать события от одиночных мюонов важно, чтобы черенковский угол не зависел от их энергии, что наблюдается при высоких энергиях.

Высота гамма-обсерватории TAIGA над уровнем моря:

$$h = 700 \text{ м}$$

Коэффициент преломления воздуха на уровне обсерватории:

$$n = 1 + 2,9 * 10^{-4} * e^{-\frac{h}{7100 \text{ м}}} = 1 + 2,9 * 10^{-4} * e^{-\frac{700 \text{ м}}{7100 \text{ м}}} = 1,000262773$$

Раствор черенковского конуса:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{n \cos \theta}$$

Энергия покоя мюона:

$$E_0 = 105,659 \text{ МэВ}$$

Полная энергия мюона:

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta}}}$$

Пороговая энергия мюона:

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow E_{\text{порог}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2}}} = 4610 \text{ МэВ} = 4,6 \text{ ГэВ}$$

Предельный угол черенковского излучения:

$$\beta = 1 \Rightarrow \cos \theta_{\text{пред}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \theta_{\text{пред}} = \arccos \frac{1}{n} = \arccos \frac{1}{1,000262773} = 1,31^\circ$$

Условимся, что предельное допустимое отклонение черенковского угла для нас составляет:

$$p = 5\%$$

Тогда критический раствор черенковского конуса:

$$\theta_{\text{крит}} = \theta_{\text{пред}}(1 - p) = 1,31^\circ * (1 - 0,05) = 1,24^\circ$$

Тогда минимальная энергия мюонов, при которой зависимость энергии от раствора черенковского конуса можно пренебречь:

$$E_{\text{крит}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta_{\text{крит}}}}} = \frac{105,659 \text{ МэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,000262773^2 \cos^2 1,24^\circ}}} = 14,4 \text{ ГэВ}$$

Далее в работе мы будем рассматривать лишь те мюоны, энергия которых больше критического значения:

$$E > E_{\text{крит}}$$

Оценка ожидаемого количества регистрируемых мюонных колец

Из справочной литературы⁴ найдём потоки одиночных мюонов в единицу времени на единицу площади и на единицу телесного угла:

$$\text{Для } E > E_1 = 12,51 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1 = 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

$$\text{Для } E > E_2 = 16,68 \text{ ГэВ} \Rightarrow \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 = 3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}$$

Так как для нашей энергии нет явного значения потока, то произведём линейную интерполяцию:

$$\frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} = \frac{\left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_{\text{крит}} - \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1}{\left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dS d\Omega dt} \right)_1}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt}\right)_{\text{крит}} &= \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt}\right)_1 + \left(\left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt}\right)_2 - \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt}\right)_1\right) \frac{E_{\text{крит}} - E_1}{E_2 - E_1} = \\
&= 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} + \left(3,551 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} - 5,487 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}\right) \frac{14,4 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}}{16,68 \text{ ГэВ} - 12,51 \text{ ГэВ}} = \\
&= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}}
\end{aligned}$$

Тогда ожидаемое количество мюонных колец можно найти, проинтегрировав полученное значение по площади зеркала и телесному углу:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{dN_\mu}{dSd\Omega dt}\right)_{\text{крит}} d\Omega &= \int 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} d\Omega \\
\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int d\Omega \\
\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \int_{0^\circ}^{1,31^\circ} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} &= -4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} \cos \theta \Big|_{0^\circ}^{1,31^\circ} \varphi \Big|_0^{2\pi} \\
\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} &= -4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} (\cos 1,31^\circ - \cos 0^\circ) (2\pi - 0) \\
\left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) \\
\int \left(\frac{dN_\mu}{dSdt}\right)_{\text{крит}} dS &= \int 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) dS \\
\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) \int dS \\
\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) S \\
\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} &= 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{ср} * \text{с}} 2\pi (1 - \cos 1,31^\circ) \pi R^2
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^\circ) 2\pi^2 R^2$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 4,610 \frac{\text{мюон}}{\text{м}^2 * \text{с}} (1 - \cos 1,31^\circ) * 2 * 3,14^2 * 2,15^2 \text{ м}^2$$

$$\left(\frac{dN_\mu}{dt}\right)_{\text{крит}} = 0,110 \frac{\text{мюон}}{\text{с}} = 6,60 \frac{\text{мюон}}{\text{мин}} = 396 \frac{\text{мюон}}{\text{час}}$$

