

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

УДК 539.165.2

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ
МЕХАНИЗМОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПОТОКОВ
МНОГОЗАРЯДНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ТЕМНЫХ
АТОМОВ

Научный руководитель
Профессор, д.ф.-м.н.

_____ М. Ю. Хлопов

Студент

_____ Л. И. Басов

Москва 2025

Содержание

Введение	3
1 Структура темных атомов	4
2 Испарение черных дыр	6
3 Образование аномальных изотопов темных атомов	7
4 Расчет потока темных атомов	8
4.1 Характеристики	8
4.2 Вероятность захвата	9
4.3 Накопленное число DA за стадию красного гиганта	9
4.4 Масса захваченных DA	9
4.5 Отношение к числу барионов	9
4.6 Поток аномальных изотопов	10
5 Аккреционные диски	10
5.1 Температура тонкого аккреционного диска Шакуры–Сюняева	11
5.2 Достаточность температур аккреционного диска для образования аномальных изотопов	12
6 Заключение	13

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее актуальных проблем современной физики элементарных частиц и космологии является природа темной материи (ТМ), которая составляет более 85 процентов массы Вселенной. Несмотря на множество косвенных свидетельств её существования, полученных из наблюдений крупномасштабной структуры Вселенной, динамики галактик и гравитационного линзирования, фундаментальные свойства ТМ остаются неизвестными.

Их объяснение выходит за рамки стандартной модели, существующей сегодня, и развивается в двух направлениях: теория гравитации и расширение Стандартной Модели взаимодействий элементарных частиц за счет существования новых стабильных частиц темной материи[1]. В данной работе основное внимание уделяется сценарию темного атома — связанного состояния нового тяжелого лептона X^{-2n} и n ядер ^4He .

Важную роль в формировании асимметрии между материей и антиматерией играют сфалеронные переходы, возникающие из-за нетривиальной топологии калибровочной группы $SU(2)$ электрослабого взаимодействия. В ранней Вселенной при высоких температурах переходы между топологически различными вакуумными состояниями могли приводить к нарушению сохранения барионного (B) и лептонного (L) чисел. Это позволяет объяснить барионную асимметрию и избыток частиц темной материи над соответствующими античастицами. В статьях[1] рассмотриваются и подробно обсуждаются сфалеронные процессы, в процессе которых и образовывались темные атомы. Не будем приводить подробный вывод, но оттуда мы можем извлечь важный вывод для наименьшего значения массы т. Ядра темных атомов X-гелия, должны иметь массы более 1 ТэВ[2].

Согласно концепции X-гелия, заряженная стабильная частица X может проявлять либо лептоноподобные характеристики, либо действовать как уникальная совокупность новых семейств тяжелых夸克ов, характеризующаяся уменьшенным взаимодействием с адронами. Учитывая, что масса этих тяжелых $-2n$ заряженных частиц определяет массу темных атомов, следовательно, она объясняют наблюдаемую плотность всей темной материи.

Цель: В данной работе исследуются астрофизические источники темных атомов, такие как черные дыры и сверхновые. Также изучается процесс с потенциальным сильным взаимодействием атомов XHe с ядрами вещества в звездах, которое может нарушить связанное состояние темных атомов и привести к образованию аномальных изотопов, обилие которых в окружающей среде подчиняется строгим экспериментальным ограничениям[3].

1. СТРУКТУРА ТЕМНЫХ АТОМОВ

Конкретная конфигурация связанной системы темного атома определяется параметром

$$a \approx Z_\alpha Z_X \alpha A_\alpha m_p R_{n\text{He}}$$

где:

Z_α - зарядовое число ядра $n\text{He}$, Z_X - зарядовое число частицы X , α - постоянная тонкой структуры ($\approx 1/137$), A_α - массовое число $n\text{He}$, m_p - масса протона, $R_{n\text{He}}$ - радиус соответствующего ядра $n\text{He}$.

Если a попадает в интервал $0 < a < 1$, то полученное связанное состояние демонстрирует структуру, напоминающую атом Бора, с центрально расположенной отрицательно заряженной частицей X и точечным ядром гелия, вращающимся вокруг нее, подобно атомной модели Бора. Если a лежит в интервале $1 < a < \infty$, то связанное состояние имеет характеристики, сходные с моделью атомов Томсона, в которой неточечное ядро He испытывает колебания вокруг существенно массивной отрицательно заряженной частицы X .

Рассмотрим вариант боровской структуры темного атома более подробно. Конфигурация OHe состоит из двух компонентов: ядра гелия и частицы O^{--} , которые взаимно связаны и рассматриваются как точечные частицы. В этой системе установлена сферическая система координат, начало которой находится в точке расположения O^{--} . Таким образом, в сценарии, где $Z_\alpha = 2$ и $Z_X = -2$, модель рассматривает ядро He как точечное образование, случайно перемещающееся по поверхности сферы с радиусом, равным боровскому радиусу атома R_b . Следовательно, энергия связи для OHe , включающая точечный заряд ${}^4\text{He}$, составляет $I_0 \approx 1,6 \text{ МэВ}$, а боровский радиус для He составляет примерно $R_b \approx 2 \times 10^{-13} \text{ см}$ [7]. Ядро гелия имеет постоянную скорость, называемую боровской скоростью и обозначаемую V . Скорость -частицы, движущейся по боровской орбите, соответствует примерно $V_\alpha \approx 3 \times 10^4 \text{ см/с}$.

Однако это лишь частный случай с $n = 1$. Частица X может нести заряд $-2n$, связанная с n ядрами гелия. Все темные атомы, начиная с $n = 2$, имеют томсоновскую структуру. Темные атомы X -гелия в модели Томсона состоят из двух связанных составляющих: ядра n -гелия и X -частицы. В этой конфигурации $X\text{He}$ выглядит следующим образом: заряженное ядро n -гелия, представляющее из себя заряженную сферу, заключает в себе точечную частицу X . $n\text{He}$ заметно легче, чем X , в результате чего ядра

<i>n</i>	A					
	<i>H</i>	<i>He</i>	<i>Li</i>	<i>Be</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	B	4	T	T	T	T
2	4	3	T	T	T	T
3	3	T	T	T	T	T
4	3	T	T	T	T	T
5	2	T	T	T	T	T

Рисунок 1 — Структура связанных состояний XN

колеблются вокруг X. В ссылке [63], описывается система из трех взаимодействующих заряженных частиц посредством кулоновских и ядерных сил, последовательно строится численная модель, которая может качественно реконструировать форму эффективного потенциала взаимодействия между XHe и ядром-мишенью в двух полуклассических подходах: подходе восстановления траекторий частиц, который включает в себя модель Бора и модель Томсона, и подходе восстановления потенциала.

2. ИСПАРЕНИЕ ЧЕРНЫХ ДЫР

Одним из источников образования темных атомов может являться испарение черных дыр(ЧД). Масса частицы накладывает ограничения на саму массу черной дыры, которая может участвовать в таком процессе. ЧД с массой 10^{15} г испускает частицы с энергией 10 МэВ. Для испускания частиц с массой более 1 Тэв, такие ЧД должны обладать массой не более 10^5 г. Проведем для подобных черных дыр ряд оценок испускаемого потока. Для этого воспользуемся калькулятором излучения Хокинга Температура Хокинга[4]. Возьмем черную дыру средней массы — примерно 1000 масс солнца.