Расчёт граничных азимутальных углов пикселя

Рассчитаем граничные азимутальные углы пикселя в мюонной системе координат, используя два прямоугольных треугольника, имеющих общую сторону:

$$\sin \omega_\rho = \frac{h}{R_{\text{mir}}} \Leftrightarrow h = R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho$$

$$\cos \omega_\rho = \frac{f}{R_{\text{mir}}} \Leftrightarrow f = R_{\text{mir}} \cos \omega_\rho$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{h}{\rho + f} = \frac{R_{\text{mir}} \sin \omega_\rho}{\rho + R_{\text{mir}} \cos \omega_\rho} = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho} \Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos \omega_\rho, \sin \omega_\rho\right)$$

$$\text{tg } \varphi_\pm = \frac{\sin\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)} \Leftrightarrow \varphi_\pm = \arg\left(\frac{\rho}{R_{\text{mir}}} + \cos\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right), \sin\left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)\right)$$

Тогда угловой размер пикселя в мюонной системе координат будет разностью двух граничных азимутальных углов:

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$$

При этом также можно вычислить средний азимутальный угол пикселя в мюонной системе координат:

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}$$

В случае нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{0}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} = \operatorname{tg} \omega_\rho \Leftrightarrow \varphi = \omega_\rho \Rightarrow \varphi_\pm = \omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) = \Delta\omega_{\text{пред}}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \frac{\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) + \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} = \omega_\rho$$

(распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат равномерно)

В случаи граничного прицельного параметра:

$$\rho = R_{mir} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{R_{mir}}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} = \frac{\sin \omega_\rho}{1 + \cos \omega_\rho} = \frac{2 \sin \frac{\omega_\rho}{2} \cos \frac{\omega_\rho}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\omega_\rho}{2} - 1} = \operatorname{tg} \frac{\omega_\rho}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\omega_\rho}{2}$$

$$\varphi_\pm = \frac{1}{2} \left(\omega_\rho \pm \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{2} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \frac{\frac{1}{2} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} \right)}{2} = \frac{\omega_\rho}{2}$$

(распределение азимутальных углов пикселей в мюонной системе координат равномерно)

В случаи бесконечного прицельного параметра:

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} = R_{mir} \sin \omega_\rho \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} = 0$$

$$\rho \rightarrow \infty \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \arg \left(\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho, \sin \omega_\rho \right) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega_\rho}{\frac{\rho}{R_{mir}} + \cos \omega_\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} = R_{mir} \sin \omega_\rho \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} = 0 \Rightarrow \varphi_\pm \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \cap \bar{\varphi} = 0$$

(азимутальные углы пикселя в мюонной системе координат становятся бесконечно малыми)

Расчёт длины хорды в плоскости отражателя

Уравнение окружности сечения черенковского конуса в плоскости отражателя в мюонной системе координат:

$$(x - \rho)^2 + y^2 = R_{mir}^2$$

Перейдём к полярным координатам:

$$(r \cos \varphi - \rho)^2 + (r \sin \varphi)^2 = R_{mir}^2$$

$$r^2 \cos^2 \varphi - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 + r^2 \sin^2 \varphi = R_{mir}^2$$

$$r^2 - 2\rho r \cos \varphi + \rho^2 - R_{mir}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r_{\pm}(\varphi) &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - (\rho^2 - R_{mir}^2)} = \rho \cos \varphi \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 + R_{mir}^2} = \\ &= \rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = R_{mir} \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \end{aligned}$$

Условие существования хорды вследствие положительности подкоренного выражения:

$$\begin{aligned} R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi > 0 &\Leftrightarrow R_{mir}^2 > \rho^2 \sin^2 \varphi \Leftrightarrow R_{mir} > \rho |\sin \varphi| \Leftrightarrow |\sin \varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin |\varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin |\varphi| < \frac{R_{mir}}{\rho} < 1, \rho > R_{mir} \\ \sin |\varphi| < 1 < \frac{R_{mir}}{\rho}, \rho < R_{mir} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\varphi| < \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho} < 90^\circ, \rho > R_{mir} \\ |\varphi| < 180^\circ, \rho < R_{mir} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, при $\rho > R_{mir}$ в мюонной системе координат существует предельное значение азимутального угла, больше которого он быть не может:

$$\varphi_{пред} = \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}$$

Длина хорды в плоскости отражателя, вдоль которой собирается черенковское излучение для заданного азимутального угла:

$$RD(\varphi) = \begin{cases} r_+(\varphi) = R_{mir} \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R_{mir} \\ r_+(\varphi) - r_-(\varphi) = 2R_{mir} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{mir} \end{cases}$$

$$D(\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho < R_{mir} \\ 2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi}, \rho > R_{mir} \end{cases}$$

Проверка чётности хордовой функции:

$$r_{\pm}(-\varphi) = \rho \cos(-\varphi) \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2(-\varphi)} = \rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} = r_{\pm}(\varphi)$$

$$RD(-\varphi) = \begin{cases} r_+(-\varphi), \rho < R_{mir} \\ r_+(-\varphi) - r_-(-\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = \begin{cases} r_+(\varphi), \rho < R_{mir} \\ r_+(\varphi) - r_-(\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = R_{mir} D(\varphi)$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow D(\varphi) = \frac{0}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = 1$$

(распределение длин хорд равномерно по азимутальному углу)

В случаи граничного прицельного параметра:

$$\rho = R_{mir} \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(\varphi) = \frac{R_{mir}}{R_{mir}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = \cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi} =$$

$$= \cos \varphi + |\cos \varphi| = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{\omega \rho}{2}$$

$$\rho = R \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(\varphi) = 2 \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} = 2 \sqrt{\cos^2 \varphi} =$$

$$= 2 |\cos \varphi| = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{\omega \rho}{2}$$

(равенство длин хорд в граничном случае выполняется;
распределение длин хорд гармонично по азимутальному углу)

В случае бесконечного прицельного параметра:

$$\begin{aligned}
 \rho \rightarrow \infty \Rightarrow D(\varphi) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \sin^2 \varphi)}{R_{mir}^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \varphi^2)}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho^2 \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)^2 \right)}{R_{mir}^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho)}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho}{R_{mir}^2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \omega_\rho} = 2 |\cos \omega_\rho|
 \end{aligned}$$

(длины хорд остаются конечными даже при бесконечно малых азимутальных углах; распределение длин хорд гармонично по азимутальному углу)

Расчёт площади сегмента зеркала, собирающего свет в один пиксель

Площадь сегмента зеркала, собирающего свет в диапазоне углов от 0 до φ в мюонной системе координат:

$$\begin{aligned}
 S_{\pm}(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r_{\pm}^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(\rho \cos \varphi \pm \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(\rho^2 \cos^2 \varphi + R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi \pm 2\rho \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \left(R_{mir}^2 + \rho^2 \cos 2\varphi \pm 2\rho \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^\varphi d\varphi + \rho^2 \int_0^\varphi \cos 2\varphi d\varphi \pm 2\rho \int_0^\varphi \cos \varphi \sqrt{R_{mir}^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^\varphi d\varphi + \frac{\rho^2}{2} \int_0^\varphi \cos 2\varphi d(2\varphi) \pm 2\rho R_{mir} \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} d(\sin \varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \int_0^\varphi d\varphi + \frac{\rho^2}{2} \int_0^\varphi \cos 2\varphi d(2\varphi) \pm 2R_{mir}^2 \int_0^\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right)^2} d\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(R_{mir}^2 \varphi \Big|_0^\varphi + \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^\varphi \pm 2R_{mir}^2 \frac{\arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right)^2}}{2} \Big|_0^\varphi \right) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi \Big|_0^\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \Big|_0^\varphi \pm \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \Big|_0^\varphi \right) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) - \\
&- \frac{R_{mir}^2}{2} \left(0 + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 0 \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin 0\right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin 0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 0} \right) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \pm \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)
\end{aligned}$$

В случаи, если $\rho < R_{mir}$:

$$\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi) = S_+(\varphi) = \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)$$

В случаи, если $\rho > R_{mir}$:

$$\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi) = S_+(\varphi) - S_-(\varphi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) - \\
&- \frac{R_{mir}^2}{2} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi - \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) - \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\
&= R_{mir}^2 \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right)
\end{aligned}$$

В итоге:

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho < R_{mir} \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right), \rho > R_{mir} \end{cases}$$

Тогда относительная площадь сегмента зеркала, собирающего свет в пиксель, ограниченный азимутальными углами φ_- и φ_+ :

$$\Delta\sigma = |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)|$$

Проверка нечётности сегментной функции:

$$\begin{aligned}
S_{\pm}(-\varphi) &= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(-\varphi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin(-2\varphi) \pm \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin(-\varphi) \right) \pm \frac{\rho}{R_{mir}} \sin(-\varphi) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2(-\varphi)} \right) = \\
&= \frac{R_{mir}^2}{2} \left(-\varphi - \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi \mp \arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) \mp \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = -S_{\pm}(\varphi) \\
\pi R_{mir}^2 \sigma(-\varphi) &= \begin{cases} S_+(-\varphi), \rho < R_{mir} \\ S_+(-\varphi) - S_-(-\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = \begin{cases} -S_+(\varphi), \rho < R_{mir} \\ -S_+(\varphi) + S_-(\varphi), \rho > R_{mir} \end{cases} = -\pi R_{mir}^2 \sigma(\varphi)
\end{aligned}$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow \sigma(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{0^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{0}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{0}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\Delta\sigma = |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)| = \left| \frac{\varphi_+}{2\pi} - \frac{\varphi_-}{2\pi} \right| = \left| \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2\pi} \right| = \left| \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right| = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2\pi}$$

(распределение площадей сегментов равномерно по азимутальному углу)

В случаи граничного прицельного параметра:

$$\begin{aligned} \rho = R_{\text{mir}} \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{R_{\text{mir}}^2}{2R_{\text{mir}}^2} \sin 2\varphi + \arcsin \left(\frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \right) + \frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{R_{\text{mir}}^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \arcsin \sin \varphi + \frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi |\cos \varphi| \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \cos \varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_\rho}{2} + \frac{\sin \omega_\rho}{2} \right) = \frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho = R \cap |\varphi| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \right) + \frac{R_{\text{mir}}}{R_{\text{mir}}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{R_{\text{mir}}^2}{R_{\text{mir}}^2} \sin^2 \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \varphi + \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{1}{\pi} (\varphi + \sin \varphi |\cos \varphi|) = \\ &= \frac{1}{\pi} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{1}{\pi} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_\rho}{2} + \frac{\sin \omega_\rho}{2} \right) = \frac{\omega_\rho + \sin \omega_\rho}{2\pi} \end{aligned}$$

(равенство площадей сегментов в граничном случаи выполняется)

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= |\sigma(\varphi_+) - \sigma(\varphi_-)| = \left| \frac{1}{\pi} \left(\varphi_+ + \frac{\sin 2\varphi_+}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\varphi_- + \frac{\sin 2\varphi_-}{2} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \left(\varphi_+ - \varphi_- + \frac{\sin 2\varphi_+ - \sin 2\varphi_-}{2} \right) \right| = \left| \frac{\varphi_+ - \varphi_- + \sin(\varphi_+ - \varphi_-) \cos(\varphi_+ + \varphi_-)}{\pi} \right| = \\ &= \left| \frac{\Delta\varphi + \sin \Delta\varphi \cos 2\overline{\varphi}}{\pi} \right| = \frac{\Delta\varphi + \sin \Delta\varphi \cos 2\overline{\varphi}}{\pi} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2} + \sin \frac{\Delta\omega}{2} \cos \omega_\rho}{\pi} \end{aligned}$$

(распределение площадей сегментов гармонично по азимутальному углу)

В случаи бесконечного прицельного параметра:

$$\begin{aligned}
\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma(\varphi) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \varphi} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \sin \varphi)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \sin \varphi)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \sin^2 \varphi)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \varphi)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho \varphi)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 \varphi^2)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\rho^2 \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{\rho} \right)^2 \right)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir} \sin \omega_\rho)}{R_{mir}} \right) + \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir} \sin \omega_\rho)}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho)}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{R_{mir}} \right) + \frac{R_{mir} \sin \omega_\rho}{R_{mir}} \sqrt{1 - \frac{R_{mir}^2 \sin^2 \omega_\rho}{R_{mir}^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho \sqrt{\cos^2 \varphi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho |\cos \omega_\rho| \right) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\arcsin \sin \omega_\rho + \sin \omega_\rho \cos \omega_\rho), & |\omega_\rho| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} (\arcsin \sin(\pi - \omega_\rho) - \sin \omega_\rho \cos \omega_\rho), & \frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & |\omega_\rho| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi - \omega_\rho - \frac{\sin 2\omega_\rho}{2} \right), & \frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