Quantity	Value	Units	Expression
Mass	1000	M_{\odot}	M
Schwarzschild radius	2.95399E6	m	$R = M \frac{2G}{c^2}$
Surface area	1.09655E14	m^2	$A = M^2 \frac{16\pi G^2}{c^4}$
Effective density	1.30516E10	ρ_{\odot}	$\rho = \frac{1}{M^2} \frac{3c^6}{32\pi G^3}$
Surface gravity*	1.52125E10	m/s^2	$\kappa = \frac{1}{M} \frac{c^4}{4G}$
Surface tides	10299.6	$m/s^2/m$	$d\kappa_R = \frac{1}{M^2} \frac{c^6}{4G^2}$
Time to singularity	0.0154778	s	$t_S = M \frac{\pi G}{c^3}$
Entropy	1.04947E83	(dimensionless)	$S = M^2 \frac{4\pi G}{\hbar c}$
Temperature	6.16871E-11	K	$T = \frac{1}{M} \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G}$
Peak photons	2.08415E-14	eV	$\lambda_{\text{logpeak}} = M \frac{16\pi^2 G}{c^2 [W(-4e^{-4}) + 4]}$
Nominal luminosity	9.00362E-35	W	$L = \frac{1}{M^2} \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2}$
Lifetime	3.65988E83	s	$t = M^3 \frac{5120\pi G^2}{1.8083\hbar c^4}$

Рисунок 2 — Расчет излучения Хокинга

Поток частиц (число частиц в секунду)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{L}{k_B T} = \frac{c^3}{15360\pi G M} \approx 10^{15} \quad (1)$$

Полученный поток не дает заметного вклада в объеме анализируемых экспериментов. Поэтому нельзя сказать, что испарение черных дыр, является значимым источником образования темных атомов.

3. ОБРАЗОВАНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ИЗОТОПОВ ТЕМНЫХ АТОМОВ

Далее рассмотрим следующий источник темных атомов - сверхновые. Темные атомы захватываются звездами и содержатся в них, поскольку гравитационное поле звезды не дает им покинуть ее оболочку. Темные атомы там накапливаются и содержатся вплоть до момента образования сверхновой. В момент взрыва сверхновой, темные атомы $X\text{-nHe}$ могут ионизоваться и образовывать свободную многозарядную компоненту X^{-2n} , которая может захватываться другими ядрами тяжелых элементов, содержащихся в сверхновой, такими как железо, никель, сера и другие. Посмотрим на энергию ионизации $X\text{-nHe}$ и рассчитаем возможную энергию для аномальных изотопов темных атомов. Энергия связи для $O\text{-He}$: Как можно увидеть $X\text{-nHe}$ действитель-

$$E_{n_{OHe}} = \frac{-8m_{He}\alpha^2}{n^2} \text{ MeV}$$

$$-8m_{He}\alpha^2 \approx -1.6 \text{ MeV}$$

но ионизуется в условиях взрыва сверхновой. Рассчитаем возможную энергию связи для аномальных изотопов темных атомов:

$$W_{X-N}^{\text{Thomson-Glashow}} = 3 \frac{nZ\alpha}{R_N} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2nZ\alpha m_N R_N}} \right) = 3 \frac{nZ\alpha}{R_N} \left(1 - \sqrt{\frac{R_b}{R_N}} \right).$$

n	^{56}Fe	^{59}Ni	^{28}Si	^{52}S	^{40}Ca	^{16}O
1	23,6	25,1	15,1	16,8	20	9,3
2	47,9	50,9	31,3	34,5	40,7	20
3	72,4	76,8	47,5	52,4	61,6	30,8
4	96,9	102,7	63,9	70,4	82,5	41,8
5	101,4	128,7	80,3	88,4	103,5	52,9

Таблица 1 — Энергия связи аномальных изотопов $X^{-2n}N$ (МэВ)

Как можно увидеть, сверхновые действительно могут ионизировать атомы $O\text{-He}$, но аномальные изотопы уже не разрушаются в таких условиях. Таким образом можно утверждать, что аномальные изотопы образуют поток темных атомов в момент взрыва сверхновой.

4. РАСЧЕТ ПОТОКА ТЕМНЫХ АТОМОВ

В этом разделе приводится оценка потока аномальных изотопов, образующихся в результате ионизации темных атомов ОНе при взрыве сверхновой. При температурах оболочки сверхновой $\approx X^-$, которые затем могут быть захвачены тяжелыми ядрами с образованием связанных состояний ХН.

Известно, что локальная плотность темной материи в окружающем пространстве составляет около 0,3 ГэВ/см. В статье [5] обсуждается, что ОНе ведет себя как тяжелый нейтральный объект с ядерным поперечным сечением, который в среднем почти свободно проходит сквозь галактическую материю, но может быть захвачен плотными объектами, такими как звезды. Наибольшее количество темных атомов, звезда захватывает на стадии красного гиганта, когда звезда имеет размеры $10^{13} - 10^{15}$ см. Температура звезды на этой стадии не достигает нескольких сотен кэв, что не делает возможным выделение X, более вероятным, является слияние DA с ядрами звезды, что приводит к аномальному образованию изотопов.

4.1 Характеристики

Локальная плотность тёмной материи:

$$\rho_{DM} \approx 0.3 \text{ ГэВ/см}^3.$$

Для частицы массой $m_X \approx 1 \text{ ТэВ}$, фоновая концентрация ОНе:

$$n_X = \frac{\rho_{DM}}{m_X} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ см}^{-3}.$$

Характерная скорость ОНе в галактическом гало: $v_{DM} \approx 2.2 \times 10^7 \text{ см/с}$.

Поток тёмных атомов на единицу площади:

$$\Phi_{DM} = n_X \cdot v_{DM} \approx 6.6 \times 10^3 \text{ см}^{-2} \text{с}^{-1}.$$

Рассматриваем звезду на стадии красного сверхгиганта:

Масса: $M \approx 20 M_\odot$

Радиус красного гиганта: $R_{RG} \sim 10^{13} \text{ см}$

Длительность стадии красного гиганта: $t_{RG} \approx 10^7 \text{ лет} = 3.16 \times 10^{14} \text{ с}$.

Площадь поверхности звезды (полагая поток изотропным):

$$S_{RG} = 4\pi R_{RG}^2 \approx 1.26 \times 10^{27} \text{ см}^2.$$

4.2 Вероятность захвата

Оптическая толщина звезды для DA с ядерным сечением $\sigma_{\text{nuc}} \sim 10^{-25} \text{ см}^2$:

$$\tau = n_B \times \sigma_{\text{nuc}} \times 2R_{\text{RG}} \gg 1.$$

Следовательно, вероятность захвата: $P_{\text{cap}} = 1 - e^{-\tau} \approx 1$.

Это подтверждает, что все темные атомы, проходящие через звезду, захватываются и накапливаются там вплоть до коллапса звезды.

4.3 Накопленное число DA за стадию красного гиганта

Общее число DA, прошедших через звезду за время t_{RG} :

$$N_{\text{total,through}} = \Phi_{\text{DM}} \times S_{\text{RG}} \times t_{\text{RG}}.$$

Поскольку $P_{\text{capt}} = 1$, накопленное число:

$$N_{\text{DA,capt}} = N_{\text{total}} = \Phi_{\text{DM}} \times \pi R_{\text{RG}}^2 \times t_{\text{RG}} \approx 2.62 \times 10^{45}$$

4.4 Масса захваченных DA

Масса одной частицы X^{--} : $m_X \approx 1 \text{ ТэВ} = 1.78 \times 10^{-21} \text{ г}$.

Общая масса захваченных DA:

$$M_{\text{DA}} = N_{\text{DA,capt}} \times m_X = 2.63 \times 10^{46} \times 1.78 \times 10^{-21} \approx 4.67 \times 10^{24} \text{ г.}$$

В солнечных массах:

$$M_{\text{DA}} \approx \frac{4.67 \times 10^{24}}{2 \times 10^{33}} \approx 2.33 \times 10^{-9} M_{\odot}.$$

4.5 Отношение к числу барионов

Число барионов в звезде $20 M_{\odot}$:

$$N_B = \frac{20M_{\odot}}{m_p} \approx \frac{4 \times 10^{34}}{1.67 \times 10^{-24}} \approx 2.4 \times 10^{58}.$$

Отношение:

$$\frac{N_{\text{DA,cap}}}{N_B} = \frac{2.62 \times 10^{45}}{2.4 \times 10^{58}} \approx 1.09 \times 10^{-13}.$$

Концентрация аномальных темных атомов в космических лучах составляет примерно $\sim 10^{-13}$.