В случаи, если $|\omega_\rho| < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \left| \sigma\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \sigma\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} + \frac{\sin 2\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2} + \frac{\sin 2\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\Delta\omega + \frac{\sin 2\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \sin 2\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

В случаи, если $\frac{\pi}{2} < |\omega_\rho| < \pi$:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \left| \sigma\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \sigma\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(\pi - \left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \frac{\sin 2\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\pi - \left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \frac{\sin 2\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \left(-\Delta\omega_{\text{пред}} - \frac{\sin 2\left(\omega_\rho + \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right) - \sin 2\left(\omega_\rho - \frac{\Delta\omega_{\text{пред}}}{2}\right)}{2} \right) \right| = \\
&= \left| -\frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \left| \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi} \right| = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega_{\text{пред}} \cos 2\omega_\rho}{\pi}
\end{aligned}$$

В итоге:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{пред}} + \sin \Delta\omega \cos 2\omega_\rho}{\pi}$$

(площадь сегментов остаётся конечной даже при бесконечно малых азимутальных углах; распределение площадей сегментов гармонично по азимутальному углу)

В случаи интегрирования по всей поверхности зеркала:

$$\rho < R_{mir} \Rightarrow |\varphi| < \pi \Rightarrow \sigma(\pi) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi + \frac{\rho^2}{2R_{mir}^2} \sin 2\pi + \arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \pi\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \pi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \pi} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\sigma = \sigma(\pi) - \sigma(-\pi) = \sigma(\pi) + \sigma(\pi) = 2\sigma(\pi) = 1$$

$$\begin{aligned} \rho > R &\Rightarrow |\varphi| < \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho} \Rightarrow \sigma\left(\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \sin \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \sin \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \sin^2 \arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{\rho}{R_{mir}} \frac{R_{mir}}{\rho}\right) + \frac{\rho}{R_{mir}} \frac{R_{mir}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_{mir}^2} \frac{R_{mir}^2}{\rho^2}} \right) = \frac{1}{\pi} \arcsin(1) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\sigma = \sigma\left(\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) - \sigma\left(-\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) = \sigma\left(\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) + \sigma\left(\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) = 2\sigma\left(\arcsin \frac{R_{mir}}{\rho}\right) = 1$$

(интегрирование по всей поверхности зеркала в обоих случаях даёт полную площадь его круга)

Расчёт плотности распределения фотонов в кольце

Количество черенковских фотонов, детектирующихся в заданном пикселе кольца:

$$\begin{aligned} I &= \psi N_\sigma = 2\pi\alpha\Delta\sigma\psi L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \\ &= 2\pi\alpha L \sin^2 \theta_{\text{пред}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda * \Delta\sigma\psi = \\ &= 2 * 3,14 * \frac{1}{137} * 94,29 \text{ м} * \sin^2 1,31^\circ * 463055 \text{ м}^{-1} * \Delta\sigma\psi = \\ &= \frac{2 * 3,14 * 94,29 * \sin^2 1,31^\circ * 463055}{137} \Delta\sigma\psi = 1046\Delta\sigma\psi \end{aligned}$$

В случаи нулевого прицельного параметра:

$$\rho = 0 \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\omega_{\text{перед}}}{2\pi} \Rightarrow I = \alpha\Delta\omega_{\text{перед}}\psi L \sin^2 \theta_{\text{перед}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \alpha\Delta\omega_{\text{перед}} L \sin^2 \theta_{\text{перед}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\eta(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda * \psi =$$

$$= \frac{1}{137} * \frac{15,83^\circ}{180^\circ} * 3,14 * 94,29 \text{ м} * \sin^2 1,31^\circ * 463055 \text{ м}^{-1} * \psi =$$

$$= \frac{15,83 * 3,14 * 94,29 * \sin^2 1,31^\circ * 463055}{137 * 180} * \psi = 46\psi$$