4.6 Поток аномальных изотопов

Предполагая, что поток изотропен, мы получаем на расстоянии d :

$$\Phi(d) = \frac{N_{\text{anom}}}{4\pi d^2}.$$

Подставляя различные значения d :

$$\Phi(1 \text{ kpc}) \approx 22 \text{ cm}^{-2}, \quad \Phi(10 \text{ kpc}) \approx 0.22 \text{ cm}^{-2}$$

$$\Phi(100 \text{ pc}) \approx 2.2 \times 10^3 \text{ cm}^{-2}, \quad \Phi(10 \text{ pc}) \approx 2.2 \times 10^5 \text{ cm}^{-2}.$$

Поток аномальных изотопов на различных расстояниях. На основе проделанных расчетов, можно показать, что при полном захвате X тяжелыми ядрами оценка потока от одиночной сверхновой массой порядка Масса: $M \approx 20 M_{\odot}$ на расстоянии 1 кпк составляет $\Phi \sim 22 \text{ cm}^{-2}$.

5. АККРЕЦИОННЫЕ ДИСКИ

Рассмотрим другой возможный источник аномальных изотопов темных атомов - аккреционные диски. Аккреционные диски представляют собой вращающиеся структуры из плазмы, формирующиеся при падении вещества на компактные объекты (чёрные дыры, нейтронные звёзды). Их образование обусловлено сохранением углового момента газа, обладающего ненулевым вращением относительно центрального объекта. В отсутствие начального момента вращения вещество падало бы сферически, но любое, даже малое начальное вращение приводит к формированию диска [7].

Для астрофизических чёрных дыр наиболее распространённой моделью является тонкий диск Шакуры-Сюняева, применимая при умеренных темпах акреции:

- толщина диска $H \ll R$,
- квазикеплеровское вращение,
- локальный тепловой баланс между вязким нагревом и радиационным охлаждением.

Типичные параметры аккреционного диска вокруг чёрной дыры звёзд-

ной массы $M_{\text{BH}} \sim 10 M_{\odot}$:

$$R_{\text{in}} \sim 3 R_g \sim 10^7 \text{ cm}, \quad (2)$$

$$R_{\text{out}} \sim 10^{10} \text{--} 10^{11} \text{ cm}, \quad (3)$$

$$T(R) \sim 10^7 \left(\frac{R}{R_{\text{in}}} \right)^{-3/4} \text{ K}, \quad (4)$$

$$n_B(R) \sim 10^{18} \text{--} 10^{22} \text{ cm}^{-3}, \quad (5)$$

где $R_g = 2GM_{\text{BH}}/c^2$ - радиус Шварцшильда [?, ?].

Рассмотрим, могут ли тёмные атомы взаимодействовать с барионной материией с образованием аномальных изотопов в связи с высокой плотностью вещества и большим размером диска.

5.1 Температура тонкого аккреционного диска Шакуры–Сюняева

В наиболее распространённой модели тонкого аккреционного диска Шакуры–Сюняева температура вещества определяется локальным балансом между вязким нагревом и радиационным охлаждением и имеет зависимость вида:

$$T(R) \approx \left(\frac{3GM_{\text{BH}}\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4},$$

где M_{BH} — масса чёрной дыры, \dot{M} — темп акреции, σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Для чёрной дыры звёздной массы $M_{\text{BH}} \sim 10 M_{\odot}$ характерные температуры составляют:

$$R \sim 10^9 \text{--} 10^{11} \text{ cm} \quad T_{\text{in}} \sim 10^7 \text{--} 10^8 \text{ K} \quad R \sim 3 \text{--} 6 R_g \sim 10^7 \text{ cm} \quad (6)$$

$$T_{\text{out}} \sim 10^4 \text{--} 10^6 \text{ K} \quad R \sim 10^9 \text{--} 10^{11} \text{ cm} \quad (7)$$

где $R_S = 2GM_{\text{BH}}/c^2$ — радиус Шварцшильда.

Для сверхмассивных чёрных дыр температура внутреннего диска ниже и составляют

$$T_{\text{in}} \sim 10^5 \text{--} 10^6 \text{ K},$$

Это связано с более крупным радиусом аккреционного диска при сопоставимых темпах акреции с ЧД меньшей массы.

5.2 Достаточность температур аккреционного диска для образования аномальных изотопов

Кинетическая энергия частиц в аккреционном диске определяется температурой:

$$E \sim k_B T.$$

При температурах внутреннего диска

$$T \sim 10^7 \text{ K} \Rightarrow E \sim 1 \text{ КэВ}$$

что сильно меньше минимальной энергии ионизации темных атомов $E \sim 1.6$ МэВ. Во внешних холодных областях диска вероятность образования аномальных изотопов еще ниже.

Во внутренних областях диска и особенно в горячей короне вероятность процесса возможна, однако остаётся крайне малой из-за малого сечения взаимодействия ОНе с ядрами.

Таким образом, температуры аккреционного диска и его короны являются достаточными лишь для крайне редкого образования аномальных изотопов, но не являются их основным источником.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной научно-исследовательской работе рассматривается механизм образования аномальных изотопов темных атомов в сверхновой и других астрофизических условиях. На основе анализа структуры связанного состояния $X^{-2n}N$ показано, что с увеличением числа ядер гелия в составе X-гелия конфигурация системы переключается с типа Бора на тип Томсона. Для $n \geq 2$ большинство темных атомов имеют структуру, подобную структуре атома Томсона, что позволяет им ионизироваться при экстремальных температурах сверхновых.

Расчет энергии связи X-Не показывает, что во время взрыва сверхновой температура и плотность среды достаточны для разрушения стабильного состояния X-nHe и высвобождения многозарядного компонента X^{-2n} . Оценки энергии связи аномальных изотопов - соединений X с различными ядрами (Fe, Ni, Si, S, Ca, O) показывают, что эти состояния не разрушаются при взрыве сверхновой.

Была получена оценка потока темных атомов, предположительно возникающего при испарении черных дыр. Полученный поток не дает заметного вклада в объеме анализируемых экспериментов. Поэтому нельзя сказать, что испарение ЧД, является значимым источником образования темных атомов.

Аналогично, анализ характеристик аккреционных дисков ЧД показал, что образование аномальных изотопов там крайне маловероятно и не вносит никакого заметного вклада в общий поток изотопов DA.

В дальнейшем поланируется исследования процессов, происходящих с темными атомами в ядре земли, также исследование состава метеоритов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Beylin, V.A.; Bikbaev, T.E.; Khlopov, M.Y.; Mayorov, A.G.; Sopin, D.O. *Dark Atoms of Nuclear Interacting Dark Matter.*, Universe 10, 368. , (2024)
Beylin, V.; Khlopov, M.; Kuksa, V.; Volchanskiy, N. New Physics of Strong Interaction and Dark Universe. Universe 2020, 6, 196. [CrossRef]
2. Cudell, J.R.; Khlopov, M.Y.; Wallemacq, Q., *The nuclear physics of OHe.*, Bled Work. Phys., **13**, (2012)
3. V.T. Toth. Hawking Radiation Calculator [Электронный ресурс]. URL: <https://www.vttoth.com/CMS/physics-notes/311-hawking-radiation-calculator> (дата обращения: 30 января 2026 г.).
4. M. Khlopov, *What comes after the Standard Model?*, Progress in Particle and Nuclear Physics, **Volume 116**, (2021), ISSN 0146-641
5. Khlopov, M.Y.: *Cosmoparticle physics of dark matter.*, Int. J. Mod. Phys. D (2019)
6. Beylin, V.; Khlopov, M.; Kuksa, V.; Volchanskiy, N.: *New Physics of Strong Interaction and Dark Universe.*, Universe 6 (2020) 196
7. N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, *Black holes in binary systems*, A&A **24**, 337 (1973).
8. M. Y. Khlopov, Dark atoms and composite dark matter, Int. J. Mod. Phys. D **19**, 1385 (2010).